УДК 517.51

В. М. Миклюков (Волгоград. ун-т, Россия)

КУСОЧНО-ГЛАДКАЯ⁺ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ

A class of piecewise smooth$^+$ mappings is introduced and the implicit function theorem is proved for mappings from this class. The proof is based on the theorem on global homeomorphism dating back to the well-known Chernavskii theorem.

Введено клас кусково-гладких$^+$ відображень, і для відображень цього класу доведено теорему про неявні функції. Доведення грунтується на теоремі про глобальний гомеоморфізм, що походить з відомої теореми А. В. Чернавського.

Излагаемые в настоящей статье результаты связаны с важным подклассом класса негладких отображений — кусочно-гладкими отображениями. Рассматривается задача, возникающая как важнейшая составная часть общей проблемы поиска эффективных методов триангуляции областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (см., например, [1 – 3], где исследуются близкие вопросы с точки зрения применений в вычислительных алгоритмах). При изложении будем следовать работе [4, с. 123 – 135]. Относительно обобщений теоремы о неявных функциях на негладкий случай см., например, [5 – 8].

1. Кусочно-гладкие⁺ отображения. В работе описываются основные связи указанной проблемы с кусочно-гладкими отображениями и обсуждаются возникающие при этом вопросы. Заметим, что область $D \subset \mathbb{R}^n$ однозначно определена, если заданы ее граница ∂D и хотя бы одна внутренняя точка. Среди возможных способов задания поверхности ∂D различают геометрический и аналитический способы. Аналитический способ предполагает задание в явном либо в неявном виде параметрического представления $(n-1)$-мерной поверхности ∂D. В случае односвязной области D это параметрическое представление может осуществляться, например, посредством отображения $\varphi\colon S \to \partial D$, где S — граница n-мерного шара либо n-мерного куба в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что если известно гомеоморфное отображение куба (шара) на область, то, выполняя сколь угодно мелкие разбиения куба (шара), мы автоматически получаем и соответствующие разбиения области.

Опишем требования к кусочно-гладкому отображению. Предположим, что одномерная кусочно-гладкая дуга l в $\mathbb{R}^n$ задана в параметрическом виде посредством вектор-функции

$$y = f(x)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1,$$

принадлежащей классу C^1 всюду на отрезке $[0,1]$, за исключением некоторого конечного числа *особых* точек

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N < 1.$$

Точки дуги, не являющиеся особыми, называются *регулярными*.

В каждой из особых точек a_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, предполагается существование конечных односторонних пределов

$$\lim_{x \to a_i \pm 0} f'(x).$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких дуг. *Кусочно-гладкое*$^{+}$ отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, определяем следующим образом. Предположим, что область D разбита на конечное число односвязных (открытых) областей D_s, $s = 1, \ldots, N$, системой кусочно-гладких жордановых дуг $l_1, \ldots, l_M$. Предположим также, что в каждой из областей D_k отображение f принадлежит классу C^1 и продолжимо по непрерывности на замыкания $\overline{D}^k$ так, что $f \in C^1$ всюду в замкнутых областях $\overline{D}^k$, за исключением описанных выше особых точек на граничных дугах $l_1, \ldots, l_M$.

Кусочно-гладкие$^{+}$ отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, где $p \geq 3$ и $n \geq 1$, определяются индуктивно.

Изучим сначала двумерный случай. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, принадлежащее классу C^1 на каждой из подобластей D_s, $s = 1, \ldots$ $\ldots, N$. Пусть $a \in l_i$ — регулярная точка, лежащая одновременно на границах односвязных подобластей $D_{s'}$, $D_{s''}$, $1 \leq s'$, $s'' \leq N$. Для краткости будем обозначать эти подобласти через D^- и D^+ соответственно.

Предположим, что каждое из C^1-сужений $f|_{D^{\pm}}$ в точке a может быть продолжено гладким образом на подходящую окрестность $U_a^{\pm} \subset D$ этой точки до C^1-отображения $f^{\pm}\colon U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^2$. Пусть $J(a, f^{\pm})$ — их якобианы.

Нашей ближайшей целью является изучение вопроса: можно ли с помощью величин $J(a, f^{\pm})$ указать признак локальной гомеоморфности (основного) кусочно-гладкого$^{+}$ отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Имеем

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{B(a,r)} J\left(x, f^{\pm}\right) dx_1\, dx_2 = J\left(a, f^{\pm}\right),$$

где $B(x, r)$ — круг радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^2$.

Отсюда, обозначая через $|E|$ площадь множества $E \subset \mathbb{R}^2$, находим

$$\lim_{r \to 0} \frac{\left|f^{\pm}(B(a,r))\right|}{\pi r^2} = J\left(a, f^{\pm}\right).$$

Поскольку $a \in l_i$ — регулярная точка, дуга l_i имеет в ней касательную, а потому

$$\lim_{r \to 0} \frac{\left|B(a,r) \cap U_a^{\pm}\right|}{\pi r^2} = \frac{1}{2}.$$

Функции $f^{\pm}(x)$ имеют в точке a полные дифференциалы, т. е.

$$f^{\pm}(x) = f^{\pm}(a) + \left(f^{\pm}\right)'(a)(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to a$.

Так как

$$\det\left(f^{\pm}\right)'(a) = J\left(a, f^{\pm}\right),$$

как нетрудно видеть,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\left|f^{\pm}(B(a,r)) \cap U_a^{\pm}\right|}{\pi r^2} = \frac{1}{2} J\left(a, f^{\pm}\right). \tag{2}$$

Имеем

$$f(B(a,r)) = f\left(B(a,r) \cap \left(U_a^+ \cup U_a^-\right)\right) = f\left(B(a,r) \cap U_a^+\right) \cup f\left(B(a,r) \cap U_a^-\right) =$$

$$= f^+\left(B(a,r) \cap U_a^+\right) \cup f^-\left(B(a,r) \cap U_a^+\right).$$

Тем самым в силу (2) приходим к соотношению

$$\lim_{r \to 0} \frac{|f(B(a,r))|}{\pi r^2} = \frac{1}{2} J\left(a, f^+\right) + \frac{1}{2} J\left(a, f^-\right).$$

В многомерном случае рассуждения практически не меняются и справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кусочно-гладкое*$^+$ *отображение,* $a \in l_i$ — *регулярная точка. Если* f *является* C^1*-продолжимым на полуокрестности* $U_a^\pm$ *так, что* $J\left(x, f^\pm\right) > 0$ *в* $U_a^\pm$, *то*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\left|f\left(B^n(a,r)\right)\right|}{r^n \left|B^n(0,1)\right|} = \frac{1}{2} J\left(a, f^+\right) + \frac{1}{2} J\left(a, f^-\right), \tag{3}$$

где $B^n(x,r)$ — *n-мерный шар радиуса* $r > 0$ *с центром в* x.

Покажем, что при указанных предположениях условие

$$J\left(a, f^\pm\right) > 0$$

влечет локальную гомеоморфность кусочно-гладкого$^+$ *отображения* $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ *в регулярной точке* $a \in l_i$.

Поскольку отображения $f^\pm$ совпадают вдоль l_i в окрестности точки a, из (1) следует существование постоянных $\theta \in [0, \pi]$, $p^\pm \geq 1$ таких, что в областях $U_a^\pm$ отображения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta + \varepsilon_1^\pm(x)|x-a|, \\ y_2 &= p^\pm(-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) + \varepsilon_2^\pm(x)|x-a|, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varepsilon_i^\pm(x) \to 0$, $i = 1, 2$, при $x \to a$.

Если окрестность U_a точки a достаточно мала и каждое из C^1-отображений $f^\pm$ имеет ненулевой якобиан в a, то можно считать, что сужения $f^\pm$ на $U_a^\pm$ гомеоморфны. Это означает, что любая, достаточно близкая к $f(a)$, точка $y \in f(U_a)$ может иметь не более одного прообраза в каждой из полуокрестностей $U_a^\pm$. С другой стороны, в силу представлений (4) прообразы такой точки не могут лежать в разных $U_a^\pm$. Отсюда следует, что f взаимно однозначно в окрестности точки $a \in l_i$.

Рассуждения в случае $n > 2$ аналогичны и, тем самым, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кусочно-гладкое*$^+$ *отображение,* $a \in l_i$ — *регулярная точка. Если* f *является* C^1*-продолжимым на полуокрестности* $U_a^\pm$ *так, что* $J\left(x, f^\pm\right) > 0$ *в* $U_a^\pm$, *то* f *гомеоморфно в окрестности точки* a.

Заметим, что условие C^1-продолжимости f локально через поверхности l_i, $i = 1, \ldots, M$, как правило, выполняется на практике автоматически. Отображения, не имеющие таких свойств, вообще говоря, являются математическими абстракциями и встречаются исключительно редко.

Теория неоднолистных отображений с точки зрения их топологического строения к настоящему времени весьма развита (см., например, [9 – 14]).

2. Две базовые теоремы. Нам потребуется теорема о глобальном гомеоморфизме, непосредственно вытекающая (см. [4]) из известной теоремы Чернавского [10]. Приведем ее здесь, предварительно уточнив используемую терминологию. Именно, *замкнутой областью* $U \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутое множество, имеющее связную внутренность $\operatorname{int} U$ и совпадающее с замыканием своей внутренности $U = \overline{\operatorname{int} U}$. *Компактная область* есть ограниченная замкнутая область.

Теорема 3. *Пусть $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-гладкое$^+$ отображение компактной области $D \subset \mathbb{R}^n$, имеющее конечное число особых точек и положительный якобиан в каждой точке гладкости. Предположим, что f продолжимо до C^1-отображений $f^{\pm}\colon U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ на полуокрестности $U_a^{\pm}$ регулярных точек $a \in D$ так, что $J(x, f^{\pm}) > 0$* в *$U_a^{\pm}$. Если при этом выполнено*:

α) $f(\partial D) \bigcap f(\operatorname{int} D) = \varnothing$,

β) $f(\Gamma) \bigcap f(D \setminus \Gamma) = \varnothing$, где Γ — *открытая порция границы, причем*

γ) $f\,|_{\Gamma}$ — *гомеоморфизм*,

то $f\,|_{\operatorname{int} D}$ является глобальным гомеоморфизмом.

Заметим, что алгоритм проверки взаимной однозначности кусочно-гладкого$^+$ отображения (за исключением проверки гомеоморфности отображения f на границе Γ) включает лишь шаги, сводящиеся к вычислению якобиана в области D и на поверхностях l_i, что свидетельствует об его эффективности.

Нам потребуется также принцип сохранения области для кусочно-гладких$^+$ отображений [4].

Теорема 4. *Пусть $y = f(x)\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-гладкое$^+$ отображение с положительным якобианом в точках гладкости, имеющее конечное число особых точек. Предположим, что f продолжимо до C^1-отображений $f^{\pm}\colon U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ на полуокрестности $U_a^{\pm}$ регулярных точек a так, что $J(x, f^{\pm}) > 0$ в $U_a^{\pm}$.*

Тогда для любой подобласти $U \subset D$ ее образ $f(U)$ также является областью.

3. Основная теорема. Пусть $m, n \geq 1$ — целые и $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченные области. Пусть $F(x, y)$ — произвольная кусочно-гладкая$^+$ функция в $D = U \times V$. Если (x, y) — точка, в которой существуют частные производные

$$\partial F / \partial x_i, \qquad \partial F / \partial y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

то пусть, как и выше, $F'(x, y)$ — ее матрица Якоби, $F_x'(x, y)$ — матрица Якоби по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированных $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и $F_y'(x, y)$ — матрица Якоби относительно переменных y при фиксированных x.

Рассмотрим отображение $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$, определяемое как

$$(x, y) \xrightarrow{\ \Phi\ } (X, Y) \ = \ \big(x_1, \ldots, x_n, F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y)\big). \tag{5}$$

Теорема 3 о глобальном гомеоморфизме влечет следующую версию теоремы о неявной функции.

Теорема 5. *Пусть* $F(x, y)$ — *произвольная кусочно-гладкая*$^+$ *в области* $D = U \times V$ *и непрерывная в* $\overline{D}$ *функция, имеющая конечное число особых точек. Предположим, что определитель* $\det F'_x(x, y)$ *положителен в точках гладкости* F *и* F *продолжима до* C^1 *-вектор-функции* $F^{\pm}\colon U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ *на полуокрестности* $U_a^{\pm}$ *регулярных точек* $a \in U$ *так, что* $\det F'_x(a, y) > 0$ *в* $U_a^{\pm}$ *при любом* $y \in V$.

Предположим, что вектор-функция Φ, *определенная равенством* (5), *удовлетворяет условиям* α), β), γ) *теоремы* 3. *Тогда вектор-функция* Φ: $D \to \mathbb{R}^{n+m}$ *осуществляет глобальный гомеоморфизм и для каждой точки* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *найдутся подобласть* $U' \subset U$ *и единственное кусочно-гладкое*$^+$ *отображение*

$$G(x)\colon\ U' \subset U \to V, \quad G(x_0) = y_0,$$

такое, что

$$F(x, G(x)) = F(x_0, y_0) \quad \text{при всех} \quad x \in U'.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что точки гладкости F суть точки гладкости Φ, а точки регулярности F суть точки регулярности Φ. При этом матрица Якоби отображения Φ имеет вид

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} I_n & Z_m^n \\ F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная $(n \times n)$-матрица и Z_m^n — нулевая $(n \times m)$-матрица.

В каждой точке гладкости $(x, y) \in D$ имеем

$$\det \Phi'(x, y) = \det F'_y(x, y). \tag{6}$$

Вектор-функция Φ удовлетворяет условиям α), β), γ) теоремы 3 и в соответствии с этой теоремой осуществляет глобально гомеоморфное отображение.

Поскольку отображение Φ является кусочно-гладким$^+$ и имеет положительный якобиан всюду, за исключением особых точек, обратное отображение Φ^{-1} также является кусочно-гладким$^+$. Доказательство практически совпадает с доказательством соответствующего утверждения в случае вектор-функций класса C^1 (см., например, [5], теорему 4.7.1).

Отображение Φ было определено таким образом, что обратное к нему отображение Φ^{-1} имеет вид

$$x = X \quad \text{и} \quad y = \Theta(X, Y).$$

Имеем

$$(X, Y) = \Phi \circ \Phi^{-1}(X, Y) = (X, F(X, \Theta(X, Y)))$$

и потому

$$F(X, \Theta(X, Y)) = Y. \tag{7}$$

Пересечение Π области $\Phi(D)$ с плоскостью

$$Y_1 = F_1(x_0, y_0), \ldots, \qquad Y_m = F_m(x_0, y_0)$$

имеет коразмерность m и содержит точку $(X_0, Y_0) = (x_0, F(x_0, y_0))$. Обозначим через j ортогональную проекцию пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^n$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ имеем

$$j(A) = \bigcup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A \right\}.$$

В силу определения вектор-функции Φ можем записать

$$j(\Phi(A')) = \Phi(j(A')) \quad \forall\, A' \subset D,$$

$$j\left(\Phi^{-1}(A'')\right) = \Phi^{-1}(j(A'')) \quad \forall\, A'' \subset \Phi(D).$$

Уравнение компоненты связности поверхности $\Phi^{-1}(\Pi)$, содержащей точку (x_0, y_0), может быть переписано в непараметрическом виде. Именно, пусть

$$(X, Y) = (x, \Theta(x, Y_0)), \quad x \in \Phi^{-1}(j(B')).$$

Введем обозначение $G(x) = \Theta(x, Y_0)$. Используя соотношение (7), находим

$$F(x, G(x)) = Y_0 = F(x_0, y_0)$$

и

$$G(x_0) = \Theta(x_0, Y_0) = \Theta(X_0, Y_0) = y_0.$$

Единственность отображения G вытекает из взаимной однозначности отображения (5). Действительно, предположим, что

$$(x, y_1), (x, y_2) \in D \quad \text{и} \quad F(x, y_1) = F(x, y_2).$$

Тогда $\Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_2)$. Таким образом, $y_1 = y_2$.

Теорема доказана.

4. Примеры. Приведем два примера, поясняющих возможности для отображений вида (5) удовлетворять условиям α), β) и γ).

***Пример* 1.** Пусть $U = (a', a'') \subset \mathbb{R}^1$, $U = (b', b'') \subset \mathbb{R}^1$ и $F(x, y)$ — произвольная кусочно-гладкая$^+$ в прямоугольнике $D = U \times V$ и непрерывная в $\overline{D}$ функция, имеющая конечное число особых точек. Предположим, что производная $F'_x(x, y)$ положительна в точках гладкости F и F продолжима до C^1-функции $F^{\pm} : U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^1$ на полуокрестности $U_a^{\pm}$ регулярных точек $a \in U$ так, что $F'_x(a, y) > 0$ в $U_a^{\pm}$ при любом $y \in V$.

Предположим, что

$$F(a', y_1) \neq F(a', y_2) \quad \text{при всех} \quad y_1 \neq y_2 \tag{8}$$

и при всех $x \in (a', a'')$, $y \in (b', b'')$ выполнено

$$\min\{F(x, b'), F(x, b'')\} < F(x, y) < \max\{F(x, b'), F(x, b'')\}. \tag{9}$$

Обозначим через Γ отрезок $[b', b'']$ на стороне $x = a'$ прямоугольника $\overline{D}$. В силу (8) отображение Φ удовлетворяет условию γ).

Требование β) на отображение Φ выполняется автоматически в силу специального его вида $\Phi = (x, F(x, y))$.

В силу (6) и теоремы 4 отображение Φ имеет свойства, описываемые принципом сохранения области. Тем самым для выполнения условия α) достаточно выполнения (9).

***Пример* 2.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченные области, $F(x, y)$ — произвольная кусочно-гладкая$^+$ в области $D = U \times V$ и непрерывная в $\overline{D}$ функция, имеющая конечное число особых точек. Предположим, что определитель $\det F'_x(x, y)$ положителен в точках гладкости F и F продолжима до C^1-вектор-функции $F^{\pm} : U_a^{\pm} \to \mathbb{R}^n$ на полуокрестности $U_a^{\pm}$ регулярных точек

$a \in U$ так, что $\det F_x'(a, y) > 0$ в $U_a^{\pm}$ при любом $y \in V$.

Выберем в качестве Γ область V в плоскости

$$x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Предположим, что

$$F(0, y') \neq F(0, y'') \quad \text{при} \quad y' \neq y''$$

и при любом $x \in U$ отображение $F(x, y)\colon V \to \mathbb{R}^m$ преобразует границу ∂V в границу $\partial F(x, V)$.

Данные требования влекут выполнение условий α) и γ). Условие β) выполняется автоматически в силу специального вида вектор-функции Φ.

1. *Бобылев Н. А., Иваненко С. А., Исмаилов И. Г.* Несколько замечаний о гомеоморфных отображениях // Мат. заметки. – 1996. – **60**, вып. 4. – С. 593 – 596.
2. *Бобылев Н. А., Иваненко С. А., Казунин А. В.* О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2003. – **43**, № 6. – С. 808 – 817.
3. *Прохорова М. Ф.* Некоторые критерии гомеоморфности // Алгебра и топология: Тр. XXXVIII мол. шк.-конф. – Екатеринбург, 2007. – С. 65 – 69.
4. *Миклюков В. М.* Эффективные методы проверки взаимной однозначности кусочно-гладкого отображения // Зап. сем. „Сверхмедленные процессы". – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2007. – Вып. 2. – С. 123 – 135.
5. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
6. *Журавлев И. В., Игумнов А. Ю.* О неявных функциях // Тр. каф. мат. анализа и теории функций Волгоград. ун-та. – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2002. – С. 41 – 46.
7. *Krantz S. G., Parks H. R.* The implicit function theorem. History, theory, and applications. – New York: Springer, 2002.
8. *Миклюков В. М.* Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2007. – 532 с.
9. *Чернавский А. В.* О конечнократных открытых отображениях многообразий // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 3. – С. 352 – 393.
10. *Чернавский А. В.* Дополнение к статье „О конечнократных открытых отображениях многообразий" // Там же. – 1965. – **66**, № 3. – С. 471 – 472.
11. *Кудрявцев Л. Д.* О вариации отображений областей // Метрические вопросы теории функций и отображений. – 1969. – Вып. 1. – С. 34 – 108.
12. *Трохимчук Ю. Ю.* Об открытых нульмерных отображениях многообразий // Там же. – С. 209 – 221.
13. *Трохимчук Ю. Ю., Бондарь А. В.* О локальной степени нульмерного отображения // Там же. – С. 221 – 241.
14. *Зелинский Ю. Б.* О непрерывных отображениях областей обобщенных многообразий // Там же. – 1973. – Вып. 4. – С. 79 – 91.

Получено 29.01.08