УДК 512.83

Н. В. Кухаренко

Спектральные свойства матриц Якоби

Исследованию спектральных свойств якобиевых матриц уделено немалое внимание со стороны отечественных и зарубежных авторов [1—4]. В данной статье приводятся новые теоремы, позволяющие с большей, по сравнению с известными [5—8] методами, точностью установить границы характеристического спектра и размаха матриц, а также установить верхнюю и нижнюю границы для их минимальных и максимальных собственных чисел (с. ч).

1. Предварительно рассмотрим элементарную матрицу Якоби минимальной размерности

$$J_2(b,\ a,\ c) = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{Vmatrix}, \quad a_i,\ b_1,\ c_1 \in R; \qquad b_1c_1 > 0. \tag{1}$$

С. ч. и размах этой матрицы определяются выражениями

$$\lambda_{1,2} = (a_1 + a_2)/2 \pm [(a_1 - a_2)^2/4 + b_1c_1]^{1/2}; \tag{2}$$

$$S(J_2) = |\lambda_1 - \lambda_2| = 2[(a_1 - a_2)^2/4 + b_1c_1]^{1/2}. \tag{3}$$

Отсюда со всей очевидностью следует такое свойство.

Свойство. *При фиксированных значениях b_1, c_1 матрица* (1) *имеет минимальный размах $S(J_2)_{\min} = 2(b_1c_1)^{1/2}$ при любых значениях $a_1 = a_2$ и минимальный спектральный радиус $r(\lambda)_{\min} = (b_1c_1)^{1/2}$ — лишь при $a_1 = a_2 = 0$.*

2. Пусть задана вещественная матрица Якоби

$$J_n(b,\ a,\ c) = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & 0 & \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & & \\ & 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

в которой $b_ic_i > 0$, $i = \overline{1, n-1}$.

Теорема 1. *Экстремальные с. ч. $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ матрицы Якоби $J_n(b,\ a,\ c) \in R$, $bc > 0$, находятся в пределах*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\eta_i + \zeta_i\} \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i + |(b_ic_i)^{1/2}| + |(b_{i-1}c_{i-1})^{1/2}|\}; \tag{5}$$

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\eta_i - \zeta_i\} \geqslant \lambda_{\min} \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i - |(b_ic_i)^{1/2}| - |(b_{i-1}c_{i-1})^{1/2}|\}, \tag{6}$$

где

$$\eta_i \pm \zeta_i = (a_i + a_{i+1})/2 \pm [(a_i - a_{i+1})^2/4 + b_i c_i]^{1/2}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad b_0, c_0 = 0 \qquad (7)$$

Доказательство. Выделим в (4) $(n-1)$ элементарных матриц Якоби вида (1):

$$J_2^{(i)} = \begin{Vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & a_{i+1} \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (8)$$

Подобно (2), с. ч. $\mu_{1,2}^{(i)} = \eta_i \pm \zeta_i$, $\mu_1 > \mu_2$, таких матриц определяются выражениями (7). Положим, что среди этих элементарных матриц найдена такая матрица $J_2^{(k)}$, для которой $\mu_1^{(k)} = \eta_k + \zeta_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\eta_i + \zeta_i\}$. Выделим в (4) матрицу Якоби большей размерности, окаймляющую сверху (или снизу) матрицу $J_2^{(k)}$:

$$J_3^{(k)} = \begin{Vmatrix} a_{k-1} & b_{k-1} & 0 \\ c_{k-1} & a_k & b_k \\ 0 & c_k & a_{k+1} \end{Vmatrix}. \qquad (9)$$

Все с. ч. этой матрицы действительные и различные [1], поэтому их можно расположить в убывающей последовательности $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$. Известно [1, 3], что с. ч. матриц $J_3^{(k)}$, $J_2^{(k)}$ строго чередуются: $\gamma_1 > \mu_1 > \gamma_2 > \mu_2 > \gamma_3$, т. е. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} \{\gamma_i\} > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2} \{\mu_i\}$.

По той же причине максимальное с. ч. окаймляющей матрицы $J_4^{(k)}$ строго превышает максимальные с. ч. окаймляемых матриц $J_3^{(k)}$ и $J_2^{(k)}$. Увеличивая размерность окаймляющих матриц Якоби вплоть до n, приходим к левому неравенству (5). (Левый знак равенства в (5) возможен при $n = 2$.)

Пусть теперь $J_2^{(m)}$ — матрица вида (8) (при $i = m$), у которой $\mu_2^{(m)} = \eta_m - \zeta_m = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\eta_i - \zeta_i\}$.

Используя применительно к матрице $J_2^{(m)}$ аналогичные приведенным выше доказательства, приходим к левому неравенству (6).

Далее вместо (4) запишем симметрическую матрицу Якоби

$$J_n(\rho, a, \rho) = \begin{Vmatrix} a_1 & \rho_1 & 0 & & & \\ \rho_1 & a_2 & \rho_2 & & 0 & \\ 0 & \rho_2 & a_3 & \cdots & & \\ & 0 & & & a_{n-1} & \rho_{n-1} \\ & & & & \rho_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}, \qquad (10)$$

в которой

$$\rho_i = (b_i c_i)^{1/2}. \qquad (11)$$

Матрицы (4) и (10), связанные зависимостями (11), имеют одинаковые спектры [1]. В соответствии с теоремой Гершгорина [2], для матрицы (10) запишем $|a_i - \lambda| = |\lambda - a_i| \leqslant |\rho_i| + |\rho_{i-1}|$. Так как $(a_i - \lambda) \leqslant |a_i - \lambda|$, $(\lambda - a_i) \leqslant |\lambda - a_i|$, то $a_i - |\rho_i| - |\rho_{i-1}| \leqslant \lambda \leqslant a_i + |\rho_i| + |\rho_{i-1}|$, откуда после подстановки (11) следуют правые неравенства (5), (6). Теорема доказана.

Следствие 1. *Матрица Якоби $J_n(b, a, c) \in R$, $bc > 0$, с одинаковыми диагональными элементами имеет размах*

$$S(J_n) = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|(b_i c_i)^{1/2}| + |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\} \qquad (12)$$

и спектральный радиус

$$r(\lambda) = \max\{|\lambda_{\max}|, |\lambda_{\min}|\} = |a| + S(J_n)/2. \qquad (13)$$

Действительно, при $a_i = a$, $i = \overline{1, n}$, согласно (5), (6) имеем

$$\lambda_{\max} \leqslant a + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|(b_i c_i)^{1/2}| + |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\}; \qquad \lambda_{\min} \geqslant$$
$$\geqslant a + \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{-|(b_i c_i)^{1/2}| - |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\}. \tag{14}$$

Для двух множеств действительных чисел, отличающихся только знаками, справедливо очевидное равенство $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|(b_i c_i)^{1/2}| + |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\} = -\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{-|(b_i c_i)^{1/2}| - |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\}$, с учетом которого из (14) следуют (12) и (13).

Теорема 2. *Если $J_m(b, a, c)$, $J_{m+1}(b, a, c) \in R$, $bc > 0$, — окаймляемая и окаймляющая матрицы Якоби, то при увеличении (уменьшении) размаха $S(J_m)$ размах $S(J_{m+1})$ тоже увеличивается (уменьшается).*

Доказательство. Пусть $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_{m-1} > \mu_m$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \ldots > \lambda_m > \lambda_{m+1}$ — с. ч. матриц J_m и J_{m+1} соответственно. Тогда на основании уже упомянутых свойств [1, 3] имеем

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \ldots > \mu_{m-1} > \lambda_m > \mu_m > \lambda_{m+1}. \tag{15}$$

Предположим, вопреки утверждению теоремы, обратное: при увеличении размаха $S(J_m) = |\mu_1 - \mu_m|$ размах $S(J_{m+1}) = |\lambda_1 - \lambda_{m+1}|$ не увеличивается. Тогда придем к неравенству

$$|\mu_1 - \mu_m| \geqslant |\lambda_1 - \lambda_{m+1}|. \tag{16}$$

Однако из (15) следует

$$\lambda_1 > \mu_1 > \mu_m > \lambda_{m+1} \Rightarrow \lambda_1 > \mu_1 > \mu_m - \lambda_{m+1} > 0 \Rightarrow \lambda_1 > \mu_1 + \lambda_{m+1} >$$
$$> \mu_m > 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_{m+1} > \mu_1 - \mu_m > 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_{m+1} = |\lambda_1 - \lambda_{m+1}| > \tag{17}$$
$$> |\mu_1 - \mu_m| = \mu_1 - \mu_m.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

— Следствие 2. *Если в матрице Якоби $J_n(b, a, c) \in R$, $bc > 0$, увеличить (уменьшить) хотя бы одну из величин $|a_i - a_{i+1}|$ или $b_i c_i$, $i = \overline{1, n-1}$, то ее размах $S(J_n)$ тоже увеличится (уменьшится).*

Действительно, согласно (3) при возрастании указанных величин возрастает размах $S(J_2)$ образуемой или элементарной матрицы Якоби J_2, а это, в соответствии с теоремой 2, приводит к увеличению размаха всех окаймляющих ее матриц, в том числе и матрицы J_n.

3. Приведем некоторые более частные результаты.

Лемма 1. *Матрица Якоби с нулевой диагональю $J_n(b, 0, c) \in R$ имеет спектр, симметричный относительно мнимой оси комплексной плоскости.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что при $a_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, все главные миноры нечетного порядка матрицы (4) равны нулю и поэтому ее характеристический определитель имеет вид

$$|J_n - \lambda E_n| = \lambda(\lambda^{2k} + q_{2(k-1)}\lambda^{2(k-1)} + \ldots + q_2\lambda^2 + q_0), \tag{18}$$

где $2k + 1 = n$. (Если $2k = n$, то в выражении (18) будет отсутствовать первый сомножитель λ.) Четность степеней заключенного в скобки полинома гарантирует справедливость леммы при четном и нечетном n.

Теорема 3. *Из всех матриц Якоби $J_n(b, a, c) \in R$, $bc > 0$, отличающихся друг от друга только диагональными элементами a_i, $i = \overline{1, n}$, наименьший размах*

$$S(J_n)_{\min} \leqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|(b_i c_i)^{1/2}| + |(b_{i-1} c_{i-1})^{1/2}|\} \tag{19}$$

и наименьший спектральный радиус

$$r(\lambda)_{\min} = S(J_n)_{\min}/2 \tag{20}$$

имеет та матрица, у которой все элементы $a_i = 0$.

Доказательство. Выделим в матрице $J_n(b, 0, c)$ с нулевой диагональю $(n-1)$ элементарных матриц $J_2(b, 0, c)$. Каждая такая матрица имеет минимальный спектральный радиус и минимальный размах (см. свойство). Поэтому, в соответствии с теоремой 2 и ее следствием 2, размах исходной матрицы $J_n(b, 0, c)$ тоже будет минимальным и, согласно следствию 1, будет определяться выражением (12), что доказывает первую часть данной теоремы.

Согласно лемме 1 с. ч. матрицы $J_n(b, 0, c)$ попарно симметричны, т. е. $\lambda_{\max} = -\lambda_{\min}$, поэтому $S(J_n)_{\min} = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| = 2|\lambda_{\max}|$ и, следовательно, $r(\lambda)_{\min} = |\lambda_{\max}| = S(J_n)_{\min}/2$, что доказывает вторую часть теоремы.

4. Используем полученные результаты для двух числовых матриц

$$J = \left\| \begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 18 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|; \quad J = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для первой матрицы по формулам (5)—(7) вычисляем $\max\{4{,}08;\ 0{,}24;\ 4{,}13\} \leqslant \lambda_{\max} \leqslant \max\{5{,}0;\ 5{,}0;\ 5{,}0;\ 5{,}0\}$; $\min\{-8{,}08;\ -4{,}24;\ -4{,}13\} \geqslant \lambda_{\min} \geqslant \min\{-7{,}0;\ -11{,}0;\ -7{,}0;\ -3{,}0\}$ откуда

$$\lambda_{\min} \in [-11{,}0;\ -8{,}08]; \quad \lambda_{\max} \in [4{,}13;\ 5{,}0] \Rightarrow \lambda \in [-11{,}0;\ 5{,}0]; \quad S(J) = 16.$$

Для сравнения приведем результаты вычисления границ спектра и размаха этой же матрицы на основании ранее известных теорем [6—9]: по Брауну и Фарнеллу $\lambda \in [-20{,}5;\ 20{,}5]$; по Фурману $\lambda \in [-20{,}0;\ 20{,}0]$; по Гершгорину $\lambda \in [-19{,}0;\ 16{,}0]$; по Островскому $\lambda \in [-13{,}7;\ 7{,}7]$; по Брауэру $\lambda \in [-12{,}45;\ 12{,}05]$; по Мирскому $S(J) = 29{,}1$.

Пересечение областей Островского и Брауэра дает $\lambda \in [-12{,}45;\ 7{,}7] \Rightarrow S(J) = 20{,}15$, т. е. даже совместное использование двух наиболее точных методов приводит к более грубым оценкам границ спектра и размаха матрицы по сравнению с оценками (5), (6). К тому же (5), (6) локализуют не только весь спектр матрицы в целом, но и устанавливают подобласти локализации экстремальных с. ч. (Для рассматриваемой матрицы точные расчетные значения $\lambda_{\min} = -8{,}52$; $\lambda_{\max} = 5{,}0 \Rightarrow S(J) = 13{,}52$.)

Для второй из указанных выше матриц по формулам (19), (20) вычисляем $S(J) \leqslant 2\max\{6,\ 8,\ 6,\ 4\} = 16$; $r(\lambda) = 8{,}0$. Тогда на основании леммы 1 $\lambda_{\min} \geqslant -r(\lambda)$, $\lambda_{\max} \leqslant r(\lambda) \Rightarrow \lambda \in [-8{,}0;\ 8{,}0]$, а на основании (5), (6) $\lambda_{\min} \in [-8{,}0;\ -6{,}0]$; $\lambda_{\max} \in [6{,}0;\ 8{,}0]$.

Для этой же матрицы наилучший из результатов, полученных другими методами (по Островскому) — $\lambda \in [-10{,}7;\ 10{,}7] \Rightarrow S(J) = 21{,}4$; точные значения $\lambda_{\min} = -6{,}51$; $\lambda_{\max} = 6{,}51 \Rightarrow S(J) = 13{,}02$. Таким образом, и в этом случае оценки (5), (6), (19), (20) ближе к точным результатам, нежели оценки по другим методам.

5. Проведем сравнительный анализ оценок (5), (6) с известными оценками М. Г. Крейна [10], которые при принятых обозначениях (11) имеют вид

$$a_{\min} - 2\rho_{\max}\cos[\pi/(n+1)] \leqslant \lambda_{\min} \leqslant a_{\max} - 2\rho_{\min}\cos[\pi/(n+1)]; \tag{21}$$

$$a_{\min} + 2\rho_{\min}\cos[\pi/(n+1)] \leqslant \lambda_{\max} \leqslant a_{\max} + 2\rho_{\max}\cos[\pi/(n+1)]. \tag{22}$$

В сугубо частном случае, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a \Rightarrow a_{\min} = a_{\max} = a$; $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{n-1} = \rho \Rightarrow \rho_{\min} = \rho_{\max} = \rho$, оценки (21), (22) дают точные значения границ спектра $\lambda_{\min} = a - 2\rho\cos[\pi/(n+1)]$; $\lambda_{\max} = a + 2\rho\cos[\pi/(n+1)]$, поэтому следует ожидать, что при некоторых других частных условиях, близких к указанным, оценки (21), (22) могут дать более точный результат, чем оценки (5), (6). Выявим эти условия.

Для нижней и верхней границ спектра на основании (5), (6) с учетом (11) имеем

$$\lambda_{\min} \geqslant \min \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i - \rho_i - \rho_{i-1}\} = a_{\min} - 2\rho_{\max}; \tag{23}$$

$$\lambda_{\max} \leqslant \max \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i + \rho_i + \rho_{i-1}\} = a_{\max} + 2\rho_{\max}. \tag{24}$$

Если

$$\rho_{\max} = \rho_i = \rho_{i-1} = \rho, \quad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

то из (21), (23) и (22), (24) следует $\lambda_{\min} \geqslant a_{\min} - 2\rho \cos[\pi/(n+1)] > a_{\min} - 2\rho$; $\lambda_{\max} \leqslant a_{\max} + 2\rho\cos[\pi/(n+1)] < a_{\max} + 2\rho$, т. е. при условии (25) оценка нижней и верхней границ спектра по Крейну дает заведомо лучшие результаты, чем оценки (5), (6); при этом очевидно, что с увеличением размерности матрицы преимущество оценок Крейна становится менее заметным (уже при $n \geqslant 6$ разность результатов по сравниваемым оценкам не превышает 10 %).

В (5), (6) обозначим $\max\{\eta_i + \zeta_i\} = \eta_k + \zeta_k$; $\min\{\eta_i - \zeta_i\} = \eta_l - \zeta_l$. Тогда условия, при которых и две другие оценки Крейна (21), (22) лучше соответствующих оценок (6), (5), запишем в форме неравенств $\lambda_{\min} \leqslant a_{\max} - 2\rho_{\min}\cos[\pi/(n+1)] < \eta_l - \zeta_l$; $\lambda_{\max} \geqslant a_{\min} + 2\rho_{\min}\cos[\pi/(n+1)] > \eta_k + \zeta_k$. Отсюда, учитывая (7), получаем

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \geqslant 4\rho_{\min}\cos[\pi/(n+1)] - (a_{\max} - a_{\min}) > (a_k + a_{k+1})/2 + \\ + [(a_k - a_{k+1})^2/4 + \rho_k^2]^{1/2} - (a_l + a_{l+1})/2 + [(a_l - a_{l+2})^2/4 + \rho_l^2]^{1/2} > 0. \tag{26}$$

Если, подобно (25), $\rho_{\min} = \rho_k = \rho_l = \rho$, и, кроме того,

$$a_k = a_{k+1} = a_{\max}; \qquad a_l = a_{l+1} = a_{\min}, \quad k \neq l, \tag{27}$$

то из (26) следует

$$2\cos[\pi/(n+1)] - 1 > (a_{\max} - a_{\min})/\rho. \tag{28}$$

Таким образом, если недиагональные элементы матрицы Якоби удовлетворяют условиям (25), а диагональные — условиям (27), (28), то все четыре оценки ее спектра по Крейну лучше оценок (5), (6).

Если же условия (25), (27) выполняются, а условие (28) — нет, то две из оценок (5), (6) по крайней мере не уступают соответствующим оценкам Крейна. Наконец, из (25), (26) следует, что если

$$4\cos\pi/(n+1) < (a_{\max} - a_{\min})/\rho, \tag{29}$$

то независимо от условий (27) те же две из оценок (5), (6) заведомо лучше оценок Крейна. В обоих этих (и близких к ним) случаях наиболее точный общий результат получается как пересечение областей, полученных по оценкам (5), (6) и (21), (22).

Для иллюстрации этих выводов приведем две матрицы Якоби частного [illegible]:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -4 \end{Vmatrix}; \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Для первой матрицы, удовлетворяющей условиям (25), (27) и неудовлетворяющей условию (28), на основании (5) — (7) $\lambda_{\min} \in [-16{,}0; \; -10{,}0]$;

$\lambda_{\max} \in [8{,}0;\ 14{,}0]$, а на основании (21), (22) $\lambda_{\min} \in [-14{,}4;\ -8{,}4]$; $\lambda_{\max} \in [6{,}4;\ 12{,}4]$; тогда пересечения этих областей дают общий результат $\lambda_{\min} \in [-14{,}4;\ -10{,}0]$; $\lambda_{\max} \in [8{,}0;\ 12{,}4]$. Для второй матрицы, удовлетворяющей условиям (25), (29), на основании (5) — (7) и (21), (22) соответственно $\lambda_{\min} \in [-8{,}00,\ -4{,}83]$; $\lambda_{\max} \in [7{,}00,\ 10{,}00]$ и $\lambda_{\min} \in [-7{,}47,\ 2{,}53]$; $\lambda_{\max} \in [-0{,}53,\ 9{,}47]$; общий результат: $\lambda_{\min} \in [-7{,}47,\ -4{,}83]$; $\lambda_{\max} \in [7{,}00,\ 9{,}47]$.

Как и следовало ожидать, для обеих матриц две оценки Крейна оказались лучше, а две — хуже соответствующих оценок (5), (6). При этом для первой матрицы наиболее частного вида оба метода оценок дали одинаковые по ширине области локализации с. ч. $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$; для второй матрицы с диагональю общего вида области локализации по оценкам (5), (6) оказались значительно уже, чем по оценкам Крейна.

1. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.— М., Л.: ГИТТЛ, 1950.— 359 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.
3. *Arscott F. M.* Latent roots of tri-diagonal matrices.— Edinburgh Math. Notes, 1961, 12, № 44, p. 5—7.
4. *Friedland S., Melkman A. A.* On the Eigenvalues of Non-negative Jacobi Matrices.— Linear algebra and Appl., 1979, 25, p. 239—253.
5. *Котелянский Д. М.* О расположении точек матричного спектра.— Укр. мат. журн., 1955, 7, № 2, с. 131—133.
6. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств.— М.: Наука, 1972.— 232 с.
7. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее применения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 170 с.
8. *Фурман Я. А.* Оценка границы характеристических чисел действительной матрицы общего вида.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1975, 15, № 6, с. 1580—1582.
9. *Mirsky L.* The spread of a matrix.— Mathematika, 1956, v. 3, p. 2, № 6, p. 127—135.
10. *Крейн М. Г.* О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов.— Мат. сб., 1933, 40, № 4, с. 455—465.

Сев.-Зап. заоч. политехн. ин-т, Ленинград

Поступила 21.06.83,
после доработки — 09.04.84