УДК 513.88

Г. М. Березовская, Н. И. Березовский

Описание изоморфизмов пространства голоморфных функций, перестановочных с кратным умножением

Пусть G — произвольная область комплексной плоскости; $H(G)$ — пространство голоморфных в G функций с топологией компактной сходимости [1]; $L(H)$ — алгебра всех линейных непрерывных операторов пространства $H(G)$; Q_φ — оператор умножения на функцию $\varphi \in H(G)$ в пространстве $H(G)$, действующий по закону $(Q_\varphi f)(z) = \varphi(z) f(z)$, $f \in H(G)$; в частности, $Q = Q_z$ — оператор умножения на независимую переменную (о фундаментальной роли оператора умножения на независимую переменную z в пространствах голоморфных функций и в теории линейных операторов см. [2]).

Во многих исследованиях возникает проблема описания операторов из $L(H)$, перестановочных с Q^m, $m \in \mathbb{N}$, и об условиях их обратимости (по первому вопросу см. [3—5], по второму — [3, 4], случай простых областей). В данной статье изучается второй вопрос в общем виде с помощью основного результата работы [5, теорема 1, представление (1)], который в нашем случае можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная область комплексной области, $\omega = \exp(2\pi i m^{-1})$, $m \in \mathbb{N}$, и $J = \{j : 0 \leqslant j < m,\ \omega^j G = G\}$. Тогда для того чтобы линейный непрерывный в $H(G)$ оператор T был перестановочным с Q^m, необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде*

$$(Tf)(z) = \sum_{j \in J} t_j(z) f(z\omega^j), \quad f \in H(G), \tag{1}$$

где $t_j(z) \in H(G)\ \forall j \in J$.

Отсюда следуют утверждения.

Следствие 1. *Для любой плоской области G оператор $T \in L(H)$ перестановочен с Q $(m = 1)$ тогда и только тогда, когда T — оператор умножения на некоторую функцию $\psi \in H(G)$, т. е.*

$$T = Q_\psi, \quad \psi(z) = (T1)(z). \tag{2}$$

Следствие 2. *Для того чтобы оператор T был изоморфизмом пространства $H(G)$, перестановочным с Q, необходимо и достаточно, чтобы T представлялся в виде (2), где $\psi(z) = (T1)(z) \neq 0$ при $z \in G$.*

Для произвольной плоской области G и произвольного натурального $m > 1$ возможны следующие исключающие друг друга логические случаи:

(α) $\omega G = G$, тогда $\omega^\nu G = G\ \ \forall \nu \in \mathbb{Z}$;

(β) $\omega G \neq G$, но $\exists \varkappa$, $1 < \varkappa < m$: $\omega^\varkappa G = G$ ($\varkappa$ — минимальное);

(γ) $\omega^\nu G \neq G\ \ \forall \nu$, $1 < \nu < m$.

Случай (α). В этом случае $J = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ и формула (1) может быть переписана в виде $(Tf)(z) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \varphi_k(z)(z\omega^j)^{-k} f(z\omega^j)$, где $\varphi_k(z) = Tz^k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, т. е. справедлива следующая предварительная теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $T \in L(H)$ был перестановочным с Q^m в $H(G)$, где $\omega G = G$, необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде $(Tf)(z) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \varphi_k(z) z^{-k} (P_k^{(m)} f)(z)$, $f \in H(G)$, где*

$$(P_k^{(m)} f)(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{-kj} f(z\omega^j) \tag{3}$$

и $\varphi_k(z) \in H(G)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Формулой (3) операторы $P_k^{(m)}$ определяются фактически для любых целых $k \in \mathbb{Z}$. Они играют роль проекторов пространства $H(G)$ и имеют следующие свойства (некоторые из них очевидны)

1°. $P_{km+\nu}^{(m)} = P_\nu^{(m)}$ при $k, \nu \in \mathbb{Z}$.

2° $P_k^{(m)} P_\nu^{(m)} = P_\nu^{(m)} P_k^{(m)} = 0$, если $k - \nu$ не кратно m.

3° $(P_k^{(m)})^2 = P_k^{(m)}\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

4° $\sum\limits_{k=0}^{m-1} P_k^{(m)} = I$, где I — единичный оператор.

5° $Q^\nu P_k^{(m)} = P_{k+\nu}^{(m)} Q^\nu$ при ν, $k \in \mathbb{Z}$ и $\nu \geqslant 0$.

6°. Если $\omega = \exp(2\pi i m^{-1})$, $\omega G = G$, $f \in H(G)$ и $f(z\omega^j) = f(z)$ $\forall z \in G$ и $j = 0, 1, \ldots, m-1$, то f — голоморфна в G по z и по z^m, т. е. $f(z) = f_0(z^m) \in H(G)$. При этом оператор $P_0^{(m)}$ есть проектор $H(G)$ на подпространство $H_0^m(G)$, состоящее из всех $f \in H(G)$, голоморфных в G по z и по z^m.

7°. Для любой функции $f \in H(G)$ и $\forall \nu$, $0 \leqslant \nu < m$, произведение $z^{-\nu}(P_\nu^{(m)} f)(z)$ определено в G и представляет собой некоторую функцию из подпространства $H_0^m(G)$. Оператор $P_\nu^{(m)}$ — проектор $H(G)$ на подпространство $H_\nu^{(m)}(G) = Q^\nu H_0^m(G)$.

8° (ср. с 4°). Любая функция $f \in H(G)$ представима единственным образом в виде $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} z^\nu f_\nu(z^m)$, где $f_\nu(z^m) \in H_0^m(G)$, т. е. $H(G)$ — прямая сумма подпространств $H_0^m(G)$, $H_1^m(G), \ldots, H_{m-1}^m(G)$.

Утверждение 6° легко проверяется для многочленов и для функций вида $A(z-a)^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$, и, следовательно, справедливо для рациональных функций. Если f — произвольная функция из $H(G)$, то для нее существует (см. [6, с. 284]) последовательность рациональных функций $\{r_j(z) : j \geqslant 1\}$ (принадлежность их к $H(G)$ не требуется), сходящаяся к функции f равномерно на каждом компакте области G. Пусть, например, K — любой з компактов области G вида $\{z \in G : \rho(z, \partial G) \geqslant p^{-1}, |z| \leqslant p, p \in \mathbb{N}\}$. Тогда для точек $z \in K$ определена функция $(P_0^{(m)} f)(z)$. Эта функция — равномерный предел на K функций $(P_0^{(m)} r_j)(z)$ при $j \to \infty$. Так как последние — это рациональные функции от z^m, то $(P_0^{(m)} f)(z)$ — функция от z^m, голоморфная на G.

Утверждение 7° нуждается в доказательстве лишь для $0 < \nu < m$. Если $0 \notin G$, то функция $g(z) = z^{-\nu}(P_\nu^{(m)} f)(z)$ голоморфна в G и для нее выполняются тождества

$$g(z\omega^j) = g(z), \quad z \in G, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{4}$$

поэтому $g \in H_0^m(G)$. Если $0 \in G$, то непосредственно проверяется, что для функции $h(z) = (P_\nu^{(m)} f)(z)$ выполняются равенства $h(0) = h'(0) = \ldots \ldots = h^{(\nu-1)}(0) = 0$, так что $g(z) = z^{-\nu}(P_\nu^{(m)} f)(z)$ определена на G, голоморфна и для нее также выполняются тождества (4).

На основании перечисленных свойств теорему 2 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор $T \in L(H)$ был перестановочным в $H(G)$ с Q^m, где область G инвариантна относительно поворота на угол $2\pi m^{-1}$ вокруг начала координат, необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде*

$$T = \sum_{i,j=0}^{m-1} z^i t_{ij}(z^m) z^{-j} P_j^{(m)}, \tag{5}$$

где

$$t_{ij}(z^m) \in H_0^m(G), \quad i, j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{6}$$

а проекторы $P_\nu^{(m)}$ определены формулой (3).

Совокупность всех операторов алгебры $L(H)$, перестановочных с фиксированным оператором Q^m, образует алгебру операторов (коммутант оператора Q^m), обозначаемую ниже через $\mathcal{K}(Q^m, G)$.

Рассмотрим, с другой стороны, алгебру $M_m(H_0^m(G))$ всех квадратных матриц порядка m, элементы которых суть функции подпространства $H_0^m(G)$ ($H_0^m(G)$ — коммутативная алгебра функций, голоморфных на G по z и по z^m).

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Коммутант $\mathcal{K}(Q^m; G)$ алгебраически изоморфен алгебре $M_m(H_0^m(G))$ всех квадратных матриц порядка m, элементы которых являются функциями коммутативной алгебры $H_0^m(G)$.*

Действительно, каждый оператор $T \in \mathcal{K}(Q^m; G)$ представим в виде (5) с условием (6). Следовательно, ему можно сопоставить его матрицу представления из (5)

$$T \to \| t_{ij}(z^m) \|_{i,j=0}^{m-1} \equiv \hat{T}(z^m), \tag{7}$$

принадлежащую $M_m(H_0^m(G))$. Не сложно проверяется, что соответствие (7) линейно, взаимно однозначно и мультипликативно. Для проверки последнего необходимо перемножить два представления типа (5) и убедиться что представляющая матрица для произведения операторов равна произведению матриц исходных представлений.

Учитывая условия обратимости матриц в алгебре $M_m(H_0^m(G))$ и определяя функции $t_{ij}(z^m)$ из (5) через значения оператора T на степенях, $\{z^j : j = 0, 1, \ldots, m-1\}$, получаем теорему.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор T, удовлетворяющий условиям теоремы 3, был обратимым в $H(G)$, где $\omega G = G$, $\omega = \exp(2\pi i m^{-1})$, необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде* (5) *с условием* (6) *и проекторами* (3) *и чтобы дополнительно выполнялось условие* $\det \| t_{ij} \times \times (z^m) \|_{i,j=0}^{m-1} \neq 0$ *при* $z \in G$, *где* $t_{i,j}(z^m) = z^{-i} P_i^{(m)} T z^j$.

Случай (β). В этом случае $\omega G \neq G$, но существует такое минимальное натуральное $\varkappa$, $1 < \varkappa < m$, что для него выполняется равенство $\omega^\varkappa G = G$. В силу минимальности $\varkappa$ справедливо неравенство $\omega^\nu G \neq G \forall \nu$, $0 < \nu < \varkappa$. Тогда легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 1. *Если для области G выполняется условие* (β), *то число m кратно $\varkappa$, т. е. $m = \varkappa n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Лемма 2. *Если для области G выполняется условие* (β), *то* $\forall \mu \in \mathbb{Z} : : \omega^\mu G = G \Leftrightarrow \mu$ — *кратно* $\varkappa$.

Следствие 3. *Если для области G выполняется условие* (β), *то* $J = \{0, \varkappa, 2\varkappa, \ldots, (n-1)\varkappa\}$.

Это приводит нас к следующим результатам.

Теорема 6. *Если для области G выполняется условие* (β), *то оператор $T \in L(H)$ перестановочный с Q^m тогда и только тогда, когда он перестановочный с Q^n, где $n = m/\varkappa$.*

Теорема 7. *Если для области G выполняется условие* (β), *то оператор $T \in L(H)$ является перестановочным с Q^m, $m = \varkappa n$, изоморфизмом пространства $H(G)$ тогда и только тогда, когда он представляется в виде* $T = \sum_{i,j=0}^{n-1} z^i t_{ij} \times \times (z^n) z^{-j} P_j^{(n)}$, *где* $t_{ij}(z)^n \in H(G)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$ *и* $(P_k^{(n)} f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} f(z\varepsilon^j)$, $\varepsilon = \omega^\varkappa = \exp(2\pi i n^{-1})$, *а также дополнительно выполняется условие* $\det \| t_{ij}(z^n) \|_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$, $z \in G$.

Случай (γ). В этом случае $J = \{0\}$, и поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если область G не инвариантна относительно поворота вокруг начала координат ни на один из углов $2\pi i m^{-1}\nu$, $0 < \nu < m - 1$, то оператор $T \in L(H)$ перестановочный с Q^m тогда и только тогда, когда он представляется в виде $(Tf)(z) = \psi(z) f(z)$, $f \in H(G)$, где $\psi(z) = (T1)$, (z) — функция из $H(G)$. Кроме того, он обратим (является изоморфизмом пространства $H(G)$) тогда и только тогда, когда выполняется дополнительное условие $\psi(z) = (T1)(z) \neq 0$, $z \in G$.*

Полученные результаты можно резюмировать очевидным образом в следующих теоремах.

Теорема А. *Пусть G — произвольная область комплексной области, $m \in \mathbb{N}$, $\omega = \exp(2\pi i m^{-1})$, $\varkappa$ — минимальное натуральное число, для которого справедливо равенство $\omega^\varkappa G = G$. Тогда:*

1) *$m/\varkappa = n$ — целое натуральное число;*

2) *оператор $T \in L(H)$ перестановочный в пространстве $H(G)$ с оператором Q^m тогда и только тогда, когда он перестановочный с Q^n, где $m = \varkappa n$;*

3) *перестановочность с* Q^m *выполняется тогда и только тогда, когда оператор* T *представим в виде* $T = \sum_{i,j=0}^{n-1} z^i t_{ij}(z^n) z^{-j} P_j^{(n)}$, *где* $t_{ij}(z^n) \in H(G)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, $(P_k^{(n)} f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} f(z\varepsilon^j)$, $\varepsilon = \omega^\varkappa = \exp(2\pi i n^{-1})$.

Теорема В. *Коммутант* $\mathscr{K}(Q^n; G)$ *алгебраически изоморфен алгебре* $M_n(H_0^n(G))$ *всех квадратных матриц порядка* n *с элементами из коммутативной алгебры* $H_0^n(G)$ *с изоморфизмом* $T \to \| z^{-i} P_i^{(n)} T z^j \|_{i,j=0}^{n-1} \equiv \hat{T}(z^n)$.

Теорема С. *Для того чтобы* $T \in \mathscr{K}(Q^n; G)$ *был обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\det \| z^{-i} P_i^{(n)} T z^j \|_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$, $z \in G$.

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie.— J. f. reine und angew. Math., 1953, B, **191**, №№ 1—2, S. 30—49.
2. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций.— Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ/ВИНИТИ, **12**, 1974, с. 199—412.
3. *Нагнибида Н. И.* Операторы, перестановочные с оператором умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971, вып. 13, с. 63—67.
4. *Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И., Шмата Т. С.* Об одном базисе пространства аналитических в кольце функций.— Докл. АН СССР, 1973, **212**, № 2, с. 284—287.
5. *Захарюта В. П., Царьков М. Ю.* Операторы, коммутирующие с умножением в пространстве аналитических функций одного переменного.— Мат. заметки, 1973, **13**, № 2, с. 269—276.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.—М., Л.: ГИТТЛ, 1950.— 703 с.

Черновиц. гос. ун-т

Поступила 25.04.83