УДК 517.928.7+517.983.28

*А. Г. Баскаков*

# Замена Крылова — Боголюбова в теории возмущений линейных операторов

Основная цель статьи состоит в выяснении роли замены Крылова—Боголюбова [1] при изучении спектральных свойств возмущенных линейных операторов. В частности, показано, что придание абстрактного характера некоторым методам теории возмущений, используемых в небесной механике и нелинейной теории колебаний, приводит к методу Фридрихса подобных операторов (стационарным методам в теории рассеяния) [2—4].

В статье приняты следующие обозначения. Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ обозначаются соответственно множества комплексных, вещественных и целых чисел. Рассматриваемые банаховы пространства считаются комплексными. Через $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ обозначим совокупность замкнутых линейных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathscr{X}$; $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$ — банахова алгебра эндоморфизмов пространства $\mathscr{X}$ ($\|X\|_\infty$ — норма оператора $X$ в $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$). Символ $\sigma(T)$ обозначает спектр линейного оператора $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\rho(T)$— его резольвентное множество, $R(\lambda, T)=(\lambda I-T)^{-1}:\rho(T)\to\mathrm{End}\,\mathscr{X}$— резольвента оператора $T$, $\mathrm{Ran}\,T$ — множество значений оператора $T$ и $\mathrm{Ker}\,T=\{x\in D(T): :Tx=0\}$, где $D(T)$ — его область определения.

Символом $A$ обозначается оператор из $\mathscr{L}(\mathscr{X})$, играющий роль невозмущенного оператора. Через $\mathscr{L}_A(\mathscr{X})$ обозначим банахово пространство операторов из $\mathscr{L}(\mathscr{X})$, подчиненных $A$ (с $\|B\|_A=\{\inf\, c>0\colon \|Bx\|\leqslant c\,(\|x\|+ +\|Ax\|),\ x\in D(A)\}$). Рассматриваемые здесь задачи таковы, что без ограничения общности можно считать $D(B)=D(A)\ \forall B\in\mathscr{L}_A(\mathscr{X})$.

1. Определение 1. *Операторы $A_1, A_2\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $\mathcal{U}\in\mathrm{End}\,\mathscr{X}$ такой, что $\mathcal{U}D(A_2)=D(A_1)$ и $A_1\mathcal{U}x=\mathcal{U}A_2x\ \forall x\in D(A_2)$. Оператор $\mathcal{U}$ назовем оператором преобразования (оператора $A_1$ в $A_2$).*

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное многообразие операторов из $\mathscr{L}_A(\mathscr{X})$, являющееся банаховым пространством относительно некоторой (своей) нормы $\Gamma:(0,\varepsilon_0)\to\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$, $\varepsilon_0>0$, — некоторая операторозначная функция и $J:D(J)\subset\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ — линейный оператор. Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой метода усреднения для оператора $A$, а $\mathfrak{A}$ — допустимым пространством возмущений, если*

1) $\mathfrak{A}$ *непрерывно вложено в* $\mathscr{L}_A(\mathscr{X})$ (*т. е.* $\|X\|\leqslant\mathrm{const}\,\|X\|_A\ \forall X\in\mathfrak{A}$);

2) $\Gamma(\varepsilon)(X-JX)\in\mathrm{End}\,\mathscr{X}\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ \forall X\in D(J)$ *и существует функция* $\gamma:(0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}$ *такая, что* $\|\Gamma(\varepsilon)(X-JX)\|_\infty\leqslant\gamma(\varepsilon)\|X\|\ \forall X\in D(J)$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *и* $\sup\limits_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\varepsilon\gamma(\varepsilon)<\infty$;

3) $\Gamma(\varepsilon)(X-JX)D(A)\subset D(A)$, $L(\varepsilon)X=A\Gamma(\varepsilon)(X-JX)-\Gamma(\varepsilon)(X- -JX)A\in\mathfrak{A}\ \forall X\in D(J)\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|L(\varepsilon)X-X+JX\|=0\ \forall X\in D(J)$;

4) $X\Gamma(\varepsilon)(Y-JY)$, $[\Gamma(\varepsilon)(X-JX)]Y\in\mathfrak{A}\ \forall X, Y\in D(J)$ *и* $\max\{\|X\Gamma\times \times(\varepsilon)(Y-JY)\|, \|[\Gamma(\varepsilon)(X-JX)]Y\|\}\leqslant\gamma(\varepsilon)\|X\|\|Y\|\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$;

5) *выполнено одно из следующих условий*: а) $A\Gamma(\varepsilon)(X-JX)\in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ $\forall X\in D(J)$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$; б) $(\forall X\in D(J))(\forall\delta>0)$ $(\exists\lambda_\delta\in\rho(A))$ *такое, что* $\|(X-JX)R(\lambda_\delta, A)\|_\infty\leqslant\delta$.

Определение 3. *Символом* $\mathrm{Erg}\,\mathfrak{A}$ *обозначим линейное многообразие* $\{X\in D(J):\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\Gamma(\varepsilon)(X-JX)\|_\infty=0,\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon Y\Gamma(\varepsilon)(X-JX)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon[\Gamma\times\times(\varepsilon)(X-JX)]Y=0\ \ \forall Y\in\mathfrak{A}\}$.

Определение 4. *Допустимую тройку* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *метода усреднения для оператора* $A$ *назовем допустимой тройкой метода подобных операторов, если* $\Gamma(\varepsilon)=\Gamma(0)\in\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $D(J)=\mathfrak{A}$, $J\in\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ *и функция* $\gamma$ *из определения 2 постоянна, т. е.* $\gamma(\varepsilon)=\gamma$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *(ясно, что в этом случае* $\mathrm{Erg}\,\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$*). Символом* $\Gamma$ *обозначим оператор* $X\mapsto\Gamma\times\times(0)(X-JX):\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ *и в тройке* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *символ* $\Gamma$ *будет в дальнейшем обозначать именно этот оператор. Если дополнительно известно, что* $J$ *— проектор* ($J^2=J$), *то потребуем выполнения условия* 6) $\mathrm{Ker}\,\Gamma=\mathrm{Ran}\,J=\mathfrak{A}_0$, $\mathrm{Ran}\,\Gamma\subset\mathrm{End}\,\mathcal{X}\cap\mathrm{Ker}\,J$ *и* $(\Gamma X)(JY)$, $(JX)\Gamma Y\in\mathrm{Ker}\,J$ $\forall X, Y\in\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Пусть* $B\in\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ *и существует допустимая тройка* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *метода усреднения для* $A$ *такая, что* $B\in\mathrm{Erg}\,\mathfrak{A}$. *Тогда найдется* $\delta>0$ *такое, что операторы* $\mathcal{U}(\varepsilon)=I+\varepsilon\Gamma(\varepsilon)(B-JB)$, $0<\varepsilon\leqslant\delta$, *непрерывно обратимы, отображают* $D(A)$ *на* $D(A)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\mathcal{U}(\varepsilon)-I\|_\infty=0$ *и имеет место равенство*

$$A-\varepsilon B=\mathcal{U}(\varepsilon)(A-\varepsilon JB-\varepsilon B_1(\varepsilon))\,\mathcal{U}(\varepsilon)^{-1},\quad 0<\varepsilon\leqslant\delta, \tag{1}$$

*где* $B_1(\varepsilon)\in\mathfrak{A}$ *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}B_1(\varepsilon)=0$, *т. е. операторы* $A-\varepsilon B$ *и* $A-\varepsilon JB-\varepsilon B_1(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant\delta$, *подобны.*

Доказательство. Из условия 2 (определение 2) следует, что $\mathcal{U}(\varepsilon)\in\mathrm{End}\,\mathcal{X}$, а из условия $B\in\mathrm{Erg}\,\mathfrak{A}$ получаем, что если число $\delta_1>0$ определить из неравенства $\sup\limits_{0<\varepsilon\leqslant\delta_1}\|\varepsilon\Gamma(\varepsilon)(B-JB)\|_\infty<1$, то $\mathcal{U}(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant\delta_1$, — (непрерывно) обратимые операторы, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\mathcal{U}(\varepsilon)-I\|_\infty=0$. Включение $\mathcal{U}(\varepsilon)D(A)\subset D(A)$ следует из условия 3. Осталось установить, что $\mathcal{U}(\varepsilon)^{-1}D(A)\subset D(A)$. С этой целью используем условие 5. Поскольку $\mathcal{U}(\varepsilon)^{-1}=I-T(\varepsilon)+T(\varepsilon)^2-\ldots$, где $T(\varepsilon)=\varepsilon\Gamma(\varepsilon)(B-JB)$, то выполнение условия 5а влечет доказываемое включение. При выполнении условия 5б рассмотрим $\delta_0>0$, определяемое из неравенств $\|T(\varepsilon)\|_\infty+\delta_0<1$, $\delta_0\leqslant\delta_1$. Пусть $\lambda_0\in\rho(A)$ — такое число, что $\|(B-JB)R(\lambda_0, A)\|_\infty\leqslant\delta_0$. Из условия 3 следует, что $(A-\lambda_0 I)T(\varepsilon)R(\lambda_0, A)=T(\varepsilon)+(B-JB)R(\lambda_0, A)+\Phi(\varepsilon)R(\lambda_0, A)$, где $\Phi(\varepsilon)\in\mathfrak{A}$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi(\varepsilon)=0$. Поэтому из условия 1) получаем существование $\delta\leqslant\delta_0$ такого, что $\|(A-\lambda_0 I)T(\varepsilon)R(\lambda_0, A)\|_\infty<1$ $\forall\varepsilon\in(0,\delta)$. Следовательно, $(A-\lambda_0 I)\,\mathcal{U}(\varepsilon)R(\lambda_0, A)\in\mathrm{End}\,\mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{U}(\varepsilon)^{-1}D(A)\subset D(A)$.

Из условия 3 следуют равенства (проверяемые на векторах из $D(A)$) $(A-\varepsilon B)\,\mathcal{U}(\varepsilon)=A\mathcal{U}(\varepsilon)-\varepsilon B\mathcal{U}(\varepsilon)=\mathcal{U}(\varepsilon)A+A\mathcal{U}(\varepsilon)-\mathcal{U}(\varepsilon)A-\varepsilon B\mathcal{U}(\varepsilon)=\mathcal{U}(\varepsilon)A+\varepsilon(B-JB)+\varepsilon L(\varepsilon)-\varepsilon B-\varepsilon^2 B\Gamma(\varepsilon)(B-JB)=\mathcal{U}(\varepsilon)(A-\varepsilon JB-\varepsilon B_1(\varepsilon))$, где $B_1(\varepsilon)=\mathcal{U}(\varepsilon)^{-1}[\varepsilon(\mathcal{U}(\varepsilon)-I)JB+\varepsilon B\Gamma(\varepsilon)(B-JB)-L(\varepsilon)B]$, $L(\varepsilon)B=A\mathcal{U}(\varepsilon)-\mathcal{U}(\varepsilon)A-\varepsilon B+\varepsilon JB$, $0<\varepsilon\leqslant\delta$. Из условий $B\in\mathrm{Erg}\,\mathfrak{A}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\mathcal{U}(\varepsilon)-I\|_\infty=0$ и условий 3 и 4 получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}B_1(\varepsilon)=0$. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 следует такая теорема.

Теорема 2. *Пусть оператор* $B\in\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ *удовлетворяет условию теоремы* 1, *операторы* $A-\varepsilon JB$, $0<\varepsilon\leqslant\delta$, *обратимы и* $\sup\limits_{0<\varepsilon\leqslant\delta}\|(A-\varepsilon JB)^{-1}\|_\infty<\infty$. *Тогда существует* $\delta_0\leqslant\delta$ *такое, что операторы* $A-\varepsilon B$, $0<\varepsilon\leqslant\delta_0$, *обратимы и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|(A-\varepsilon B)^{-1}-(A-\varepsilon JB)^{-1}\|_\infty=0$.

Последовательное применение теоремы 1 (при условии сходимости соответствующих рядов) может привести к подобию оператора $A-\varepsilon B$ операторам вида $A - \varepsilon J B_0(\varepsilon)$. Один из возможных результатов такого вида — следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ — *допустимая тройка метода подобных операторов для оператора* $A$, $B \in \mathfrak{A}$ *и выполнено одно из условий:* а) $\varepsilon = \gamma \| J \| \| B \| \leqslant 1/6$; б) $J$ — *проектор и* $\varepsilon < 1/4$.

*Тогда оператор* $A - B$ *подобен оператору вида* $A - JX_0$, *имеет место равенство* $A - B = (I + \Gamma X_0)(A - JX_0)(I + \Gamma X_0)^{-1}$, *где* $X_0 \in \mathfrak{A}$ — *решение нелинейного уравнения* $X = B\Gamma X - (\Gamma X) JX + B$, *если выполнено условие* а), *и* $X_0$ — *решение уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X) JB - (\Gamma X) J (B\Gamma X) + B, \tag{2}$$

*если выполнено условие* б). *Оба уравнения можно решить методом итераций (например, оператор* $F(X) = B\Gamma X - (\Gamma X) JB - (\Gamma X) J (B \Gamma X) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ *есть сжимающий оператор в шаре с центром в точке* $B$ *и радиусом* $\varepsilon(4 + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + (1 - 4\varepsilon)^{1/2})^{-1} \| B \| < 3 \| B \|$ *с константой сжатия* $q(\varepsilon) = 1 - (1 - 4\varepsilon)^{1/2} < 1$).

Доказательство теоремы имеется в работе [4], где, в частности, указан выход к методу Фридрихса и Тернера подобных операторов [2—4].

2. Определение 5. *Оператор* $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ *назовем предсамосопряженным, если* $iA$ — *производящий оператор сильно непрерывной ограниченной группы операторов* $T_A(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Примерами предсамосопряженных операторов могут служить любой самосопряженный оператор $A$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{X}$, и оператор $i^{-1}d/dt$, действующий в пространстве $C(\mathbb{R}, Y)$ равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве $Y$ (в этом случае $T_A(t)\varphi(s) = \varphi(t + s)$, $t, s \in \mathbb{R}$ — группа операторов сдвигов функций из $C(\mathbb{R}, Y)$).

Каждому оператору $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ отнесем оператор $\mathrm{ad}_A : D(\mathrm{ad}_A) \subset \mathrm{End}\, \mathscr{X} \to \mathrm{End}\, \mathscr{X}$, определенный формулой $\mathrm{ad}_A X = AX - XA$, $X \in D(\mathrm{ad}_A)$, с областью определения $D(\mathrm{ad}_A)$, состоящей из таких операторов $X_0 \in \mathrm{End}\, \mathscr{X}$, что $X_0 D(A) \subset D(A)$ и оператор $AX_0 - X_0 A$ допускает расширение до некоторого оператора $Y_0 \in \mathrm{End}\, \mathscr{X}$ (и тогда полагаем $\mathrm{ad}_A X_0 = Y_0$).

Далее всюду в этом пункте $A$ — предсамосопряженный оператор. Непосредственно из определения оператора $\mathrm{ad}_A$ следует лемма.

Лемма 1. $\sigma(\mathrm{ad}_A) \subset \mathbb{R}$ *и для любого* $z \in \mathbb{C}$ *с* $\mathrm{Re}\, z > 0$ *имеет место представление*

$$R(z, i\,\mathrm{ad}_A) X = \int_0^\infty e^{-zt} T_A(t) X T_A(-t)\, dt, \quad X \in \mathrm{End}\, \mathscr{X}, \tag{3}$$

*где интеграл сходится в сильной операторной топологии.*

Алгебру $\mathrm{End}\, \mathscr{X}$ обозначим символом $\mathfrak{A}$ и рассмотрим функцию $\Gamma(\varepsilon) = i^{-1} R(\varepsilon, i\,\mathrm{ad}_A) : (0, \infty) \to \mathrm{End}\, \mathfrak{A}$, для которой из представления (3) получаем оценку $\| \Gamma(\varepsilon) \| \leqslant \gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon > 0$, т. е. $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \varepsilon\gamma(\varepsilon) < \infty$. Рассмотрим подпространство

$$D(J) = \{X \in \mathrm{End}\, \mathscr{X} : \exists\ \mathrm{uo} - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\Gamma(\varepsilon) X\}, \tag{4}$$

где $\mathrm{uo} - \lim$ обозначает предел в равномерной операторной топологии,

$$JX = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon i \Gamma(\varepsilon) X : D(J) \subset \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Из результатов статьи [5] (см. утверждения 2) и 3) теоремы и п. 3) следует, что $D(J)$ — прямая сумма подпространства $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_A$ (т. е. операторов, коммутирующих с $A$) и подпространства $\overline{\mathrm{Ran}\, \mathrm{ad}_A} \subset \mathfrak{A}$. Кроме того, оператор $J$ — проектор, $\mathrm{Ran}\, J = \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_A$, $\mathrm{Ker}\, J = \overline{\mathrm{Ran}\, \mathrm{ad}_A}$ и $D(J) = \Big\{X_0 \in \mathrm{End}\, \mathscr{X} : \exists\ \mathrm{uo} - \lim\limits_{T \to \infty} T^{-1} \int_0^T T_A(t) X_0 T_A(-t) dt\Big\}$.

Непосредственно из определений операторов $J$, $\Gamma$ и сделанных замечаний получаем, что для тройки (End $\mathcal{X}$, $J$, $\Gamma$) выполнены условия 1—4 из определения 2. Для этой же тройки выполнено условие 5б, так как $\| R(i\alpha, A)\|_\infty \leqslant \mathrm{const}\, \alpha^{-1}\ \forall \alpha > 0$. Поэтому из теоремы 1 и ее доказательства следует такая теорема.

Теорема 4. *Пусть $B \in D(J) \subset \mathrm{End}\,\mathcal{X}$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что операторы $\mathcal{U}(\varepsilon) = I + i^{-1}\varepsilon R(\varepsilon, i\,\mathrm{ad}_A)(B - JB)$, $0 < \varepsilon \leqslant \delta$, обратимы, отображают $D(A)$ на $D(A)$, $\| \mathcal{U}(\varepsilon) - I\|_\infty \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и имеет место равенство* (1), *где $B_1(\varepsilon) \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ и $\| B_1(\varepsilon)\| \leqslant \mathrm{const}\, \| \varepsilon R(\varepsilon, i\,\mathrm{ad}_A)(B - JB)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Рассмотрим частный случай, когда $A = i^{-1}d/dt$ действует в пространстве $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}, Y)$, и подалгебру $\mathfrak{A}_0 \subset \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ операторов вида

$$(B\varphi(t) = B(t)\varphi(t) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad B \in C(\mathbb{R}, \mathrm{End}\,Y). \tag{6}$$

Поскольку $T_A(t) B T_A(-t)\varphi(s) = B(s+t)\varphi(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{X}$, то $\Gamma(\varepsilon) B = i^{-1} R(\varepsilon, i\,\mathrm{ad}_A) B = i^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon s} B(s+t)\, ds$, и поэтому $B \in D(J)$, если и только если равномерно по $t \in \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} \int\limits_0^T B(s+t) ds = B_0 \in \mathrm{End}\, Y$. Следовательно, оператор $\mathcal{U}(\varepsilon) = I + \varepsilon \Gamma(\varepsilon)(B - B_0)$, осуществляющий для достаточно малых $\varepsilon > 0$ преобразование оператора $i^{-1}d/dt - \varepsilon B(t)$ в оператор вида $d/dt - \varepsilon B_0 - \varepsilon B_1(t, \varepsilon)$ (где $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \| B_1(t,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), определяется обычной заменой Крылова — Боголюбова [1] и поэтому оператор $\mathcal{U}(\varepsilon)$ из теоремы 4 назовем каноническим преобразованием Крылова — Боголюбова.

Замечание 1. Определяемый формулой (5) оператор $J$ осуществляет диагонализацию оператора $X \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ в базисе, составленном из собственных векторов $(e_n)$, $n \geqslant 1$, самосопряженного оператора $A$, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$. Действительно, из формул (4) — (5) получаем, что $((JX)e_j, e_i) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon(\Gamma(\varepsilon) X e_j, e_i) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t} e^{i(\lambda_i - \lambda_j)t} (Xe_j, e_i)\, dt = \delta_{ij}(Xe_j, e_i) \quad \forall i, j \geqslant 1 \quad \forall X \in D(J)$, если $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i \geqslant 1$.

Замечание 2. Если множество $\sigma(A)$ счетно и пространство $\mathcal{X}$ не содержит подпространств, изоморфных пространству $c_0$ и сходящихся к нулю последовательностей, то из теоремы 2 статьи [6] следует почти периодичность функции $t \mapsto T_A(t)\, x : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и поэтому формула (5) задает оператор $J$, определенный на всем пространстве End $\mathcal{X}$, если предел в формуле (5) понимать в сильной операторной топологии. Для выяснения условий, когда такой предел существует в равномерной операторной топологии, требуется дополнительное исследование.

Замечание 3. Для изучения более общих классов операторов определение 2 удобно несколько видоизменить, считая функции $\Gamma$ и $\gamma$ заданными на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел (или даже на направленном множестве) и предполагая, что существует последовательность $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{C}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\varepsilon_n| \gamma(n) < \infty$. В определении (3) также должны произойти соответствующие изменения. Например, вместо условия $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \| \Gamma(\varepsilon)(X - JX)\|_\infty = 0$ будем требовать, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n \| \Gamma(n)(X - \quad X)\|_\infty = 0$.

3. Перейдем к некоторым применениям теоремы 3, не затронутым в статье [4]. Приводимые в этом пункте результаты подчеркивают тесную связь теоремы 3 с методом Ляпунова кинематического подобия.

Пусть $A$ — предсамосопряженный оператор из $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ и $iA$ — производящий оператор группы $T_A(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 6. *Оператор* $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ *назовем периодическим периода* $\omega > 0$ (*относительно* $A$), *если* $T_A(\omega) X T_A(-\omega) = X$ (*т. е.* $T_A(\omega) X = X T_A(\omega)$). *Подпространство таких операторов — подалгебра из* $\operatorname{End}\mathcal{X}$; *обозначим его символом* $\mathfrak{A}(\omega)$.

Для любого $X \in \mathfrak{A}(\omega)$ функция $X(t) = T_A(t) X T_A(-t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ периодична и непрерывна в сильной операторной топологии. Поэтому определен оператор $J(\omega) X = \omega^{-1}\int\limits_0^\omega X(s)\,ds : \mathfrak{A}(\omega) \to \mathfrak{A}(\omega)$. Ясно, что $J(\omega)^2 = J(\omega)$, т. е. $J(\omega)$ — проектор и $\|J\| \leqslant 1$. Наличие такого оператора позволяет поставить в соответствие каждому оператору $X \in \mathfrak{A}(\omega)$ ряд Фурье $X \sim \Sigma X_n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $X_n = \omega^{-1}\int\limits_0^\omega X(s)\exp(-i2\pi ns/\omega)\,ds$. Каждая функция вида $t \mapsto X(t) - JX : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ имеет ограниченный на $\mathbb{R}$ интеграл, который обозначим $t \mapsto (\Gamma X)(t) : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$. Оператор $(\Gamma X)(0)$, обозначаемый далее через $\Gamma(\omega) X$, имеет ряд Фурье вида $\Gamma(\omega) X \sim \sum\limits_{n\neq 0}(i2\pi n/\omega)^{-1} X_n$. Из неравенства Бора (см. [7, п. 104]) для интеграла от периодической функции получаем, что $\|\Gamma(\omega) X\| \leqslant (\pi/2)\,\omega/2\pi\,(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|T_A(t)\|)^2\|X\|$. Поэтому оператор $X \mapsto \Gamma(\omega) X : \mathfrak{A}(\omega) \to \mathfrak{A}(\omega)$ непрерывен и $\|\Gamma(\omega)\| \leqslant \omega/4$. Из представления (3) резольвенты оператора $\mathrm{ad}_A$ следует, что операторы $R(z, i\,\mathrm{ad}_A) X$, $X \in \mathfrak{A}(\omega)$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, имеют ряд Фурье вида $\Sigma(z - i2\pi n/\omega)^{-1} X_n$, $n \in \mathbb{Z}$, отсюда легко получить, что $\Gamma(\omega) X \in D(\mathrm{ad}_A)$ и $\mathrm{ad}_A(\Gamma(\omega) X) = X - J(\omega) X$, $X \in \mathfrak{A}(\omega)$. Кроме того, ясно, что $\mathrm{ad}_A J(\omega) X = 0$, т. е. $J(\omega) X$ коммутирует с $A$. Следовательно, $(\mathfrak{A}(\omega), J(\omega), \Gamma(\omega))$ — допустимая тройка метода подобных операторов для $A$. Из полученных оценок на нормы операторов $J$ и $\Gamma$ и непосредственно из теоремы 3 следует теорема.

Теорема 5. *Если оператор* $B$ *из* $\mathfrak{A}(\omega)$ *удовлетворяет условию* $\|B\| < \omega^{-1}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|T_A(t)\|)^2$, *то оператор* $A - B$ *подобен оператору вида* $A - J(\omega) X_0$, *где* $X_0$ — *решение уравнения* (2) *с* $\Gamma = \Gamma(\omega)$ *и* $J = J(\omega)$.

В частном случае, когда $A = i^{-1}d/dt$ и $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}, Y)$, пространство $\mathfrak{A}(\omega)$ содержит в качестве подалгебры множество $\mathfrak{A}_0(\omega)$ операторов из $\mathfrak{A}(\omega)$, представимых в виде

$$X\varphi(t) = \int \mu(t)(ds)\, x(t+s), \tag{7}$$

где $\mu : \mathbb{R} \to M(\mathbb{R}, \operatorname{End} Y)$ — периодическая периода $\omega$ непрерывная функция со значениями в банаховой алгебре $M(\mathbb{R}, \operatorname{End} Y)$ операторозначных борелевских мер ограниченной вариации. Сужение операторов $J(\omega) : \mathfrak{A}(\omega) \to \mathfrak{A}(\omega)$ и $\Gamma(\omega) : \mathfrak{A}(\omega) \to \mathfrak{A}(\omega)$ на $\mathfrak{A}_0(\omega)$ (обозначаемое теми же символами) в этом случае для любого оператора $X \in \mathfrak{A}_0(\omega)$ вида (7) определяется соответственно мерой $\mu_0 = \omega^{-1}\int\limits_0^\omega \mu(s)\,ds$ и функцией $\mu_1(t) = \int\limits_0^t (\mu(s) - \mu_0)\,ds : \mathbb{R} \to M(\mathbb{R}, \operatorname{End} Y)$. Поэтому имеет место следствие.

Следствие. *Пусть* $B \in \mathfrak{A}_0(\omega)$ *и* $\|B\| < \omega^{-1}$. *Тогда оператор* $d/dt - B$ *подобен оператору вида* $d/dt - B_0$, *где* $B_0 \in \mathfrak{A}_0(\omega)$ *имеет вид* $(B_0 x) \times (t) = \int \mu_0(ds)\, x(t+s)$, $\mu_0 \in M(\mathbb{R}, \operatorname{End} Y)$.

*Если* $B \in \mathfrak{A}_0(\omega)$ *имеет вид* (6) *и* $\|B\| < \omega^{-1}$, *то оператор* $d/dt - B(t)$ *подобен дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами вида* $d/dt - B_*$, $B_* \in \operatorname{End} Y$.

Если $\dim Y = \infty$, то второе утверждение следствия перестает быть верным без условия малости $\|B\|$. Соответствующий пример имеется в монографии [8, гл. 11], где второе утверждение следствия было получено при несколько более слабом условии $\|B\| < \ln 4\omega^{-1}$ совершенно другими (не вполне конструктивными) методами, не позволяющими получить первое утверждение этого следствия.

4. Предположим, что $\{0\}$ — изолированная точка спектра оператора $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. Пусть $P_0$ — проектор Рисса, построенный по точке $\{0\}$, и $P_1 = I - P_0$. Рассмотрим линейные операторы $\Gamma_0$ и $J_0$ из $\mathrm{End}\,\mathscr{L}_A(\mathscr{X})$, определенные формулами $J_0X = P_0XP_0 + P_1XP_1$, $X \in \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$, $\Gamma_0X = \sum_{j\geqslant 0} (-A)^j P_0XS^{j+1} - \sum_{j\geqslant 0} S^{j+1}X(-A)^jP_0$, $X \in \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$, где $S$ — оператор из $\mathrm{End}\,\mathscr{X}$, совпадающий на подпространстве $\mathscr{X}_1 = P_1\mathscr{X}$ с обратным к сужению $(-A)$ на $\mathscr{X}_1$ и равный нулю на $\mathscr{X}_0 = P_0\mathscr{X}$. Сходимость определяющего $\Gamma$ ряда следует из квазинильпотентности оператора $AP_0$.

Простая проверка показывает, что для тройки $(\mathscr{L}_A(\mathscr{X}), J_0, \Gamma_0)$ выполнены все аксиомы из определения 4. Оператор $J_0$ — проектор, и в данном случае выполнено условие 5а из определения 2. Поэтому из теоремы 3 и метода итераций, используемого в вопросах разрешимости уравнения (4), получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Для любого оператора $B \in \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varkappa$ из круга $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon_0\}$ оператор $A - \varkappa B$ подобен оператору вида $A - \varkappa P_0X_0(\varkappa)P_0 - \varkappa P_1X_0(\varkappa)P_1$, где $X_0 : D_0 \to \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$ — голоморфная функция, а операторы $X_0(\varkappa)$, $\varkappa \in D_0$, суть решения уравнения (2), где вместо $\Gamma$ стоит оператор $\varkappa\,\Gamma_0$.*

Теорему 6 удобно применять в вопросах обратимости операторов вида $A - \varkappa B$, $\varkappa \in \mathbb{C}$, $B \in \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$, так как из нее следует, что обратимость оператора $A - \varkappa B$ эквивалентна (при малых $\varkappa$) обратимости оператора $A - \varkappa P_0X_0(\varkappa)P_0$. Такое условие можно получать в терминах приближений для $P_0X_0(\varkappa)P_0$, используя ряд Тейлора для этой функции. Другой подход изложен в монографии [9], где делается дополнительное предположение $AP_0 = 0$, упрощающее в нашем случае оператор $\Gamma_0$ (он будет иметь вид $\Gamma_0X = P_0XS - SXP_0$, $X \in \mathscr{L}_A(\mathscr{X})$).

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. III.— М.: Мир, 1974.— 661 с.
4. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов.— Сиб. мат. журн., 1983, 24, № 1, с. 21—39.
5. *Баскаков А. Г.* Об общих эргодических теоремах в банаховых модулях.—Функц. анализ и его прил., 1980, 14, № 3, с. 63—64.
6. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений.— Мат. заметки, 1978, 24, № 2, с. 195—206.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 407 с.
8. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.—М.: Мир, 1970.— 456 с.
9. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.

Воронеж. гос. ун-т

Поступила 22.04.83