С. Н. Черников

Исследования по алгебре в Институте математики АН УССР

Исследования по алгебре и ее приложениям проводились в Институте математики АН УССР с первых лет его работы.

В 1934—1935 гг. М. Ф. Кравчук продолжал свои более ранние исследования систем перестановочных матриц, связанные с вопросом о приведении их к каноническому виду. Полученные им в этот период результаты позволили указать метод построения всех таких систем матриц.

В 40-х годах в цикле работ Я. Б. Лопатинский развил алгебраическую теорию систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Он изучил алгебраические свойства кольца дифференциальных операторов с коэффициентами в поле отношений кольца формальных степенных рядов и на этой основе установил важные свойства соответствующих интегральных многообразий.

Во время работы в институте В. М. Глушковым был получен ряд существенных результатов о топологической и алгебраической структуре локально компактных групп, были исследованы их связи с группами Ли. Им, в частности, было изучено строение связных локально компактных групп, установлены теоремы общего характера о локальном строении произвольных локально компактных групп (1957—1959 гг.).

Ряд алгебраических результатов, связанных с некоторыми задачами теории колебаний, был получен М. Г. Крейном (1935—1937 гг.).

В настоящее время основными областями исследований по алгебре в институте являются теория групп и линейная алгебра. Теория групп в нашей стране берет начало в киевской алгебраической школе Д. А. Граве. Из нее вышел О. Ю. Шмидт — основатель советской теоретико-групповой школы.

В работах О. Ю. Шмидта ярко выражена идея зависимости строения группы от свойств системы ее подгрупп. Эта идея реализовалась в направлении теории групп, задачей которого является выделение и изучение групп — объектов исследования с помощью наложения на их подгруппы тех или иных требований (ограничений). Такой подход оказался весьма перспективным, о чем убедительно свидетельствуют результаты работ С. Н. Черникова, относящиеся к 40-м годам.

Впоследствии, начиная с 1965—1966 гг., С. Н. Черниковым развивалась идея изучения бесконечных групп с ограничениями для их бесконечных подгрупп; им, в частности, были исследованы и конструктивно описаны бесконечные группы, все бесконечные абелевы подгруппы которых инвариантны (IH-группы). В его же работах класс IH-групп получил естественное расширение с помощью условия минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп. При этом было установлено, что локально разрешимая группа, удовлетворяющая такому условию, имеет инвариантную абелеву подгруппу конечного индекса. Со свойствами системы бесконечных подгрупп связано так называемое слабое условие минимальности для подгрупп, изучавшееся Д. И. Зайцевым.

В работах сотрудников Института математики получили существенное развитие исследования, связанные с изучением групп, в которых задана система дополняемых подгрупп. Изучались группы с дополняемыми инвариантными подгруппами, создана их теория (Д. И. Зайцев). Изучались группы с теми или иными системами дополняемых абелевых подгрупп и, в частности, группы, в которых дополняемы все инвариантные абелевы подгруппы; дано конструктивное описание конкретных типов таких групп (С. Н. Черников). Получено полное описание групп с системами дополняемых нециклических элементарных абелевых подгрупп (Я. П. Сысак). Получена характеризация конечных сверхразрешимых групп с абелевыми примарными подгруппами с помощью некоторой системы дополняемых примарных циклических подгрупп (С. Н. Черников). Дано полное описание бесконечных локально конечных групп, в которых дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы, и установлено, что из предложения о дополняемости всех бесконечных абелевых подгрупп бесконечной группы не следует локальная конечность последней (Н. С. Черников). Исследовались группы, в которых все или некоторые подгруппы дополняемы в том или ином обобщеннсм смысле (Д. И. Зайцев, Я. П. Сысак).

Результаты этих и других исследований отражены в монографии С. Н. Черникова «Группы с заданными свойствами системы подгрупп» (М. : Наука, 1980.— 384 с.).

В последние годы в Институте математики проводились исследования групп, представимых в виде произведения попарно перестановочных подгрупп с заданными свойствами (факторизуемых этими подгруппами). Д. И. Зайцев изучал группы, разложимые в произведение двух абелевых подгрупп, а также разрешимые группы, разложимые в произведение полициклических подгрупп. Н. С. Черниковым исследовались локально ступенчатые группы, разложимые в произведение двух подгрупп, являющихся конечными расширениями абелевых групп с условием минимальности, а также разложимые в произведение двух локально конечных подгрупп конечных специальных рангов. Н. С. Черниковым была установлена почти разрешимость групп, разложимых в произведение двух подгрупп, конечных над своими центрами, и изучены произвольные группы, разложимые в произведение конечного числа попарно перестановочных локально нормальных подгрупп, удовлетворяющих условию минимальности. Я. П. Сысак доказал существование бесконечной непримарной группы, разложимой в произведение двух подгрупп, примарных по одному и тому же простому числу.

Приведем теперь некоторые результаты исследований в области линейной алгебры (А. В. Ройтер, Л. А. Назарова, В. М. Бондаренко).

Еще в 60-х годах в Институте математики АН УССР А. В. Ройтер и Л. А. Назарова начали исследования, относящиеся к области линейной алгебры, в направлении, которое можно было бы назвать «Модули и их представления». Выделим только один вопрос из их работ 1971—1973 гг. Если размерности неразложимых представлений конечномерной алгебры (над бесконечным полем K) не ограничены в совокупности, то можно ли утверждать, что существует бесконечно много таких размерностей, для каждой из которых имеется бесконечно много неразложимых представлений?

В указанных работах с помощью специальных матричных методов вопрос решен положительно при некотором ограничении относительно поля K. Матричные методы, использованные при решении вопроса, составили предмет изучения в дальнейших работах А. В. Ройтера и Л. А. Назаровой. Проведенные ими исследования, положившие вместе с работами московских и зарубежных математиков начало теории матричных задач — новому направлению в современной линейной алгебре, уже нашли свои применения в различных вопросах математики.

Решена матричная задача, эквивалентная задаче о четверках подпространств линейного конечномерного пространства, ставшая базовой для многих задач по изучению колчанов, частично упорядоченных множеств и структур.

Решена задача о «восьмерке», содержащая в себе все известные разрешимые матричные задачи, равносильная задаче о классификации модулей Хариш-Чандры для группы $SL_2[R]$.

Дано описание алгебр конечного типа, квадрат радикала которых равен нулю. Установлены критерии разрешимости для задач о представлениях колчанов и частично упорядоченных множеств.

В заключение отметим развиваемое С. Н. Черниковым актуальное направление линейной алгебры — теорию линейных неравенств. Еще в начале 40-х годов он открыл принцип граничных решений, ставший одним из основных принципов теории линейных неравенств, и, пользуясь одним только принципом граничных решений, построил чисто алгебраическую теорию линейных неравенств. При этом в качестве основного поля в ней берется произвольное упорядоченное поле. Эта теория изложена в монографии: *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.— 488 с.

С. Н. Черников разработал методы для решения ряда задач, относящихся к конечным системам линейных неравенств, в частности для решения некоторых задач линейного программирования и задач, связанных с одним из подходов к распознаванию образов. Он выделил и изучил важный класс бесконечных систем линейных неравенств — полиэдрально замкнутые системы. Такие системы — эффективное средство при анализе вопросов приближения функций, выпуклого программирования и некоторых вопросов теории управления.