УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРУ БЕРГМАНА*

We construct a linear method of the approximation $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the unit disk of classes of holomorphic functions A_p^ψ that are the Hadamard convolutions of unit balls of the Bergman space A_p with reproducing kernels $\psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k z^k$. We give conditions on ψ under which the method $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ approximate the class A_p^ψ in metrics of the Hardy space H_s and Bergman space A_s, $1 \le s \le p$, with error that coincides in order with a value of the best approximation by algebraic polynomials.

Построен линейный метод приближения $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ в единичном круге классов голоморфных функций A_p^ψ, являющихся свертками по Адамару единичных шаров пространства Бергмана A_p с воспроизводящими ядрами $\psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k z^k$. Указаны условия для ψ, при которых метод $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ приближает класс A_p^ψ в метриках пространств Гарди H_s и Бергмана A_s, $1 \le s \le p$, с погрешностью, которая по порядку совпадает с величиной наилучшего приближения алгебраическими многочленами.

1. Постановка задачі. Основні результати. Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ — множина усіх функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D}$.

Нехай, далі, $1 \le p < \infty$, ν і σ — нормовані міри Лебега відповідно в крузі $\mathbb{D}$ і на колі $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, A_p — простір Бергмана голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій із нормою

$$\|f\|_{A_p} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\nu \right)^{1/p} < \infty$$

і H_p — простір Гарді голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій із нормою

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w) \right)^{1/p} < \infty.$$

При $p = \infty$ покладаємо $A_\infty = H_\infty$ і розуміємо під цим простір обмежених голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій із нормою $\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.

Для даної послідовності комплексних чисел $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ такої, що $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\psi_k|} \le 1$, побудуємо функцію

$$\psi(z) := \sum_{k=0}^\infty \psi_k z^k, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Якщо функція $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \hat{f}_k z^k$ — її розвинення в ряд Тейлора, в якому $\hat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$, то сума ряду

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № GP/F13/0018).

$$(f * \psi)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k \psi_k z^k$$

визначає функцію, голоморфну в $\mathbb{D}$, і називається згорткою за Адамаром функцій f і ψ.

Якщо для заданої послідовності $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ функцію $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ можна зобразити у вигляді згортки $g * \psi$ з деякою функцією $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, то кажуть [1], що f є ψ-інтегралом функції g. У свою чергу функцію g називають ψ-похідною функції f і використовують при цьому позначення f^{ψ}. Зрозуміло, що якщо $|\psi_k| > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$, то

$$f^{\psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} \hat{f}_k z^k \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Для заданої послідовності $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначимо клас A_p^{ψ}, $1 \le p \le \infty$, таким чином:

$$A_p^{\psi} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \left\| f^{\psi} \right\|_{A_p} \le 1 \right\}.$$

Далі вважаємо, що $|\psi_k| > 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$, а функцію $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ при цьому називатимемо твірним ядром класу A_p^{ψ}.

Символом $\mathcal{L}$ позначимо множину всіх нескінченних нижньотрикутних матриць $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}$, $k = \overline{0, n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, елементами яких є функції $\lambda_{k,n}(\cdot)$, визначені на відрізку $[0,1]$. Поставивши у відповідність кожній матриці $\Lambda \in \mathcal{L}$ послідовність лінійних операторів $\{U_{n,\Lambda}\}_{n \in \mathbb{N}}$, заданих на $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ правилом

$$U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n}(|z|) \hat{f}_k z^k, \tag{1}$$

тим самим визначимо певний лінійний метод наближення голоморфних функцій.

Якщо оператор $U_{n,\Lambda}$ відображає множину $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ у простір $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраїчних многочленів степеня не більше $n-1$, то будемо говорити, що матриця Λ породжує поліноміальний лінійний метод наближення голоморфних функцій.

Зауважимо, що для всіх $z \in \mathbb{T}_{\varrho} := \{z : |z| = \varrho\}$ при фіксованому $\varrho \in [0,1]$ $\lambda_{k,n}(|z|) = \mathrm{const}$. Тому метод $U_{n,\Lambda}$ на кожному концентричному колі $\mathbb{T}_{\varrho}$ можна трактувати як поліноміальний лінійний метод наближення, породжений числовою матрицею $\Lambda_{\varrho} := \{\lambda(\varrho)_{k,n}\}$.

Нехай ψ — твірне ядро класу A_p^{ψ}, $\mathcal{L} \ni \Lambda^*$ — матриця, елементи якої визначаються правилом

$$\lambda_{k,n}^*(|z|) = 1 - \frac{\overline{\psi_{2n-k}}}{\psi_k} \frac{2n-k+1}{n+1} e^{i2\arg\psi_n} |z|^{2(n-k)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{2}$$

і $Q_{n,\psi} := U_{n,\Lambda^*}$, $n \in \mathbb{N}$, — лінійний метод, породжений матрицею Λ^*.

У даній роботі вивчаються апроксимативні властивості лінійного методу $\{Q_{n,\psi}\}_{n \in \mathbb{N}}$ стосовно функцій класу A_p^{ψ}. Конкретніше, предметом дослідження є величина

$$U_n(A_p^\psi, X) \ := \ \sup_{f \in A_p^\psi} \left\| f - Q_{n,\psi}(f) \right\|_X, \tag{3}$$

в якій X позначає один із просторів H_s і A_s при $s \in [1, p]$.

Побіжно досліджуються також величини

$$\mathcal{L}_n(A_p^\psi, X) \ := \ \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \sup_{f \in A_p^\psi} \left\| f - U_{n,\Lambda}(f) \right\|_X \tag{4}$$

і

$$E_n(A_p^\psi, X) \ := \ \sup_{f \in A_p^\psi} E_n(f)_X, \tag{5}$$

де $E_n(f)_X \ := \ \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \| f - P \|_X$, які називаються відповідно найкращим лінійним та найкращим многочленним наближенням класу A_p^ψ у просторі X.

Мета дослідження полягає у з'ясуванні того, які можливості має метод $\{Q_{n,\psi}\}_{n \in \mathbb{N}}$ стосовно класів A_p^ψ у порівнянні з многочленами найкращого наближення.

Основним результатом роботи є наступне твердження, в якому використано такі позначення:

$$\mathcal{R}_n \ := \ \left\{ g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : |\hat{g}_n| > 0, \ 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\hat{g}_n} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_{k+n} z^k \right) \geq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{D} \right\}$$

і

$$D\psi(z) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi_k z^k.$$

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq s \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ *і* $\mathcal{E}_n(A_p^\psi, X)$ — *одна з величин* (3), (4) *або* (5). *Якщо* $D\psi \in \bigcap_{n \geq n_0} \mathcal{R}_n$, *де* n_0 — *деяке фіксоване натуральне число, то для будь-якого натурального* $n \geq n_0$:

1) *виконуються нерівності*

$$\frac{\min(p,q)}{2} \frac{(n+1)|\psi_n|}{(qn/2+1)^{1/q}} \ \leq \ \mathcal{E}_n(A_p^\psi, H_s) \ \leq \ \frac{(n+1)|\psi_n|}{(qn/2+1)^{1/q}}; \tag{6}$$

2) *мають місце співвідношення*

$$C_1 n^{1/p - 1/s} |\psi_n| \ \leq \ \mathcal{E}_n(A_p^\psi, A_s) \ \leq \ C_2 n^{1/p - 1/s} |\psi_n|, \tag{7}$$

де $C_1 = (p/2)^{1/p} (s'/2)^{1/s'}/2$, $1/s + 1/s' = 1$, *і* $C_2 = 2^{s+1}(2(p-s)/sp)^{(p-s)/sp}$ $(0^0 = 1)$;

3) *для будь-якої функції* $f \in A_p^\psi$

$$\left\| f - Q_{n,\psi}(f) \right\|_{H_s} \ \leq \ \left\| z^{n/p} f^\psi(z) \right\|_{A_p} \frac{(n+1)|\psi_n|}{(n/2+1)^{1/q}} \tag{8}$$

і

$$E_n(f)_{H_s} \ \leq \ E_n(f^\psi)_{A_p} \frac{(n+1)|\psi_n|}{(qn/2+1)^{1/q}}. \tag{9}$$

Результат теореми 1 є суміжним з результатами робіт [2 – 9], в яких величини (4) і (5) досліджувалися на класах

$$H_p^\psi := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \left\| f^\psi \right\|_{H_p} \le 1 \right\}$$

як за конкретних значень параметра ψ, так і в загальному випадку. Зокрема, в [6, 7] показано, що

$$E_n(H_p^\psi, H_s) = \mathcal{L}_n(H_p^\psi, H_s) = \psi_n \qquad \forall\, n \ge n_0$$

за умови, що послідовність $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ є додатною, а гармонічні функції $K_{n,\psi}(z) := \psi_n/2 + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^\infty \psi_{k+n} z^k$ — знакосталими в $\mathbb{D}$ для кожного натурального $n \ge n_0$. До того ж в [6] показано, що лінійний метод $\{U_{n,\Lambda}\}_{n\in\mathbb{N}}$, породжений матрицею Λ з елементами

$$\lambda_{k,n} = 1 - \frac{\psi_{2n-k}}{\psi_k}, \qquad k = \overline{0, n-1}, \qquad n = \overline{1, \infty},$$

є найкращим лінійним методом наближення класів H_p^ψ і єдиним при $p = \infty$. Зазначимо, що знакосталість функцій $K_{n,\psi}$ при додатних ψ_k рівносильна тому, що $\psi \in \bigcap_{n \ge n_0} \mathcal{R}_n$.

Прокоментуємо далі теорему 1, зробивши низку зауважень.

Зауваження. **1.** Як буде видно з доведення теореми 1, умова $D\psi \in \bigcap_{n\ge n_0} \mathcal{R}_n$ істотно використовується лише для доведення відповідних оцінок зверху. Наведені оцінки знизу величин $\mathcal{E}_n(A_p^\psi, X)$ справджуються завжди, яким би не було твірне ядро класу A_p^ψ.

2. Включення $D\psi \in \mathcal{R}_m$, $m \in \mathbb{N}$, гарантує, що

$$(k+1)|\psi_k| \le (m+1)|\psi_m| \qquad \forall\, k \ge m. \tag{10}$$

Отже, якщо $D\psi \in \bigcap_{n\ge n_0} \mathcal{R}_n$, де n_0 — деяке фіксоване натуральне число, то послідовність $\{(k+1)|\psi_k|\}_{k=n_0}^\infty$ є незростаючою і при $p > 1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/p}|\psi_n| = \left(\frac{q}{2}\right)^{1/q} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|\psi_n|}{(qn/2+1)^{1/q}} = 0,$$

внаслідок чого величини $\mathcal{E}_n(A_p^\psi, H_s)$ у співвідношеннях (6) прямують до нуля зі швидкостями $n^{1/p}|\psi_n|$.

При $p = 1$ із співвідношень (6) випливає, що

$$U_n(A_1^\psi, H_1) = O(1)\mathcal{L}_n(A_1^\psi, H_1) = O(1)E_n(A_1^\psi, H_1) = O(1)n|\psi_n|, \qquad n \to \infty,$$

і тому із самого лише включення $D\psi \in \bigcap_{n\ge n_0} \mathcal{R}_n$, $n_0 \in \mathbb{N}$, взагалі кажучи, не випливає, що величини $E_n(A_1^\psi, H_1)$ і $\mathcal{L}_n(A_1^\psi, H_1)$ прямують до нуля при $n \to \infty$ (взяти, наприклад, $\psi_k = (k+1)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$).

Найпростішими прикладами твірних ядер, що задовольняють умови теореми 1, є функції $\psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k z^k$, в яких коефіцієнти ψ_k є додатними і такими, що числова послідовність $\{(k+1)\psi_k\}_{k=0}^\infty$ є обмеженою зверху і опуклою.

Справді, поклавши $\mu_k := (k+1)\psi_k$, згідно з означенням опуклої числової послідовності одержимо

$$\varrho^k\mu_k - 2\varrho^{k+1}\mu_{k+1} + \varrho^{k+2}\mu_{k+2} = \varrho^k(\mu_k - 2\varrho\mu_{k+1} + \varrho^2\mu_{k+2}) =$$
$$= \varrho^k(\mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2} + (1-\varrho)(2\mu_{k+1} - (1-\varrho)\mu_{k+2})) \geq 0$$
$$\forall \varrho\in[0,1), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Окрім цього $\varrho^k\mu_k \downarrow 0$. Тому за відомою теоремою (див., наприклад, [10, с. 100]) для будь-якого натурального n і $\varrho\in[0,1)$ тригонометричний ряд

$$(n+1)\psi_n + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+n+1)\psi_{n+k}\varrho^k\cos kt$$

збігається скрізь на $[0, 2\pi]$ до невід'ємної функції та є її рядом Фур'є.

Отже, стосовно функції ψ помічаємо, що для будь-якого натурального n в кожній точці $z\in\mathbb{D}$, $z = \varrho e^{it}$,

$$1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(n+1)\psi_n}\sum_{k=0}^{\infty}(k+n+1)\psi_{n+k}z^k\right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)\psi_n}\left((n+1)\psi_n + 2\sum_{k=1}^{\infty}(k+n+1)\psi_{n+k}\varrho^k\cos kt\right) \geq 0, \tag{11}$$

тобто $D\psi \in \bigcap_{n\geq n_0}\mathcal{R}_n$.

***Зауваження* 3.** При $p = 2$ і $1 \leq s \leq 2$ співвідношення (6) перетворюється в рівність

$$\mathcal{E}_n(A_2^{\psi}, H_s) = \sqrt{n+1}\,|\psi_n|.$$

Неважко помітити, що для виконання цієї рівності для всіх $n\in\mathbb{N}$ досить вимагати лише, щоб послідовність $\{\sqrt{k+1}\,|\psi_k|\}_{k=0}^{\infty}$ була незростаючою.

Справді, для будь-якої функції $f\in A_2^{\psi}$

$$\|f^{\psi}\|_{A_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\hat f_k|^2}{(k+1)|\psi_k|^2} \leq 1.$$

Внаслідок цього і умови $|\psi_0|^2 \geq 2|\psi_1| \geq \ldots \geq (k+1)|\psi_k|^2 \geq \ldots$ для кожного натурального n маємо співвідношення

$$E_n^2(f)_{H_2} \leq \|f - Q_{n,\psi}(f)\|_{H_2}^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\psi_{2n-k}|^2(2n-k+1)^2}{|\psi_k|^2(n+1)^2}|\hat f_k|^2 + \sum_{k=n}^{\infty}|\hat f_k|^2 =$$
$$= (n+1)|\psi_n|^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\psi_{2n-k}|^2(2n-k+1)^2(k+1)}{|\psi_n|^2(n+1)^3}\frac{|\hat f_k|^2}{(k+1)|\psi_k|^2} +$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)|\psi_k|^2\frac{|\hat f_k|^2}{(k+1)|\psi_k|^2} \leq (n+1)|\psi_n|^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\hat f_k|^2}{(k+1)|\psi_k|^2} +$$
$$+ (n+1)|\psi_n|^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|\hat f_k|^2}{(k+1)|\psi_k|^2} \leq (n+1)|\psi_n|^2,$$

яке для функції $f_*(z) = \sqrt{n+1}\,|\psi_n|z^n$ перетворюється в рівність.

***Зауваження.* 4.** Порівнюючи праві частини у співвідношеннях (6) і (7), бачимо, що при $s < p$ метод $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ дає наближення у просторі A_s, яке за порядком краще, ніж у просторі H_s.

5. Оскільки рівномірно у крузі $\mathbb{D}$ $|z|^n \left| f^\psi(z)\right|^p \to 0$ при $n \to \infty$, то в п. 3 теореми 1 для всіх $p \in [1, \infty)$ і будь-якої функції $f \in A_p^\psi$ величина $\left\| z^{n/p} f^\psi(z)\right\|_{A_p} \to 0$ при $n \to \infty$ і тому $\left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{H_s} = o(1) n^{1/p} |\psi_n|$, $n \to \infty$. Однак при $p = \infty$ таке співвідношення, взагалі кажучи, вже не є правильним. Це пов'язано з тим, що метод $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ може бути насиченим у просторі H_s. Для прикладу розглянемо один такий випадок.

Нагадаємо (див., наприклад, [11], [12] (гл. 2) і [13, с. 434]), що лінійний метод наближення $\{U_{n,\Lambda}\}_{n\in\mathbb{N}}$ є насиченим у просторі H_p, якщо існує додатна функція φ натурального аргументу, монотонно спадна до нуля і така, що кожна функція $f \in H_p$, для якої

$$\left\| f - U_{n,\Lambda}(f)\right\|_{H_p} = o(1)\varphi(n), \qquad n \to \infty,$$

є інваріантним елементом методу, якщо той розглядати як оператор $U_{n,\Lambda}$, тобто $U_{n,\Lambda}(f) = f$, і якщо множина

$$\Phi(\Lambda)_{H_p} := \left\{ f \in H_p : \left\| f - U_{n,\Lambda}(f)\right\|_{H_p} = O(1)\varphi(n),\ n \to \infty \right\}$$

містить принаймні один неінваріантний елемент. При цьому функція φ називається порядком насичення, а множина $\Phi(\Lambda)_{H_p}$ — класом насичення.

Нехай твірне ядро $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$ таке, що виконується (10) при $m = 1$ і

$$C_\psi := \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} \varliminf_{n\to\infty} \left| \frac{\psi_{2n-k}}{\psi_n} \right| > 0, \tag{12}$$

а f — функція з H_p, для якої $\left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{H_p} = o(1)|\psi_n|$, $n \to \infty$. Тоді за допомогою оцінки коефіцієнтів Тейлора функцій з H_p ($\forall g \in H_p \Rightarrow |\hat{g}_k| \le \|g\|_{H_p}$, $k \in \mathbb{Z}_+$) отримуємо співвідношення

$$C_\psi \frac{|\hat{f}_k|}{|\psi_k|} \le \frac{|\hat{f}_k|}{|\psi_k|} \varliminf_{n\to\infty} \left| \frac{\psi_{2n-k}}{\psi_n} \right| \frac{2n-k+1}{n+1} = \left|\hat{f}_k\right| \varliminf_{n\to\infty} \left| \frac{1-\lambda_{k,n}^*}{\psi_n} \right| \le$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{|\psi_n|} \left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{H_p} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

з якого випливає, що $f \equiv 0$, тобто f є інваріантним елементом оператора $Q_{n,\psi}$.

З іншого боку, для функції $f(z) = z^k$, де k — довільне натуральне число, маємо

$$\left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{H_p} = \left| \frac{\psi_{2n-k}}{\psi_k} \right| \frac{2n-k+1}{n+1} = O(1)|\psi_n| \qquad \forall n \ge k.$$

Отже, показано, що за умов (10) і (12) метод $\{Q_{n,\psi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ є насиченим в H_p з порядком насичення $|\psi_n|$ і тому співвідношення $\left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{H_p} = o(1)|\psi_n|$, $n \to \infty$, не може виконуватися для жодної функції з H_p, окрім функцій, тотожних нулеві.

На завершення коментування теореми 1 наведемо одне застосування одержаних результатів до побудови лінійного методу наближення класів $A_p^{\psi,m}$, які означаються таким чином.

Нехай послідовність $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ така, як і раніше, m — фіксоване натуральне число, $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і

$$f^{\psi,m}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi_k} \hat{f}_{k+m} z^k.$$

Тоді

$$A_p^{\psi,m} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \left\| f^{\psi,m} \right\|_{A_p} \le 1 \right\}.$$

Оскільки будь-яку функцію f з класу $A_p^{\psi,m}$ можна подати у вигляді

$$f(z) = P_{m-1}(z) + z^m g(z),$$

де P_{m-1} — деякий алгебраїчний многочлен з $\mathcal{P}_{m-1}$ і g — деяка функція з A_p^{ψ}, то для кожної функції $f \in A_p^{\psi,m}$ справджується формула

$$f(z) - \left(\sum_{k=0}^{m-1} \hat{f}_k z^k + z^m \sum_{k=0}^{n-m-1} \lambda_{k+m,n} \hat{f}_{k+m} z^k \right) = z^m \left(g(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} \lambda_{k+m,n} \hat{g}_k z^k \right),$$

в якій $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_{k+m} z^k$ — функція з A_p^{ψ}.

Отже, внаслідок співвідношення (6) лінійний метод, породжений матрицею $\Lambda^{**} = \{\lambda_{k,n}^{**}\}$, $n \ge m$, в якій

$$\lambda_{k,n}^{**} = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1}, \\ 1 - \dfrac{\overline{\psi_{2n-k-m}}}{\psi_{k-m}} \dfrac{2n-k-m+1}{n-m+1} e^{i2\arg\psi_{n-m}}, & k = \overline{m, n-1}, \end{cases} \tag{13}$$

здійснює наближення у просторі H_s будь-якої функції $f \in A_p^{\psi,m}$ з похибкою, яка не перевищує значення $(n-m+1)|\psi_{n-m}|(q(n-m)/2+1)^{-1/q}$, тобто

$$\left\| f - U_{n,\Lambda^{**}}(f) \right\|_{H_p} = \left\| g(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} \lambda_{k+m,n}^{**} \hat{g}_k z^k \right\|_{H_s} \le \frac{(n-m+1)|\psi_{n-m}|}{(q(n-m)/2+1)^{1/q}}.$$

З іншого боку, як буде видно з доведення теореми 1, функція

$$f_{**}(z) = \frac{\min(p,q)}{2} \frac{(n-m+1)\psi_{n-m}}{(q(n-m)/2+1)^{1/q}} z^n$$

належить класові $A_p^{\psi,m}$ і для неї

$$\frac{\min(p,q)}{2} \frac{(n-m+1)|\psi_{n-m}|}{(q(n-m)/2+1)^{1/q}} = E_n(f_{**})_{H_s} \le E_n(A_p^{\psi,m}, H_s).$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $m \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$ *і* $\mathcal{E}_n(A_p^{\psi,m}, X)$ — *одна з величин* (3), *в якій* $Q_{n,\psi} = U_{n,\Lambda^{**}}$, (4) *або* (5). *Якщо* $D\psi \in \in \bigcap_{n \ge n_0} \mathcal{R}_n$, *де* n_0 — *деяке фіксоване натуральне число таке, що* $n_0 \ge m$, *то для будь-якого натурального* $n \ge n_0$

$$\frac{\min(p,q)}{2}\frac{(n-m+1)|\psi_{n-m}|}{(q(n-m)/2+1)^{1/q}} \le \mathcal{E}_n(A_p^{\psi,m}, H_s) \le \frac{(n-m+1)|\psi_{n-m}|}{(q(n-m)/2+1)^{1/q}}.$$

У теоремі 2 цікавим видається той випадок, коли $\psi_k = (k+1)^{-1}$ і $m = 1$. При цьому, як легко бачити, клас $A_p^{\psi,m}$ складається з усіх функцій $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, для яких $\|f'\|_{A_p} \le 1$ (такий клас прийнято називати класом Діріхле і позначати $\mathcal{D}_p$), а лінійний метод $\{U_{n,\Lambda^{**}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, породжений матрицею (13), набирає вигляду

$$U_{n,\Lambda^{**}}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\hat{f}_k z^k =: \sigma_n(f)(z),$$

тобто перетворюється в класичний метод Фейєра.

2. Доведення результатів. Нехай $\mu_k := (k+1)\psi_k$ і

$$P(r,t) := P_n(r,t) := 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{k+n}}{\mu_n}r^k e^{ikt} - 1.$$

Лема. *Нехай функція* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. *Тоді для будь-яких* $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0,1)$ *і* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$\varrho^2(f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\psi}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})) = \frac{\mu_n}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})r^n e^{-int}P(r,t)\,dt\,rdr. \quad (14)$$

Доведення. Безпосередніми обчисленнями з використанням формули Коші переконуємося в тому, що

$$\varrho^2 Q_{n,\psi}(f)(\varrho^2 e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\overline{\mu_{2n-k}}}{\mu_k}e^{2i\arg\mu_n}r^{2(n-k)}\right)\mu_k r^k e^{-ikt}\,dt\,rdr,$$

$$\varrho^2 f(\varrho^2 e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})D\psi(re^{-it})\,dt\,rdr =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})\big(D\psi(re^{-it}) + g(r,t)\big)\,dt\,rdr,$$

де $g(r,t)$ — будь-яка функція, визначена на $[0,1]\times[0,2\pi]$ і така, що при кожному фіксованому r функція $g(r,\cdot)$ є сумовною на $[0,2\pi]$ і має ряд Фур'є вигляду

$$g(r,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r)e^{ikt}.$$

Звідси отримуємо формулу

$$\varrho^2(f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\psi}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})\Bigg(D\psi(re^{-it}) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\overline{\mu_{2n-k}}}{\mu_k}e^{2i\arg\mu_n}r^{2(n-k)}\right)\mu_k r^k e^{-ikt} + g(r,t)\Bigg)dt\,rdr. \quad (15)$$

Виконаємо перетворення виразу, що стоїть у дужках під знаком інтеграла в останній рівності, вибравши за g функцію

$$g(r,t) = e^{i2(\arg\mu_n - nt)} \sum_{k=2n+1}^{\infty} \overline{\mu_k} r^k e^{ikt}.$$

Отже,

$$D\psi(re^{-it}) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{\overline{\mu_{2n-k}}}{\mu_k} e^{2i\arg\mu_n} r^{2(n-k)}\right)\mu_k r^k e^{-ikt} + g(r,t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mu_k r^k e^{-ikt} - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k r^k e^{-ikt} + \sum_{k=0}^{n-1}\overline{\mu_{2n-k}} e^{2i\arg\mu_n} r^{2n-k} e^{-ikt} +$$

$$+ e^{i2(\arg\mu_n - nt)} \sum_{k=2n+1}^{\infty}\overline{\mu_k} r^k e^{ikt} = \sum_{k=n}^{\infty}\mu_k r^k e^{-ikt} + e^{i2(\arg\mu_n - nt)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\overline{\mu_k} r^k e^{ikt} =$$

$$= \mu_n r^n e^{-int}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_k}{\mu_n} r^{k-n} e^{-i(k-n)t} + \overline{\mu_n} e^{2i\arg\mu_n} r^n e^{-int}\sum_{k=n}^{\infty}\overline{\left(\frac{\mu_k}{\mu_n}\right)} r^{k-n} e^{i(k-n)t} =$$

$$= \mu_n r^n e^{-int}\left(2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_{k+n}}{\mu_n} r^k e^{ikt} - 1\right) = \mu_n r^n e^{-int} P(r,t).$$

Підставивши знайдений вираз ядра в (15), отримаємо формулу (14).

***Доведення теореми* 1.** Нехай f — довільна функція з A_p^{ψ},

$$M_p(f)(\varrho) := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w)\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

і

$$M(f)(\varrho) := M_\infty(f)(\varrho) := \max_{t\in[0,2\pi]}\left|f(\varrho e^{it})\right|, \quad 0 \le \varrho < 1.$$

Нагадаємо, що величина $M_p(f)(\varrho)$, як функція змінної ϱ, є неспадною на пввідрізку $[0,1)$ і $\|f\|_{H_p} = \sup_{0<\varrho<1} M_p(f)(\varrho)$, $\|f\|_{A_p} = \left(2\int_0^1 M_p^p(f)(r)\,r\,dr\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$. Зрозуміло також, що $M_s(f)(\varrho) \le M_p(f)(\varrho)$, якщо $1 \le s \le p$.

Доведення теореми 1 розіб'ємо на дві частини. Перша частина стосуватиметься оцінок величин, про які йдеться в теоремі, зверху в метриці відповідних просторів, а друга — оцінок знизу.

В першій частині доведення скористаємось лемою. За умовою теореми $D\psi \in \bigcap_{n\ge n_0}\mathcal{R}_n$, а це рівносильно тому, що функції $P_n(r,t)$, $n \ge n_0$, як функції двох змінних у прямокутнику $[0,1]\times[0,2\pi]$, набувають невід'ємних значень. Отже, оцінюючи інтеграл у правій частині рівності (14) за нерівністю Гельдера, отримуємо співвідношення

$$\varrho^2\left|f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\psi}(f)(\varrho^2 e^{i\theta}))\right| \le$$

$$\le |\mu_n|\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi}\left|f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})\right|^p r^{pkn} P(r,t)\,dt\,r\,dr\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} r^{qmn} P(r,t)\,dt\,r\,dr\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi}\left|f^{\psi}(re^{i(\theta+t)})\right|^p r^{pkn} P(r,t)\,dt\,r\,dr\right)^{1/p}\frac{|\mu_n|\varrho^{mn+2/q}}{(qmn/2+1)^{1/q}}, \quad k+m=1, \quad k,\ m \ge 0. \tag{16}$$

Піднісши обидві частини цієї нерівності до степеня p, зінтегрувавши по θ на відрізку $[0, 2\pi]$ і застосувавши теорему Фубіні, з урахуванням того, що

$$\int_0^{2\pi} P(r,t)\,dt = 2\pi,$$

отримаємо оцінку

$$\varrho^2 M_p^p(f - Q_{n,\psi}(f))(\varrho^2) \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\int_0^{2\pi} \left|f^{\psi}(re^{i\theta})\right|^p r^{pkn}\,d\theta\, r\,dr \frac{|\mu_n|^p\,\varrho^{p(mn+2/q)}}{(qmn/2+1)^{p/q}} \le$$

$$\le 2\int_0^{\varrho} M_p^p(f^{\psi})(r)\, r^{pkn}\, r\,dr \frac{((n+1)|\psi_n|)^p}{(qmn/2+1)^{p/q}}\varrho^{p(mn+2/q)} \qquad \forall\, \varrho \in [0, 1). \tag{17}$$

Співвідношення (17) є ключовим в доведенні теореми 1, з нього безпосередньо випливає:

1) нерівність (8), якщо взяти $k = 1/p$, $m = 1/q$ і спрямувати ϱ до 1;

2) нерівність (9), якщо взяти $k = 0$, $m = 1$, перепозначити $f^{\psi} := f^{\psi} - P$, де $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, і спрямувати ϱ до 1;

3) верхня оцінка в нерівності (6) для кожної з величин (3) – (5), якщо покласти $k = 0$, $m = 1$, спрямувати ϱ до 1, потім взяти верхню межу по класу A_p^{ψ} в обох частинах (17) і врахувати те, що

$$E_n(A_p^{\psi}, H_s) \le \mathcal{L}_n(A_p^{\psi}, H_s) \le U_n(A_p^{\psi}, H_s).$$

Зрозуміло, що співвідношення (17) залишиться правильним, якщо в ньому формально замінити p на s, а q на s', де $1/s + 1/s' = 1$. Зробивши так, продовжимо далі оцінку інтеграла у правій частині (17):

$$\varrho^2 M_s^s(f - Q_{n,\psi}(f))(\varrho^2) \le 2\int_0^{\varrho} M_s^s(f^{\psi})(r)\, r^{skn}\, r\,dr \frac{((n+1)|\psi_n|)^s}{(s'mn/2+1)^{s/s'}}\varrho^{s(mn+2/s')} \le$$

$$\le M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\frac{((n+1)|\psi_n|)^s}{(skn/2+1)(s'mn/2+1)^{s/s'}}\varrho^{skn+2+s(mn+2/s')} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)|\psi_n|}{n/2+1}\right)^s M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\varrho^{s(n+2)} \le 2^s|\psi_n|^s M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\varrho^{s(n+2)}.$$

Тут взято значення $k = 1/s$, $m = 1/s'$.

З останнього співвідношення випливає нерівність

$$4M_s^s(f - Q_{n,\psi}(f))(\varrho^2)\varrho^3 \le 2^{s+2}|\psi_n|^s M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\varrho^{sn+1}, \tag{18}$$

зінтегрувавши яку відносно ϱ на інтервалі $(0, 1)$ та застосувавши нерівність Гельдера, одержимо низку співвідношень

$$\left\|f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{A_s}^s = 4\int_0^1 M_s^s(f - Q_{n,\psi}(f))(\varrho^2)(r))\varrho^3\,d\varrho \le$$

$$\le 2^{s+1}|\psi_n|^s 2\int_0^1 M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\varrho^{sn}\varrho\,d\varrho \le$$

$$\le 2^{s+1}|\psi_n|^s\left(2\int_0^1 M_s^p(f^{\psi})(\varrho)\varrho\,d\varrho\right)^{s/p}\left(2\int_0^1 \varrho^{spn/(p-s)}\varrho\,d\varrho\right)^{(p-s)/p} \le$$

$$\leq\ 2^{s+1}|\psi_n|^s\left(2\int_0^1 M_p^p(f^\psi)(\varrho)\varrho\,d\varrho\right)^{s/p}\frac{1}{\left(\dfrac{spn}{2(p-s)}+1\right)^{(p-s)/p}}\ \leq$$

$$\leq\ 2^{s+1}\left(\frac{2(p-s)}{sp}\right)^{(p-s)/p} n^{(s-p)/p}|\psi_n|^s.$$

Цим доведено верхню оцінку величини $\mathcal{L}_n(A_p^\psi, A_s)$ і $U_n(A_p^\psi, A_s)$ в (7).

Для оцінки величини $E_n(A_p^\psi, A_s)$ досить показати, що для будь-якої функції $f\in A_p^\psi$ існує алгебраїчний многочлен $P_{n,\psi}(f)\in\mathcal{P}_{n-1}$ такий, що

$$\left\| f - P_{n,\psi}(f)\right\|_{A_s}\ \leq\ C_2 n^{1/p-1/s}|\psi_n|, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{19}$$

де C_2 — стала в (7).

Візьмемо в якості $P_{n,\psi}$ многочлен вигляду

$$P_{n,\psi}(f)(z)\ =\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\overline{\mu_{2n-k}}}{\mu_k}e^{2i\arg\psi_n}\right)\hat{f}_k z^k.$$

Використовуючи формулу Коші, подібно до того, як це зроблено в доведенні леми, переконуємось у тому, що для будь-яких $\varrho\in(0,1)$ і $\theta\in[0,2\pi]$

$$f(\varrho^2e^{i\theta}) - P_{n,\psi}(f)(\varrho^2e^{i\theta})\ =$$

$$=\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^\psi(\varrho e^{i(\theta+t)})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\psi_{2n-k}}\,e^{2i\arg\psi_n}\varrho^k e^{-ikt}\ +\ \sum_{k=n}^{\infty}\psi_n\varrho^k e^{-ikt}\ +\right.$$

$$\left.+\ e^{i2(\arg\psi_n-nt)}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\overline{\psi_k}\,\varrho^k e^{ikt}\right)dt\ =$$

$$=\ \frac{\psi_n\varrho^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^\psi(\varrho e^{i(\theta+t)})e^{-int}\left(2\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_{k+n}}{\psi_n}\varrho^k e^{ikt}\ -\ 1\right)dt. \tag{20}$$

Покажемо, що за умов теореми ядро в останньому інтегралі є невід'ємним, іншими словами, доведемо імплікацію

$$D\psi\in\bigcap_{n\geq n_0}\mathcal{R}_n \quad\Rightarrow\quad \psi\in\bigcap_{n\geq n_0}\mathcal{R}_n\,.$$

Для цього зафіксуємо натуральне $n\geq n_0$ і розглянемо функції

$$h_n(z)\ :=\ 1\ +\ 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+n+1}{n+1}\,\frac{\psi_{k+n}}{\psi_n}z^k,$$

$$H_n(z)\ :=\ 1\ +\ 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{k+n}}{\psi_n}z^k.$$

Зрозуміло, що функції h_n і H_n є голоморфними в крузі $\mathbb{D}$. Тому для будь-якого $\varrho\in[0,1)$ справджується формула

$$H_n(\varrho^2e^{i\theta})\ =\ \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(\varrho e^{it})K_n(\varrho,\theta-t)\,dt, \tag{21}$$

в якій

$$K_n(\varrho,\theta) \;:=\; \frac{1}{n+1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho^k}{k+n+1}\cos k\theta.$$

З формули (21) маємо рівність

$$\operatorname{Re} H_n(\varrho^2 e^{i\theta}) \;=\; \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h_n(\varrho e^{it}) K_n(\varrho, \theta - t)\,dt,$$

з якої внаслідок того, що $\operatorname{Re} h_n(\varrho e^{i\theta}) \ge 0$ за умовою, а $K_n(\varrho, e^{i\theta}) \ge 0$ згідно з (11), де взято $\psi_k = 1/(k+1)^2$, випливає, що і $\operatorname{Re} H_n(\varrho^2 e^{i\theta}) \ge 0$ для будь-яких $\varrho \in [0,1)$ і $\theta \in [0, 2\pi]$, тобто $\psi \in \mathcal{R}_n$.

На підставі викладеного з рівності (20) за інтегральною нерівністю Мінковського одержуємо співвідношення

$$M_s(f - P_{n,\psi}(f))(\varrho^2) \;\le\; |\psi_n|\varrho^n M_s(f^{\psi})(\varrho)$$

і тим паче

$$4M_s^s(f - P_{n,\psi}(f))(\varrho^2)\varrho^3 \;\le\; 2^{s+2}|\psi_n|^s M_s^s(f^{\psi})(\varrho)\varrho^{sn+1}.$$

Права частина останньої нерівності така сама, як і права частина нерівності (18). Таким чином, згідно зі співвідношеннями, встановленими для величини $\left\| f - Q_{n,\psi}(f)\right\|_{A_s}$, отримуємо (19).

Перейдемо до другої частини доведення теореми 1. Нехай $L_s(\mathbb{D})$ і $L_s(\mathbb{T})$ — простори Лебега функцій, визначених і сумовних в степені s відносно мір ν та σ відповідно в $\mathbb{D}$ і на $\mathbb{T}$ з нормами $\|f\|_{L_s(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^s d\nu\right)^{1/s}$ і $\|f\|_{L_s(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^s d\sigma\right)^{1/s}$.

Згідно зі співвідношеннями двоїстості [14] (гл. 1) для довільної функції $f \in X$, де X позначає один із просторів $L_s(\mathbb{D})$ або $L_s(\mathbb{T})$, справджується рівність

$$E_n(f)_X \;=\; \sup\left\{ |\langle f, g\rangle_X| : g \in X_n^{\perp},\ \|g\|_{X^*} \le 1\right\} \tag{22}$$

в якій X^* — простір, спряжений до X,

$$\langle f, g\rangle_X \;=\; \begin{cases} \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\,d\sigma, & \text{якщо} \quad X = L_s(\mathbb{T}), \\ \int_{\mathbb{D}} f\bar{g}\,d\nu, & \text{якщо} \quad X = L_s(\mathbb{D}), \end{cases}$$

і $X_n^{\perp} := \left\{ g \in X^* : \langle P, g\rangle_X = 0 \ \ \forall P \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$.

Очевидно, що права частина (22) не менша за величину $\langle f, g\rangle_X$, де g — будь-яка функція з $X_n^{\perp}$. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$E_n(A_p^{\psi}, X) \;\ge\; E_n(f_*)_X \;\ge\; |\langle f_*, g_*\rangle_X|, \tag{23}$$

в якій функції f_* та g_* мають вигляд $f_*(z) = A_X z^n$, $g_*(z) = B_X z^n$, де сталі A_X і B_X підібрано так, щоб $\left\| f_*^{\psi}\right\|_{A_p} \le 1$ і $\|g_*\|_X \le 1$.

Для $X = L_s(\mathbb{T})$ покладемо

$$A_X \;=\; \frac{\min(p,q)}{2}\,\frac{(n+1)\psi_n}{(qn/2+1)^{1/q}} \quad \text{і} \quad B_X = 1.$$

Неважко переконатися в тому, що $\|g_*\|_{L_s(\mathbb{T})} = 1$ і

$$\| f_*^\psi \|_{A_p} = \frac{\min(p,q)}{2} \frac{n+1}{(qn/2+1)^{1/q}(pn/2+1)^{1/p}} \leq 1.$$

Отже, згідно з (23)

$$E_n(A_p^\psi, H_s) \geq E_n(f_*)_{H_s} \geq \frac{\min(p,q)}{2} \frac{(n+1)|\psi_n|}{(qn/2+1)^{1/q}},$$

що й доводить нижню оцінку в (6).

Якщо ж $X = L_s(\mathbb{D})$, то покладемо

$$A_X = \left(\frac{p}{2}n+1\right)^{1/p} \psi_n \quad \text{і} \quad B_X = \left(\frac{s'}{2}n+1\right)^{1/s'}, \qquad 1/s+1/s' = 1.$$

Тоді $\| f_*^\psi \|_{A_p} = \| g_* \|_{L_s(\mathbb{D})} = 1$, а співвідношення (23) набирає вигляду

$$E_n(A_p^\psi, A_s) \geq E_n(f_*)_{A_s} \geq \left(\frac{p}{2}n+1\right)^{1/p} \left(\frac{s'}{2}n+1\right)^{1/s'} \frac{|\psi_n|}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} \left(\frac{s'}{2}\right)^{1/s'} \frac{1}{2} n^{1/p+1/s'-1} |\psi_n|.$$

Цим доведено нижню оцінку в (7) і завершено доведення теореми 1.

1. *Степанец А. И., Савчук В. В.* Приближения интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 5. – С. 706 – 740.
2. *Бабенко К. И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
3. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183 – 189.
4. *Scheick J. T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238 – 1243.
5. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 155 – 162.
6. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – **5**. – С. 37 – 54.
7. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 295.
8. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 62 – 73.
9. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и точные оценки n-поперечников классов аналитических функций // Доп. НАН України. – 1994. – № 6. – С. 15 – 20.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
11. *Гаврилюк В. Т., Степанец А. И.* Вопросы насыщения линейных методов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 291 – 308.
12. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2-х ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.
13. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birkhäuser, 1971. – 553 p.
14. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Одержано 14.03.07