УДК 517.52

В. П. Заставный

О множестве нулей преобразования Фурье меры и суммировании двойных рядов Фурье методами типа Бернштейна — Рогозинского

Пусть R^2 — двумерное евклидово вещественное пространство, Z^2 — целочисленная решетка в R^2, $xy = x_1y_1 + x_2y_2$ — скалярное произведение $x, y \in R^2$, T^2 — тор $[-\pi, \pi)^2$, $f \in L(T^2)$, $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}$, $k \in Z^2$. Пусть $W \subset R^2$ — тело, симметричное относительно нуля. Рассмотрим $S_n(f, W, x) = \sum\limits_{k \in nW} c_k(f) e^{ikx}$, $n \in N$, — частичные суммы ряда Фурье, порожденные телом W. Введем, следуя [1, § 3], суммы типа Бернштейна — Рогозинского

$$R_n(f, x) = \int\limits_{R^2} S_n(f, W, x - \gamma u/n)\, d\mu(u) \sim \sum_{k \in Z^2} \varphi(k/n)\, c_k(f)\, e^{ikx},$$

где μ — конечная борелевская мера на R^2, $\gamma > 0$, $n \in N$, $\varphi(x) = \chi(x) \int\limits_{R^2} e^{-i\gamma xu} d\mu(u)$, а χ — характеристическая функция W.

Сходимость к f таких средних изучалась ранее в [2] в случае, когда W — круг, а мера μ равномерно распределена по его границе, и в работе [1] в случае, когда W — m-мерный шар или куб, а мера равномерно распределена по границе W или его объему. Как показано в [1, равенство (7)], для регулярности метода R_n в пространстве $C = C(T^2)$, если двумерная мера Лебега ∂W равна нулю, необходима непрерывность φ, т. е.

$$\int_{R^2} e^{-i\gamma ux} d\mu(u) = 0, \quad x \in \partial W, \tag{1}$$

1. Пусть $D \subset R^2$ — ограниченное, строго выпуклое, симметричное относительно нуля тело. Рассмотрим преобразование Фурье меры, когда мера равномерно распределена по границе ∂D, т. е. криволинейный интеграл по длине кривой ∂D

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \int_{\partial D} e^{-iux} dl, \quad u \in \partial D. \tag{2}$$

Вводя полярные координаты $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, вектор $\xi_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ и используя симметричность D, имеем

$$f(r, \varphi) = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)/2 = \int_{\Gamma} \cos rt dl, \tag{3}$$

где $t = u\xi_\varphi = u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi$, а $\Gamma = \{u \in \partial D : u\xi_\varphi \geqslant 0\}$. Пусть L_0 — прямая, ортогональная вектору ξ_φ и проходящая через начало координат O. Тогда, в силу строгой выпуклости и ограниченности D, существуют единственные точка $u_0 \in \Gamma$ и опорная прямая L, параллельная L_0, такие, что $u_0 = \Gamma \cap L$. Очевидно, $\sup\limits_{u \in \partial D} u\xi_\varphi = u_0\xi_\varphi = h(\varphi) > 0$. Функцию $h(\varphi)$ называют опорной функцией множества D. Точкой u_0 кривая Γ разбивается на две дуги: Γ_1 и Γ_2. Через u_0 проведем прямую L_1 параллельно вектору ξ_φ. Пусть $\tilde{O} = L_1 \cap L_0$. В R^2 введем новую систему координат $\tilde{X}_1\tilde{O}\tilde{X}_2$ следующим образом: старую систему координат X_1OX_2 повернем на угол φ и центр O перенесем в $\tilde{O}$. В новой системе координат кривая Γ_1 — это график некоторой неотрицательной строго выпуклой вверх функции $f_\varphi(t)$, $t \in [0, h(\varphi)]$, а кривая Γ_2 — график строго выпуклой вниз функции $g_\varphi(t)$, $t \in [0, h(\varphi)]$. Интеграл в (3) разобьем на два: $\int_{\Gamma} \cos rtdl = \int_{\Gamma_1} \cos rtdl + \int_{\Gamma_2} \cos rtdl$.

Пусть длина Γ_1 (Γ очевидно спрямляема) равна d, а m — конец дуги Γ_1, отличный от u_0. Функция $t = t_1(l) = u\xi_\varphi$ строго возрастает от 0 до $h(\varphi)$, когда точка $u \in \Gamma_1$ пробегает от m к u_0 (длина дуги $\overset{\frown}{mu}$ равна l). Поэтому существует функция $l = l_\varphi^1(t)$ такая, что $t_1(l_\varphi^1(t)) \equiv t$, $t \in [0, h(\varphi)]$. Делая соответствующую замену переменных, получаем $\int_{\Gamma_1} \cos rtdl = \int_0^{h(\varphi)} \cos rt \frac{d}{dt}(l_\varphi^1(t))\, dt$. Аналогичное выражение получим для второго интеграла. Поэтому

$$f(r, \varphi) = \int_0^{h(\varphi)} \cos rt \frac{d}{dt}(l_\varphi(t))\, dt, \tag{4}$$

где $l_\varphi(t) = l_\varphi^1(t) + l_\varphi^2(t)$ равна сумме длин дуг $\Gamma_i(t) = \{u \in \Gamma_i : u\xi_\varphi \leqslant t\}$, $i = 1, 2$. Пусть $\tilde{\Gamma} = \{-\Gamma_2\} \cup \Gamma_1$. Очевидно, $l_\varphi(t)$ равна длине дуги $\tilde{\Gamma}(t) = \{u \in \tilde{\Gamma} : |u\xi_\varphi| \leqslant t\}$. Кривая $\tilde{\Gamma}$, очевидно, в системе координат $\tilde{X}_1\tilde{O}\tilde{X}_2$ есть график неотрицательной строго выпуклой вверх функции $\psi_\varphi(t)$, $t \in [-h(\varphi), h(\varphi)]$, причем $\psi_\varphi(t) = f_\varphi(t)$ при $t \in [0, h(\varphi)]$, где f_φ — функция, определенная выше. Если ∂D из класса C^3, то $\psi_\varphi \in C^3(-h(\varphi), h(\varphi))$, при этом

$$l_\varphi(t) = \int_{-t}^{t} \sqrt{1 + (\psi'_\varphi(t))^2}\, dt. \quad (5)$$

Поэтому $l''_\varphi(0) = 0$. Если $l'''_\varphi(t) \geqslant 0$, $t \in [0, h(\varphi))$, то $l''_\varphi(t) \geqslant l''_\varphi(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченное, строго выпуклое, симметричное относительно нуля тело из R^2. Пусть $\partial D \in C^3$ и $l'''_\varphi(t) \geqslant 0$, $t \in [0, h(\varphi))$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда $\{x \in R^2 : F(x) = 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, где M_k — симметричные относительно нуля замкнутые аналитические кривые, задаваемые в полярных координатах уравнениями $r = r_k(\varphi)$ и $(k-1)\pi/h(\varphi) < r_k(\varphi) < k\pi/h(\varphi)$, $k \in N$. Все нули простые в том смысле, что $\partial f(r_k(\varphi), \varphi)/\partial r \neq 0$, $k \in N$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если f — целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, принимающая на вещественной оси вещественные значения, ограничена на ней и $\operatorname{sign} f(k\pi/\sigma) = (-1)^k$, $k \in Z$, то f имеет бесконечно много вещественных нулей $\{a_k\}$, $k \in Z$,* и все они простые, причем $(k-1)\pi/\sigma < a_k < k\pi/\sigma$, $k \in Z$.

Доказательство. Для целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на вещественной оси, известна следующая интерполяционная формула (см. [3, с. 188]):

$$\sin \alpha f'(x) - \sigma \cos \alpha f(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin^2 \alpha/(\alpha - k\pi)^2 f((k\pi - \alpha)/\sigma - x) \quad (6)$$

$\forall \alpha$, $x \in R$. Полагая $x = \alpha/\sigma$, получим

$$\sin \alpha f'\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \sigma \cos \alpha f\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = -\sigma \sum_{k} \sin^2 \alpha/(\alpha - k\pi)^2 \,|f(k\pi/\sigma)|. \quad (7)$$

Из (7) очевидным образом вытекает простота нулей функции $f(x)$. Докажем, что в интервале $(k\pi/\sigma, (k+1)\pi/\sigma)$, $k \in Z$, только один нуль. Для любого нуля $x_0 \in (k\pi/\sigma, (k+1)\pi/\sigma)$ из (7) следует, что $\operatorname{sign} f'(x_0) = (-1)^{k+1}$. Так как f — целая, то в этом интервале имеется лишь конечное число нулей. Пусть их больше одного. Возьмем любые два соседние x_1 и x_2, т. е. $x_1 < x_2$ и $\forall x \in (x_1, x_2)$ $f(x) \neq 0$. Считая для определенности $f'(x_i) > 0$, заключаем, что $\exists$ числа $\xi_1, \xi_2 : x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$ и $f(\xi_1) > f(x_1) = 0$, $f(\xi_2) < f(x_2) = 0$. Поэтому между ξ_1 и ξ_2 имеется еще хотя бы один нуль. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть $f(\xi) = \int_0^{\sigma} \cos \xi x g(x)\, dx$, где $g \in C^2[0, \sigma) \cap L[0, \sigma]$, $g^{(k)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, \sigma)$, $k = 0, 1, 2$, и $g''(x) \not\equiv 0$ на $[0, \sigma)$. Тогда $\operatorname{sign} f(k\pi/\sigma) = (-1)^k$, $k \in Z$.*

Доказательство. В силу четности f лемму достаточно доказать при $k \geqslant 0$. При $k = 0$ утверждение леммы очевидно. Пусть $k > 0$ и $\tilde{g}(x) = g(\sigma x/k\pi)$, $x \in [0, k\pi)$. Тогда

$$f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) = \int_0^{\sigma} \cos(k\pi x/\sigma)\, g(x)\, dx = \frac{\sigma}{k\pi} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \int_0^{\pi} \cos x \tilde{g}(x + p\pi)\, dx.$$

Пусть $k = 2n$, $n \in N$; тогда

$$f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) = -\frac{\sigma}{k\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos x g_1(x)\, dx + \ldots + \int_0^{\pi} \cos x g_{k-1}(x)\, dx\right],$$

где $g_i(x) = \tilde{g}(x + i\pi) - \tilde{g}(x + i\pi - \pi)$, $i = 1, 3, \ldots, k-1$. При выполнении условий леммы $g_i(x) \geqslant 0$ и $g_i'(x) \geqslant 0$ при $x \in [0, \pi)$. Поэтому $g_i(x) \leqslant g_i(\pi - x)$ $\forall x \in (0, \pi/2]$, $i = 1, 3, \ldots, k-1$. Тогда $\int\limits_0^\pi g_i(x) \cos x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} [g_i(\pi - x) - g_i(x)] \cos x dx \leqslant 0$. Так как $\tilde{g}''(x) \geqslant 0$ и $\tilde{g}''(x) \not\equiv 0$ при $x \in [0, k\pi)$, то существует номер i и точка $x_0 \in (0, \pi/2]$ такие, что $g_i(\pi - x_0) - g_i(x_0) > 0$. Поэтому при этом номере $\int\limits_0^\pi \cos x g_i(x)\, dx < 0$. Отсюда $f(k\pi/\sigma) > 0$. При $k = 2n + 1$ рассуждения аналогичные, следует лишь учесть, что в этом случае

$$f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{k\pi}\left[\int\limits_0^\pi \cos x \tilde{g}(x)\, dx + \ldots + \int\limits_0^\pi \cos x \left[\tilde{g}(x + (k-1)\pi) - \tilde{g}(x + (k-2)\pi)\right] dx.\right.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из условия теоремы следует, что $l_\varphi \in C^3[0, h(\varphi)) \cap L$, $l_\varphi^{(k)}(t) \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, 3$, $t \in [0, h(\varphi))$. Убедимся, что $l_\varphi'''(t) \not\equiv 0$ при $t \in [0, h(\varphi))$. Если бы $l_\varphi'''(t) \equiv 0$, то $l_\varphi''(t) \equiv l_\varphi''(0) = 0$, т. е. $l_\varphi'(t)$ тождественно равно на $[0, h(\varphi))$ некоторой константе. Но так как $\partial D \in C^1$, то $l_\varphi'(t) \to \infty$, $t \to h(\varphi) - 0$. Поэтому $l_\varphi'''(t) \not\equiv 0$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$.

Применяя лемму 2, получаем, что $\operatorname{sign} f(k\pi/h(\varphi), \varphi) = (-1)^k$, $k \in Z$. Отсюда по лемме 1 следует, что для положительных нулей $\{a_k(\varphi)\}_{k=1}^\infty$ справедливы неравенства $(k-1)\pi/h(\varphi) < a_k(\varphi) < k\pi/h(\varphi)$, $\partial f(a_k(\varphi), \varphi)/\partial r \neq 0$, $k \in N$.

Рассмотрим $M_k = \{x \in R^2 : x_1 = a_k(\varphi) \cos \varphi,\ x_2 = a_k(\varphi) \sin \varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Очевидно, что M_k — компакт. По теореме о неявной функции для любого φ_0 существуют окрестность $V(\varphi_0, \varepsilon)$ и единственная функция $r_k(\varphi) \in C(V)$ такие, что $r_k(\varphi_0) = a_k(\varphi_0)$ и $f(r_k(\varphi), \varphi) \equiv 0$ в V. Очевидно, функция f аналитическая в плоскости, т. е. разлагается по степеням $\{r^n \varphi^m\}$, $n, m \in N \cup \{0\}$, во всей плоскости. В этом случае (см., например, [4, § 1.3]) функция $r_k(\varphi)$ в окрестности точки φ_0 аналитическая. Возьмем $\varepsilon = \varepsilon(\varphi_0)$ настолько малым, чтобы замыкание открытого круга $K(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке $(a_k(\varphi_0) \cos \varphi_0, a_k(\varphi_0) \sin \varphi_0)$ не имело общих точек с M_{k-1} и M_{k+1} (это можно сделать). Очевидно, $\{K(\varepsilon(\varphi))\}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, есть открытое покрытие компакта M_k, поэтому из него можно выделить конечное подпокрытие. Склеивая $r_k(\varphi)$, получаем утверждение теоремы 1.

2. Пусть $D \subset R^2$ ограниченное, строго выпуклое, симметричное относительно нуля тело с границей $\partial D \in C^2$. Рассмотрим преобразование Фурье характеристической функции множества D $G(x) = G(x_1, x_2) = \iint\limits_D e^{-iux} du_1 du_2$.

Пусть $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $\xi_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Используя связь между преобразованиями Фурье и Радона (см. [5, с. 19, 39]), получим

$$g(r, \varphi) = G(r \cos \varphi, r \sin \varphi)/2 = \int\limits_0^{h(\varphi)} \cos rt \sigma_\varphi(t)\, dt, \tag{8}$$

где $\sigma_\varphi(t) \geqslant 0$ длина отрезка прямой $u\xi_\varphi = t$, лежащего в D, а $h(\varphi)$ — опорная функция D. Из построений п. 1 видно, что $\sigma_\varphi(t) = f_\varphi(t) - g_\varphi(t)$, где $f_\varphi, g_\varphi \in C^2[0, h) \cap L$, $f_\varphi''(t) \leqslant 0$, $g_\varphi''(t) \geqslant 0$, $t \in [0, h)$, $h = h(\varphi)$. Очевидно, $f_\varphi'(0) = g_\varphi'(0)$, поэтому $\sigma_\varphi \in C^2[0, h) \cap L$, $\sigma_\varphi(t) \geqslant 0$, $\sigma_\varphi'(t) \leqslant 0$, $\sigma_\varphi''(t) \leqslant 0$ при $t \in [0, h(\varphi))$.

Т е о р е м а 2. *Пусть D — ограниченное, строго выпуклое, симметричное относительно нуля тело из R^2 и $\partial D \in C^2$. Тогда* $\{x \in R^2 : G(x) = 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, *где M_k — симметричные относительно нуля, замкнутые, аналитические кривые, задаваемые в полярных координатах уравнениями $r = r_k(\varphi)$, $k\pi/h(\varphi) < r_k(\varphi) < (k+1)\pi/h(\varphi)$, $k \in N$. Все нули простые в том смысле, что в них $\partial g(r_k(\varphi), \varphi)/\partial r \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\partial D \in C^2$, то $\sigma_\varphi''(t) \not\equiv 0$. Пусть $M(\varphi) = \max\limits_{[0,h]} \sigma_\varphi(t) = \sigma_\varphi(0)$, $\tilde{\sigma}_\varphi(t) = M(\varphi) - \sigma_\varphi(t)$. Функция $\tilde{\sigma}_\varphi$ удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому для функции $g(r, \varphi) = -\int\limits_0^{h(\varphi)} \cos rt\tilde{\sigma}_\varphi(t)\,dt + M(\varphi)\sin rh(\varphi)/r$ получаем, что $g(0, \varphi) > 0$ и $\operatorname{sign} g(k\pi/h(\varphi), \varphi) = (-1)^{k+1}$, $k \in Z$, $k \neq 0$. Считаем φ фиксированным. По интерполяционной формуле (6) при $f(r) = g(r, \varphi)$, $h = h(\varphi)$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$ имеем

$$\sin\alpha f'(\alpha/h) - h\cos'\alpha f(\alpha/h) = h\sin^2\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2\,|\,f(k\pi/h)|\,(\alpha^2 + k^2\pi^2)/\right.$$
$$\left./(\alpha^2 - k^2\pi^2)^2 - f(0)/\alpha^2\right). \tag{9}$$

Из формулы

$$f(\alpha/h) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (f(k\pi/h)/(\alpha - k\pi) + f(-k\pi/h)/(\alpha + k\pi)) + \right.$$
$$\left. + f(0)/\alpha\right)\sin\alpha,$$

полученной интегрированием (6) [6, с. 144, задача № 165], имеем

$$f(\alpha/h) = \sin\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} -2\,|\,f(k\pi/h)\,|\,\alpha/(\alpha^2 - k^2\pi^2) + f(0)/\alpha\right). \tag{10}$$

Из (10) видно, что при $0 < r < \pi/h$ функция f нулей не имеет. Рассмотрим следующее выражение:

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2\,|\,f(k\pi/h)\,|(\alpha^2 + k^2\pi^2)/(\alpha^2 - k^2\pi^2)^2 - f(0)/\alpha^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2\,|\,f(k\pi/h)\,|\,\alpha/\right.$$
$$\left./(\alpha^2 - k^2\pi^2) - f(0)/\alpha\right) = 4\alpha\pi^2\sum_{k=1}^{\infty} |\,f(k\pi/h)\,|\,k^2/(\alpha^2 - k^2\pi^2)^2. \tag{11}$$

Из (9) — (11) следует, что если $\alpha_0 \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in N$, и $f(\alpha_0/h) = 0$, то $\operatorname{sign} f'(\alpha_0/h) = (-1)^k$. Поэтому все нули функции $f(r) = g(r, \varphi)$ простые, и для положительных нулей $\{a_k(\varphi)\}$, $k \in N$, имеем $k\pi/h(\varphi) < a_k(\varphi) < (k+1)\pi/h(\varphi)$. Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 верна, если строгую выпуклость заменить просто выпуклостью.

З а м е ч а н и е 2. Из теорем 1, 2 видно, что $r_k(\varphi)/k \to \pi/h(\varphi)$, $k \to \infty$, равномерно на $[0, 2\pi]$. Поэтому если кривая S, заданная в полярных координатах $r = 1/h(\varphi)$, не выпукла (такие примеры есть), то с некоторого номера кривые $r = r_k(\varphi)/k$, а значит, и кривые $r = r_k(\varphi)$ не будут выпуклыми. Под выпуклостью кривой понимается выпуклость множества, которое она ограничивает.

З а м е ч а н и е 3. Если известны нули функции F или G, $\{r_k(\varphi)\}$, $k \in N$, то множество D восстанавливается единственным образом по опорной функции $h(\varphi)$.

3. Пусть $A = A(R^2)$ — алгебра функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся интеграл Фурье $\varphi(x) = \widehat{g}(x) = \int\limits_{R^2} e^{-iux} g(u)\,du$, $\|\varphi\|_A = \int\limits_{R^2} |g(u)|\,du < \infty$.

Для регулярности в C метода R_n достаточно доказать, при условии $\varphi(0) = 1$, что $\varphi \in A$ (см. [1]). Нам понадобится лемма о нулях. Условимся считать равным единице число нулей функции на отрезке, если она тождественно равна нулю на нем.

Лемма 3. *Если μ — конечная, комплексная, борелевская мера в R^2 с компактным носителем, то для любого $a > 0$ функции* $\operatorname{Re} g(x)$, $\operatorname{Im} g(x)$, *где* $g(x) = \int\limits_{R^2} e^{-iux} d\mu(u)$, *рассматриваемые на* $[-a, a]^2$, *как функции от* x_i, $i = 1, 2$, *имеют ограниченное по другой переменной число нулей.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать для $\operatorname{Re} g(x)$ при $i = 1$. Обозначим через $N(x_2)$, $x_2 \in J = [-a, a]$, число нулей функции $\operatorname{Re} g(x_1, x_2)$ от $x_1 \in J$. Утверждение леммы сводится к тому, что

$$\sup_{x_2 \in J} N(x_2) < \infty. \tag{12}$$

Докажем локальную ограниченность $N(x_2)$, отсюда будет следовать (12).

Пусть $x_2^0 \in J$ и $\operatorname{Re} g(x_1, x_2^0) \not\equiv 0$, $x_1 \in J$. Функция $\psi_{x_2}(z) = (\operatorname{Re} g(x, x_2))|_{x=z}$, $z \in \mathbb{C}$, целая и $\psi_{x_2^0}(z) \not\equiv 0$. Поэтому существуют круг $K = K(x_2^0)$ и число $m > 0$ такие, что $J \subset K$ и при $z \in \partial K$ $|\psi_{x_2^0}(z)| \geqslant m$. В силу простой оценки $|\psi_{x_2}(z) - \psi_{x_2^0}(z)| \leqslant C|x_2 - x_2^0|$, $z \in \partial K$, где $C = C(\mu, a) > 0$; при $|x_2 - x_2^0| \leqslant m/(2C)$ и $z \in \partial K$ $|\psi_{x_2}(z) - \psi_{x_2^0}(z)| < |\psi_{x_2^0}(z)|$. По теореме Руше функции $\psi_{x_2^0}$ и ψ_{x_2} имеют внутри круга K одинаковое число нулей, равное $\tilde{N}(x_2^0)$. Поэтому при $|x_2 - x_2^0| \leqslant m/(2C)$ $N(x_2) \leqslant \tilde{N}(x_2^0)$.

Пусть $x_2^0 \in J$ и $\operatorname{Re} g(x_1, x_2^0) \equiv 0$ на J (а значит, и на R). Тогда либо существуют $p \in N$ и аналитическая в R^2 функция $f(x_1, x_2)$ такие, что $\operatorname{Re} g(x_1, x_2) = (x_2 - x_2^0)^p f(x)$ и $f(x_1, x_2) \not\equiv 0$, либо $\operatorname{Re} g(x) \equiv 0$ в R^2. Во втором случае $N(x_2) \equiv 1$. Рассмотрим первый случай. Очевидно, при $x_2 \neq x_2^0$ $N(x_2)$ равно количеству нулей функции $f(x_1, x_2)$ от $x_1 \in J$. Применяя те же рассуждения к функции $f(x)$, получим, что существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\tilde{N}(x_2^0)$ такие, что при $|x_2 - x_2^0| \leqslant \varepsilon$ $N(x_2) \leqslant \max\{\tilde{N}(x_2^0), N(x_2^0)\} = \max\{\tilde{N}(x_2^0), 1\}$. Лемма 3 доказана.

Пусть D, W — ограниченные тела из R^2, симметричные относительно нуля, мера μ равномерно распределена по площади или границе D так, что $\int\limits_{R^2} d\mu(u) = 1$. Тогда справедлива теорема.

Теорема 3. *Если D удовлетворяет условиям теоремы* 1 *(в случае, когда мера равномерно распределена по его границе) или теоремы* 2 *(по площади), то метод Бернштейна — Рогозинского регулярен в* $C(T^2)$ *тогда и только тогда, когда при некотором* $n \in N$ $\partial W = \gamma^{-1} M_n$, *где* M_n — *кривые из соответствующих теорем.*

Доказательство. Необходимость следует из (1). Достаточность. В нашем случае $\varphi(0) = 1$. Проверим, что $\varphi \in A$. Так как частные производные по x_1 и x_2 функции φ ограничены, то (см. [1, теорема 4, III, $m = 2$]) остается доказать, что функции $\operatorname{Re}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ как функции от x_i, $i = 1, 2$, имеют ограниченное по другой переменной число интервалов выпуклости. Для этого нужно к функциям $\partial^2\varphi/\partial x_i^2$, $i = 1, 2$, применить лемму 3. Теорема доказана.

Ранее был исследован случай, когда D — круг (см. [1, 2]).

1. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, **44**, № 6, с. 1378—1409.
2. *Chandrasekharan K., Minakshisundaram S.* Some results on double Fourier series.— Duke Math. J., 1947, **14**, № 3, p. 731—753.
3. *Ахиезер Н. М.*. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 408 с.
4. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1971.— 232 с.
5. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин И. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.— М.: Физматгиз, 1962.— 656 с.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1.— М.: Наука, 1978.— 392 с.

Донецк. гос. ун-т

Поступила 18.05.82