УДК 517.983

Н. Е. Линчук

Сверточное представление некоторых классов операторов, связанных с умножением на аналитические функции, и их применения

При изучении различных классов линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций, важное место занимают операторы, связанные с умножением на аналитические функции. Так, работы [1—3] посвящены вопросу описания линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций и перестановочных с оператором умножения на фиксированную функцию. Для описания коммутантов различных операторов в работах [4—6] применено сверточное исчисление. Напомним определение свертки для линейного оператора T, действующего в линейном пространстве X (см. [6]). Билинейная, коммутативная и ассоциативная операция $*: X \times X \to X$ называется сверткой для T на X, если

$$T(f * g) = (Tf) * g \qquad \forall f,\ g \in X. \tag{1}$$

Пусть G —произвольная область в $\overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathcal{H}(G)$ обозначим пространство всех аналитических в G функций (равных нулю в бесконечно удаленной точке, если последняя принадлежит G) с общепринятой топологией (см. [7]), а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}(G)$. Пусть $\mathcal{H}'(G)$ — пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{H}(G)$. Пространство $\mathcal{H}'(G)$ изоморфно пространству $\mathcal{H}(CG)$ — локально аналитических на множестве CG функций (см. [7]). Соответствие между $L \in \mathcal{H}'(G)$ и $l \in \mathcal{H}(CG)$ устанавливается формулой $l(\lambda) = L[1/(\lambda - z)]$. При этом функция $l(\lambda)$ называется характеристической для функционала L.

В данной статье изучаются коммутанты оператора $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, действующего по правилу:

$$A_1 g(z) = \psi(z) g(z) + L(g), \tag{2}$$

где $L \in \mathcal{H}'(G)$, а $\psi(z)$ — однолистная в G функция. Для этой цели используется метод характеристических функций, разработанный в [7], а также конструируются специальные свертки для рассматриваемых операторов. Сверточное представление коммутантов оператора A_1 дало возможность описать условия, при которых они являются изоморфизмами, получить критерии эквивалентности двух различных операторов вида (2), а также изучить условия полноты и базисности некоторых систем в пространствах аналитических функций.

1. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $L \in \mathcal{H}'(G)$, и A — линейный непрерывный оператор, действующий в $\mathcal{H}(G)$ по правилу $Ag(z) = zg(z) + L(g)$. Изучим описание линейных непрерывных операторов $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, коммутирующих с A, т. е. таких операторов T, для которых

$$TA = AT. \tag{3}$$

Для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ через $t(\lambda, z) = T[1/(\lambda - z)]$ обозначим его характеристическую функцию, локально аналитическую на множестве $CG \times G$ (см. [7]).

Предположим, что оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ перестановочен с A. Подействовав обеими частями равенства (3) на функцию $1/(\lambda - z)$, для характеристической функции $t(\lambda, z)$ оператора T на множестве $\mathcal{F}$ (см. лемму 1 из [8]) получим выражение

$$t(\lambda, z) = (l_1(\lambda) + \varphi(z)[1 - l(\lambda)])/(\lambda - z), \tag{4}$$

где $\varphi(z) = T1 \in \mathcal{H}(G)$, $l_1(\lambda) = \underset{z}{L}[t(\lambda, z)] \in \mathcal{H}(CG)$. Для определения характеристической функции $t(\lambda, z)$ остается найти $l_1(\lambda)$. Используя определение функции $l_1(\lambda)$ и равенство (4), получим: $[1 - l(\lambda)]\, l_1(\lambda) = [1 - l(\lambda)]\, \underset{\zeta}{L}[\varphi(\zeta)/(\lambda - \zeta)]$. Поскольку $1 - l(\lambda) \not\equiv 0$ ($l(\infty) = 0$ согласно определению локально аналитической на CG функции $l(\lambda)$), то $l_1(\lambda) = \underset{\zeta}{L}[\varphi(\zeta)/(\lambda - \zeta)]$. Следовательно, $t(\lambda, z) = (1/(\lambda - z))\, \underset{\zeta}{L}[\varphi(\zeta)/(\lambda - \zeta)] + \varphi(z)(1 - l(\lambda))/(\lambda - z)$. Восстанавливая действие оператора T по характеристической функции $t(\lambda, z)$ (см. формулу (25) из [7]), для $f(z) \in \mathcal{H}(G)$ получим:

$$Tf(z) = \varphi(z) f(z) + \underset{\zeta}{L}[(\varphi(\zeta) - \varphi(z))(f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z)]. \tag{5}$$

Таким образом, мы доказали необходимость условия следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$ и $L \in \mathcal{H}'(G)$. Для того чтобы оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ коммутировал с оператором A, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде* (5), *где $\varphi(z) \in \mathcal{H}(G)$.*

Достаточность условия теоремы 1 устанавливается непосредственной проверкой.

2. Для дальнейшего изложения нам понадобится сверточное представление операторов, коммутирующих с A.

Предложение 1. *Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Операция*

$$(f * g)(z) = zf(z) g(z) + z\underset{\zeta}{L}[(f(\zeta) - f(z))(g(\zeta) - g(z))/(\zeta - z)] + L(fg) \tag{6}$$

есть непрерывная свертка для оператора A в $\mathcal{H}(G)$, для которой

$$Af(z) = (1 * f)(z). \tag{7}$$

Для случая пространства $\mathcal{H}(\overline{G})$-функций, аналитических в области $\overline{G}$, подобная свертка была введена в [5]. Доказательство предложения 1 аналогично доказательству теоремы 1 из [5].

Приведем сверточное представление коммутантов оператора A, которое получается на основании теоремы 1.

Следствие 1. *Если $0 \in G$, то оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ коммутирует с A тогда и только тогда, когда он представим в виде $Tf = \Delta(\varphi * f)$, где $\varphi(z) = T1 \in \mathcal{H}(G)$, а $(\Delta g)(z) = (g(z) - g(0))/z$.*

3. Изучим далее описание коммутантов оператора A_1, определяемого формулой (2).

Теорема 2. *Пусть G_1 — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $L_1 \in \mathcal{H}'(G_1)$, а функция $\psi(z)$ — аналитическая и однолистная в G_1. Для того чтобы оператор T_1 коммутировал с оператором A_1, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде $T_1 f(z) = \varphi_1(z) f(z) + \underset{\zeta}{L_1}[(\varphi_1(\zeta) - \varphi_1(z))(f(\zeta) - f(z))/$ $/(\psi(\zeta) - \psi(z))]$, где $\varphi_1(z) = T_1 1 \in \mathcal{H}(G_1)$.*

Доказательство. Обозначим $G = \psi(G_1)$ и рассмотрим оператор M, действующий из $\mathcal{H}(G)$ в $\mathcal{H}(G_1)$ по правилу $Mg(z) = (g \circ \psi)(z)$. Поскольку $\psi(z)$ осуществляет конформное отображение G_1 на область G, то оператор M — изоморфизм. Обратный оператор к M действует из $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G)$ по правилу $M^{-1}g(z) = (g \circ \psi^{-1})(z)$, где $\psi^{-1}(z)$ — обратное отображение к отображению $\psi(z)$. Ясно, что оператор $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$ перестановочен с оператором A_1 тогда и только тогда, когда оператор $T = M^{-1}T_1M$ перестановочен с оператором $A = M^{-1}A_1M$ в $\mathcal{H}(G)$. Таким образом, общий вид операторов, перестановочных с A_1, дается формулой $T_1 = MTM^{-1}$, где T — произвольный оператор, действующий в $\mathcal{H}(G)$ и коммутирующий с оператором A. Учитывая соотношение $M^{-1}U_\psi M = U_z$, получим $Ag(z) = zg(z) + L(g)$, где $L = M^{-1}L_1M = L_1M$ (поскольку $M^{-1}1 = 1$). Воспользовавшись теоремой 1 об общем виде коммутантов оператора A, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 2 было показано, что для произвольной аналитической и однолистной в области G_1 функции $\psi(z)$ и $L_1 \in \mathcal{H}'(G_1)$ оператор A_1, определяемый формулой (2), эквивалентен оператору $Ag(z) = zg(z) + L(g)$ в $\mathcal{H}(G)$, т. е. существует изоморфизм $M: \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G)$ такой, что $MA = A_1M$, где $G = \psi(G_1)$, $Mg(z) = (g \circ \psi)(z)$, а $L = L_1M$ (см. доказательство теоремы 2).

Таким образом, свойства оператора A и его коммутантов при помощи изоморфизма M переносится на более общие, нежели A, операторы вида A_1. В дальнейшем мы ограничимся изучением свойств коммутантов оператора A. На формулировках соответствующих результатов для операторов вида A_1 мы не останавливаемся, поскольку это особого труда не представляет.

Приведем некоторые утверждения, касающиеся коммутантов оператора A_1, которые будут использованы при изучении свойств операторов, перестановочных с A. Используя свертку (6) для оператора A, при помощи изоморфизма M построим свертку для оператора A_1.

Предложение 2. *Пусть G_1 — область в $\overline{\mathbb{C}}$ и $L \in \mathcal{H}'(G_1)$, а $\psi(z)$ — однолистная в G_1 функция. Операция*

$$(f \underset{\psi}{*} g)(z) = \psi(z) f(z) g(z) + \psi(z) \underset{\zeta}{L}[(f(\zeta) - f(z))(g(\zeta) - g(z))/(\psi(\zeta) - \psi(z))] + L(fg) \tag{8}$$

есть непрерывная свертка в $\mathcal{H}(G_1)$ для оператора A_1, определяемого формулой (2), для которой $A_1 f(z) = (1 \underset{\psi}{*} f)(z)$.

Для доказательства предложения 2 достаточно заметить, что формулой $M(M^{-1}f * M^{-1}g)$ (см. [6]) определяется свертка для оператора A_1. Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что $M(M^{-1}f * M^{-1}g) = (f \underset{\psi}{*} g)$ $\forall f, g \in \mathcal{H}(G)$.

Приведем сверточное представление коммутантов оператора A_1.

Предложение 3. *Пусть* G_1 — *область в* $\bar{\mathbb{C}}$, $\psi(z)$ — *однолистная функция в* G_1, *причем существует* $z_0 \in G_1$, *для которого* $\psi(z_0) = 0$. *Тогда общий вид коммутантов оператора* A_1 *дается формулой* $T_1 f(z) = \Delta_\psi (\varphi_1 \underset{\psi}{*} f)(z)$, *где* $\Delta_\psi g(z) = (g(z) - g(z_0))/\psi(z)$, *а* $\varphi_1(z) = T_1 1 \in \mathcal{H}(G_1)$.

Укажем другие представления операторов, коммутирующих с A_1.

Следствие 2. *Пусть* G — *область в* $\mathbb{C}$ *и* z_0 — *произвольная точка из* G. *Общий вид коммутантов оператора* $Ag(z) = zg(z) + L(g)$ *выражается формулой* $Tg(z) = \Delta_{z_0}(\varphi \underset{z_0}{*} g)(z)$, *где* $\varphi(z) = T1 \in \mathcal{H}(G)$, $(\Delta_{z_0} g)(z) = (g(z) - g(z_0))/(z - z_0)$, $(\varphi \underset{z_0}{*} g)(z) = (\varphi \underset{\psi}{*} g)(z)$ с $\psi(z) = z - z_0$.

Справедливость следствия 2 вытекает из предложения 3 при $\psi(z) = z - z_0$ и того, что оператор T перестановочен с A тогда и только тогда, когда он коммутирует с оператором $A_1 g(z) = (z - z_0) g(z) + L(g)$.

Следствие 3. *При выполнении условий следствия 2 общий вид коммутантов оператора* A *дается формулой*

$$Tg(z) = h(z_0) g(z) + ((\Delta_{z_0}\varphi) \underset{z_0}{*} g)(z), \tag{9}$$

где $h(z_0) = \varphi(z_0) - \underset{\zeta}{L}[(\varphi(\zeta) - \varphi(z_0))/(\zeta - z_0)]$.

4. Опишем изоморфизмы, перестановочные с оператором A.

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $L \in \mathcal{H}'(G)$, а $\varphi(z) \in \mathcal{H}(G)$. Предположим, что определяемый формулой (5) оператор T — изоморфизм пространства $\mathcal{H}(G)$. Докажем, что в этом случае функция

$$h(z) = \varphi(z) - \underset{\zeta}{L}[(\varphi(\zeta) - \varphi(z))/(\zeta - z)] \tag{10}$$

не имеет нулей в области G. Зафиксируем точку $z_0 \in G$ и покажем, что $h(z_0) \neq 0$. Поскольку T перестановочен с A, то на основании следствия 3 оператор T представим в виде (9) с $\varphi(z) = T1$. Пусть T^{-1} — обратный к оператору T. Тогда T^{-1} также перестановочен с A и, следовательно,

$$T^{-1} g(z) = h_1(z_0) g(z) + ((\Delta_{z_0}\varphi_1) \underset{z_0}{*} g)(z), \quad \varphi_1(z) = T^{-1}1, \tag{11}$$

где $h_1(z) = \varphi_1(z) - \underset{\zeta}{L}[(\varphi_1(\zeta) - \varphi_1(z))/(\zeta - z)]$. Учитывая представления (9) и (11) для операторов T и T^{-1} и ассоциативность свертки, запишем равенство $TT^{-1}1 = 1$ в виде

$$(F \underset{z_0}{*} 1)(z) + h(z_0) h_1(z_0) = 1, \tag{12}$$

где $F(z) = [((\Delta_{z_0}\varphi) \underset{z_0}{*} (\Delta_{z_0}\varphi_1)) + h_1(z_0)(\Delta_{z_0}\varphi) + h(z_0)(\Delta_{z_0}\varphi_1)](z)$. Из (12) при $z = z_0$ получим $L(F) + h(z_0) h_1(z_0) = 1$. Следовательно, $F(z) \equiv 0$ при $z \in G$. Таким образом, $h(z_0) h_1(z_0) = 1$ и тем более $h(z_0) \neq 0$.

Пусть, далее, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — все нули функции $1 - l(\lambda)$ (каждый нуль повторяется столько раз, какова его кратность), лежащие в CG (их будет конечное число в силу свойств функции $l(\lambda)$). Зафиксируем точку $z_0 \in G$ и положим $P(\lambda) = (1 - (\lambda_1 - z_0)/(\lambda - z_0))(1 - (\lambda_2 - z_0)/(\lambda - z_0)) \ldots (1 - (\lambda_n - z_0)/(\lambda - z_0))$, а $l_1(\lambda) = 1 - (1 - l(\lambda))/P(\lambda)$ (если уравнение $l(\lambda) = 1$ в CG решений не имеет, то полагаем $P(\lambda) = 1$ и $l_1(\lambda) = l(\lambda)$). Ясно, что функция $l_1(\lambda)$ локально аналитическая в CG и $l_1(\lambda) \neq 1$ при $\lambda \in CG$. Пусть $l_1(\lambda)$ — характеристическая функция для функционала $L_1 \in \mathcal{H}'(G)$. Тогда оператор M_1, определяемый формулой $M_1 g(z) = g(z) - \underset{\zeta}{L_1}[(g(\zeta) - g(z))/(\zeta - z)]$, — изоморфизм пространства $\mathcal{H}(G)$. Очевидно, что оператор T — изоморфизм пространства $\mathcal{H}(G)$ тогда и только тогда, когда изоморфизмом $\mathcal{H}(G)$ будет оператор $T' = M_1 T M_1^{-1}$. Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что $T'g(z) = h(z) g(z) + \underset{\zeta}{Q}[(\varphi_1(\zeta) - \varphi_1(z)) g(\zeta)/(\zeta - z)]$, где $\varphi_1(z) = M_1\varphi(z)$, а функционал Q определяется характеристической функцией $1 - P(\lambda)$. Таким образом, $T'g(z) = h(z)[g(z) +$

$+ \sum_{k=0}^{n-1} (g^{(k)}(z_0)/(k!))\, \Phi_k(z)]$, где $\Phi_k(z) = [h(z)]^{-1} \underset{\zeta}{Q} [(\varphi_1(\zeta) - \varphi_1(z))(\zeta - z_0)^k / /(\zeta - z)]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

На основании теоремы Фредгольма заключаем, что оператор T' будет изоморфизмом пространства $\mathcal{H}(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\det \| \delta_{ij} + \Phi_j^{(i)}(z_0)/(i!) \|_{i,j=0}^{n-1} \neq 0. \tag{13}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G)$ *был изоморфизмом, перестановочным с* A, *необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде* (5) *с* $\varphi(z) \in \mathcal{H}(G)$, *функция* (10) *не имела нулей в области* G *и выполнялось условие* (13).

Следствие 4. *Если* $1 - l(\lambda) \neq 0$ *в* CG, *то определяемый формулой* (5) *оператор* T *будет изоморфизмом пространства* $\mathcal{H}(G)$ *тогда и только тогда, когда функция* (10) *не имеет нулей в* G.

Следствие 5. *Для того чтобы оператор* A *был изоморфизмом пространства* $\mathcal{H}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $0 \notin G$ *и* $L[z^{-1}] \neq -1$.

Следствие 6. *Если* $0 \notin G$ *и* $L[z^{-1}] \neq -1$, *то общий вид коммутантоз оператора* A *дается формулой* $Tg(z) = (f*g)(z)$, *где* $f(z) \in \mathcal{H}(G)$.

Последнее следствие вытекает из теоремы 1 и следствия 5.

5. Напомним, что операторы A_1 и A_2 из $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ называются эквивалентными в $\mathcal{H}(G)$, если существует изоморфизм $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, для которого $TA_1 = A_2T$. Спектральной кратностью числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора $A \in \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ называется размерность спектрального подпространства $\mathcal{H}_\lambda = = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^n$, где E — единичный оператор (см. [9]).

Предложение 4. *У эквивалентных операторов спектральные кратности одинаковых чисел равны.*

Доказательство предложения 4 вытекает из того, что равенство $TA_1 = = A_2T$ влечет соотношение $T(A_1 - \lambda E)^n = (A_2 - \lambda E)^n T$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $n = = 1, 2, \dots$.

Изучим условия эквивалентности в пространстве $\mathcal{H}(G)$ двух операторов вида $A_k g(z) = z\, g(z) + L_k(g)$, где $L_k \in \mathcal{H}'(G)$, а $l_k(\lambda)$ — характеристическая функция функционала L_k, $k = 1, 2$. Если $0 \in G$, то каждый из операторов A_k будет правым обратным к оператору Δ. В следующей теореме доказывается критерий эквивалентности двух таких операторов.

Теорема 4. *Пусть* G — *область в* $\mathbb{C}$. *Для того чтобы операторы* A_1 *и* A_2 *были эквивалентными в пространстве* $\mathcal{H}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы нули (с учетом их кратностей) функций* $1 - l_1(\lambda)$ *и* $1 - l_2(\lambda)$ *на множестве* CG *совпадали.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы 4 вытекает из предложения 4 и того, что спектральная кратность числа $\lambda_0 \in \in CG$ оператора A_k равна кратности нуля λ_0 для функции $1 - l_k(\lambda)$, $k = 1, 2$.

Достаточность. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все нули функций $1 - l_1(\lambda)$ и $1 - l_2(\lambda)$ на множестве CG соответственно кратностей $n_0, n_1, \dots, n_m$. Зафиксируем точку $z_0 \in G$ и положим $P(\lambda) = (1 - (\lambda_0 - z_0)/(\lambda - z_0))^{n_0} (1 - -(\lambda_1 - z_0)/(\lambda - z_0))^{n_1} \dots (1 - (\lambda_m - z_0)/(\lambda - z_0))^{n_m}$. Обозначим $\tilde{l}_k(\lambda) = 1 - - (1 - l_k(\lambda))/P(\lambda)$, $k = 1, 2$. Функции $\tilde{l}_k(\lambda)$ — локально аналитические на множестве CG и $\tilde{l}_k(\lambda) \neq 1$ при $\lambda \in CG$. Пусть $\tilde{L}_k$ — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{H}(G)$, для которого функция $\tilde{l}_k(\lambda)$ — характеристическая. Тогда формулой $(M_k g)(z) = g(z) - \underset{\zeta}{\tilde{L}_k} [(g(\zeta) - g(z))/(\zeta - z)]$, $k = 1, 2$, определяется изоморфизм пространства $\mathcal{H}(G)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $M_2^{-1} M_1 A_1 = A_2 M_2^{-1} M_1$, т. е. A_1 и A_2 эквивалентны.

Следствие 7. *Если* $G = \mathbb{C}$, *то каждые два правых обратных оператора к* Δ *эквивалентны между собой.*

Следствие 8. *Для того чтобы оператор A был эквивалентен в $\mathcal{H}(G)$ оператору умножения на независимую переменную, необходимо и достаточно, чтобы $l(\lambda) \neq 1$ при $\lambda \in CG$. При выполнении последнего условия общий вид изоморфизмов $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, удовлетворяющих соотношению $TA = U_z T$, дается формулой $Tg(z) = f(z)\,[g(z) - \underset{\zeta}{L}((g(\zeta) - g(z))/(\zeta - z))]$, где $f(z)$ — произвольная аналитическая и не имеющая в области G нулей функция.*

Укажем некоторые применения доказанных утверждений к вопросам полноты и базисности в пространстве $\mathcal{H}(G)$. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $L \in \mathcal{H}'(G)$, а $\varphi(z) \in \mathcal{H}(G)$. Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(z)\}$ вида

$$\varphi_0(z) = \varphi(z),\ \varphi_{n+1}(z) = z\varphi_n(z) + L(\varphi_n), \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{14}$$

Следствие 9. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, $L \in \mathcal{H}'(G)$, $\varphi(z) \in \mathcal{H}(G)$ и выполняются условия* а) $\underset{z}{L}[1/(\lambda - z)] \neq 1$ *при* $\lambda \in CG$; б) *функция* (10) *не имеет нулей в области G. Тогда система* (14) *полна в* $\mathcal{H}(G)$.

Доказательство. На основании следствия 8 построим изоморфизм T, удовлетворяющий равенству $TA = U_z T$, для которого $T\varphi(z) = 1$. Тогда система (14) примет вид $\{T^{-1}z^n\}$, и она полна в $\mathcal{H}(G)$ на основании теоремы Рунге.

Следствие 10. *Пусть $G = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$. Для того чтобы система* (14) *образовывала квазистепенной базис в $\mathcal{H}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* а) *и* б) *следствия 9.*

Доказательство следствия 10 вытекает из следствий 8 и 9 настоящей работы и теоремы 3.1 из [10].

Следствие 11. *Пусть $G = \{z : r < |z| < R\}$, $\varphi \in \mathcal{H}(G)$, $L \in \mathcal{H}'(G)$ и $L[z^{-1}] \neq -1$. Для того чтобы система $\{A^n\varphi(z)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образовывала в $\mathcal{H}(G)$ квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* а) *и* б) *следствия 9.*

1. *Нагнибида Н. И.* Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы.—В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков : Вища школа, 1971, вып. 13, с. 63—67.
2. *Захарюта В. П., Царьков М. Ю.* Операторы, коммутирующие с умножением в пространствах аналитических функций одного переменного.— Мат. заметки, 1973, **13**, вып. 2, с. 269—277.
3. *Линчук Н. Е., Линчук С. С.* Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 4, с. 510—515.
4. *Dimovski I. H.* Convolution representation of the commutant of Gel'fond — Leont'ev integration operator.— Compt. rend. Acad. Bulg. Sci., 1981, **34**, N 12, p. 1643—1646.
5. *Dimovski I. H., Mineff D. M.* Convolution, multipliers and commutants for the backward shift operator.— Плиска Бълг. мат. студ., 1981, № 4, с. 128—136.
6. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus.— Sofia : Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982.— 200 p.
7. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie.—J. Reine und Angew. Math., 1953, **191**, S. 30—49.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе линейных операторов.— Годишник на ВТУЗ. Сер. мат., 1973, **9**, кн. 3, с. 23—33.
9. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1969.— 1072 с.
10. *Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.* Матричный метод и квазистепенные базисы в пространстве аналитических в круге функций.— Успехи мат. наук, 1975, **30**, с. 101—146.

Черновиц. гос. ун-т Поступила 03.05.83