УДК 517.5

О. А. Очаковская (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

МАЖОРАНТЫ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ

We prove the existence of nontrivial functions in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with vanishing integrals over balls of fixed radius and given majoranta of growth.

Доведено існування ненульових функцій у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з нульовими інтегралами по кулях фіксованого радіуса та заданою мажорантою росту.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Предположим, что $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого фиксированного $r > 0$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int\limits_{|x| \leq r} f(x+y)\,dx = 0. \tag{1}$$

Пусть также для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq F(x), \tag{2}$$

где F — заданная положительная функция на $\mathbb{R}^n$. Для каких F из условий (1), (2) следует, что f — нулевая функция?

Отметим, что класс функций, удовлетворяющих условию (1), достаточно широк. Полное его описание получено в [1] (см. также [2]). Поставленный выше вопрос изучался ранее многими авторами (см., например, работу [1] и приведенную в ней библиографию). В частности, Д. Смит установил [3], что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяет (1) и

$$F(x) = o\left(|x|^{(1-n)/2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty, \tag{3}$$

то $f = 0$. Этот результат становится неверным, если условие (3) заменить условием

$$F(x) = O\left(|x|^{(1-n)/2}\right) \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty.$$

Известен также ряд аналогичных результатов, в которых вместо условия (2) рассматриваются оценки сверху для различных интегральных средних функции f [4 – 8]. По поводу аналогичных задач для других классов функций (в частности, решений уравнения свертки) см. [1]. В работах [9, 10] рассматривалась подобная задача для функций, заданных на полупространстве.

Характерной особенностью условия (3) является его инвариантность относительно группы вращений $\mathbb{R}^n$. Это означает, что f должна убывать с полиномиальной скоростью вдоль любого направления. Из результатов работы [10] следует, что условие (3) можно заменить условием

$$F(x) = \exp\left(-\alpha \frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\ln(2 + |x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \beta |x_n|\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где α, β — произвольные положительные постоянные. Таким образом, если даже допустить экспоненциальный рост f вдоль переменной x_n, то вследствие достаточно быстрого убывания вдоль $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и условия (1) получаем $f = 0$. В данной работе доказано существование ненулевых функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих (1) и (2), причем функция F имеет вид

$$F(x) = \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right).$$

Здесь $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, а в качестве функции κ можно взять любую непрерывную положительную и возрастающую на $[0, +\infty)$ функцию, удовлетворяющую условию

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\kappa(t)} < +\infty. \tag{4}$$

Отметим также, что различные свойства функций с нулевыми интегралами по другим подмножествам $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [11 – 15].

1. Формулировка основного результата. Переходя к формулировке основного результата данной работы, напомним, что всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и $r > 0$ фиксировано.

Теорема. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой положительной возрастающей функции* $\kappa \in C[0, +\infty)$, *удовлетворяющей* (4), *существует ненулевая функция* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющая* (1) *при всех* $y \in \mathbb{R}^n$, *для которой выполнено неравенство*

$$|f(x)| \leq \exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right) \tag{5}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Доказательство основного результата. Прежде всего отметим, что сформулированную теорему достаточно доказать для случая $r = 1$. Общий случай будет следовать отсюда с помощью простой замены переменных в интеграле (1). Пусть $t \in \mathbb{R}^1$, $\nu > 0$ и $J_{n/2}(\nu) = 0$ (здесь и далее используется стандартное обозначение для функции Бесселя J_k первого рода с индексом k). Рассмотрим функцию

$$g(x) = I_{(n-3)/2}\left(t\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}\right) ch\left(\sqrt{t^2 - \nu^2}\, x_n\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$I_{(n-3)/2}(z) = I_{(n-3)/2}(z)\, z^{(3-n)/2}.$$

Используя формулы для дифференцирования функции Бесселя [16] (формулы (6.1), (6.2)), получаем, что g удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta g + \nu^2 g = 0$. По теореме о средних для решений уравнения Гельмгольца (см. [2], § 4) имеем

$$\int_{|x-y|\leq 1} g(x)dx = (2\pi)^{n/2} I_{n/2}(\nu) g(y) = 0 \tag{6}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — ненулевая неотрицательная функция с носителем на отрезке $[a, b] \subset (\nu, +\infty)$. Умножая равенство (6) на $\varphi(t)$ и интегрируя по $[a, b]$, находим

$$\int\limits_{|x-y|\le 1} f(x)\,dx = 0$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$, где

$$f(x) = \int\limits_a^b I_{(n-3)/2}\left(t\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}\right)\operatorname{ch}\left(\sqrt{t^2-\nu^2}\,x_n\right)\varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

Таким образом, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет (1) при $r = 1$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$. Из (7) следует, что $f(0) > 0$. Кроме того, при $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \le 1$ имеем

$$|f(x)| \le e^{\sqrt{b^2-\nu^2}\,|x_n|}\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt \max_{0\le t\le b}\left|I_{(n-3)/2}(t)\right|. \tag{8}$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ и $\kappa \in C[0, +\infty)$ — положительная возрастающая функция, удовлетворяющая (4). Пусть также $\zeta > 0$ и

$$b > a > \zeta, \qquad (\nu+b+\zeta)(b-\nu+\zeta) < \varepsilon^2. \tag{9}$$

Докажем, что функцию φ можно выбрать так, чтобы f удовлетворяла условию (5). Из свойств функции κ следует, что

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\,\kappa(k)} < +\infty.$$

Тогда существует последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\eta_k < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{\eta_k}{k\,\kappa(k)} < +\infty, \tag{10}$$

и последовательность $\eta_k/(k\,\kappa(k))$ убывает.

Положим

$$\mu_k = \left(\frac{\eta_k}{k\,\kappa(k)}\right)^{-k}, \qquad E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \ge \alpha\right\}, \qquad \alpha \ge 0. \tag{11}$$

Из (10), (11) и [17] (теорема 1.3.8) вытекает, что существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[a, b]$ такая, что

$$\left\|\varphi_0^{(j)}\right\|_{C_{[a,b]}} \le \mu_j \tag{12}$$

при всех $j \in \mathbb{N}$.

Положим

$$f_0(x) = \int\limits_a^b I_{(n-3)/2}\left(t\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}\right)u_0(t, x_n)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

где $u_0(t, x_n) = ch\left(\sqrt{t^2-\nu^2}\,x_n\right)\varphi_0(t)$. Применив формулу (7.3) из [16], при $n =$ $= 2$ равенство (13) можно переписать в виде

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int_a^b e^{itx_1}u_0(t, x_2)\,dt. \tag{14}$$

При $n \geq 3$ из интегрального представления Пуассона (см. [16], формулу (14.6)) и (13) следует

$$f_0(x_1, x_2) = \lambda_n\left(\int_{-1}^{-1/2} + \int_{1/2}^{1}\right)(1-\xi^2)^{(n-4)/2}\left(\int_a^b e^{it\rho\xi}u_0(t, x_n)\,dt\right)d\xi -$$

$$- \lambda_n\int_\gamma (1-z^2)^{(n-4)/2}\left(\int_a^b e^{it\rho z}u_0(t, x_n)\,dt\right)dz. \tag{15}$$

Здесь

$$\lambda_n = 2^{(3-n)/2}\left(\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^{-1}, \qquad \rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2},$$

γ — полуокружность радиуса $1/2$ с центром в нуле, лежащая в верхней полуплоскости; интегрирование вдоль γ ведется против часовой стрелки. Интегрируя в (14), (15) по частям и используя (11), (12) и (9), при $\rho \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$ получаем

$$|f_0(x)| \leq e^{\varepsilon|x_n|}\mu_{q+n+1}\left(\frac{c_1}{\rho}\right)^{q+n+1}, \tag{16}$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от x и q. Далее, оценки (8) и (9) показывают, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\rho < 1$, выполнено неравенство

$$|f_0(x)| \leq c_2 e^{\varepsilon|x_n|}, \tag{17}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от x. Пусть $\alpha > 1$ такое, что

$$\kappa(q+n+1) \leq \kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)$$

для всех $x \in E_\alpha$. В неравенстве (16) положим

$$q+n+1 = \left[\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)}\right],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Используя (10) и (11), из оценок (16) и (17) выводим, что

$$|f_0(x)| \leq c_3\exp\left(-\frac{|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|}{\kappa(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, где $c_3 > 0$ не зависит от x. Тогда функция $f(x) = f_0(x)/c_3$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

1. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Kluwer Acad. Publ., 2003. – 454 p.
2. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 15 – 34.
3. *Smith I. D.* Harmonic analysis of scalar and vector field in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1972. – **72**. – P. 403 – 416.

4. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 159 с.
5. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. – 1994. – **63**. – P. 255 – 286.
6. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 9. – С. 13 – 30.
7. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric space // Contemp. Math. – 1987. – **63**. – P. 267 – 277.
8. *Волчков В. В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 9. – С. 17 – 38.
9. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве // Докл. РАН. – 2001. – **381**, № 6. – С. 745 – 747.
10. *Очаковская О. А.* О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 493 – 501.
11. *Волчков В. В.* О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 6. – С. 859 – 863.
12. *Волчков В. В.* О проблеме Помпейю и некоторых ее обобщениях // Там же. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1444 – 1448.
13. *Волчков В. В.* Сферические средние на евклидовых пространствах // Там же. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1310 – 1315.
14. *Силенко В. Е.* Новые теоремы типа Мореры в единичном круге // Там же. – 2001. – **53**, № 2. – С. 278 – 281.
15. *Волчкова Н. П.* Об обращении локального преобразования Помпейю // Там же. – 2003. – **55**, № 7. – С. 875 – 880.
16. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
17. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т.1. – 464 с.

Получено 25.09.06,
после доработки — 10.04.07