УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, БОЛЕЕ ОБЩИХ, ЧЕМ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ

We prove that if a point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, is an essential isolated singularity of the open discrete Q-mapping $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, B_f is a set of branch points f in D, and a point $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ is an asymptotic limit of f at x_0 then, for every neighborhood U, containing the point x_0, $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ provided that a function Q has a finite mean oscillation at the point x_0 or a logarithmic singularity of the order not higher than $n-1$. Moreover, if the indicated conditions on the function Q hold and $n \geq 2$, then every point of the set $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ is an asymptotic limit of f at point x_0, and if $n \geq 3$, then $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$. In addition, $\infty \notin f(D)$, then the set fB_f is nonbounded and $x_0 \in \overline{B_f}$.

Доведено, що якщо точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, є істотною ізольованою сингулярністю відкритого дискретного Q-відображення $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, B_f — множина точок розгалуження f у D і точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ є асимптотичною границею f у точці x_0, то для будь-якого околу U, що містить точку x_0, $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ при умові, що функція Q має скінченне середнє коливання у точці x_0 або логарифмічну сингулярність порядку не вище ніж $n-1$. Більш того, при вказаних умовах на функцію Q і $n \geq 2$ кожна точка множини $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ є асимптотичною границею f у точці x_0, і при $n \geq 3$ має місце співвідношення $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$. Якщо, крім того, $\infty \notin f(D)$, то множина fB_f є необмеженою і $x_0 \in \overline{B_f}$.

1. Введение. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз. На языке емкостей соотношение (1) означает, что отображение f искажает емкость любого конденсатора в D не более чем в K раз.

Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\, dm(x), \tag{2}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, т. е. $\int_\gamma \rho(x)|d(x)| \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$, а $Q\colon D \to [1,\infty]$ — вещественнозначная функция (см., например, [1]). В случае, когда $Q(x) \leq K$ почти всюду, мы снова приходим к неравенству (1). В общем случае последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_Q(\Gamma)$. По-видимому, впервые неравенство вида (2) было установлено для квазиконформных отображений на плоскости в работе [2, с. 221], а в пространстве в работе [3]. Неравенство вида (2) для гомеоморфизмов $f \in ACL^n$, $f^{-1} \in ACL^n$ см. также в [4]. Соотношение (2) примечательно тем, что оно характерно для довольно широкого подмножества отображений класса Соболева (см. последний пункт).

Ключевым понятием данной статьи является понятие асимптотического предела отображения f в граничной точке области D (см., например, раздел 3.13 в [5] или раздел 2 гл. VII в [6]). Грубо говоря, отображение f, заданное в области D, имеет своим асимптотическим пределом величину $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ в некоторой точке b границы D, если существует кривая, лежащая в D и стремящаяся к b, вдоль которой отображение f стремится к z_0.

Поведение Q-отображений в изолированной существенно особой точке по существу исследовано автором в контексте обобщения известных теорем Сохоцкого – Вейерштрасса и Пикара (см. [7]). В частности, при определенных условиях на Q отображение $f(x)$ в произвольной окрестности существенно особой точки x_0 достигает в пределе любого наперед заданного значения A из $\overline{\mathbb{R}^n}$ при $x \to x_0$. Отсюда, вообще говоря, не следует существование асимптотического предела в точке x_0, что, в свою очередь, свидетельствует о необходимости более тонких исследований этого вопроса.

В данной статье решается следующая задача: распространить наиболее важные результаты из теории квазирегулярных отображений, касающиеся изучения множеств точек ветвления, на более широкие классы Q-отображений. Основное внимание здесь уделяется взаимосвязи множеств точек ветвления с асимптотическими пределами изучаемого отображения. В частности, показано, что образ fB_f множества точек ветвления B_f открытого дискретного Q-отображения, удовлетворяющего определенным условиям относительно Q и имеющего изолированную существенно особую точку, является неограниченным множеством. Для квазирегулярных отображений подобные теоремы получены О. Мартио, С. Рикманом и Ю. Вяйсяля (см. раздел 3 в [5] и раздел 2 гл. VII в [6]). По сути в указанных работах, как и в настоящей статье, использован подход В. А. Зорича [8] и С. Агард, А. Мардена [9].

2. Основные определения. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *нульмерным*, если каждая компонента связности $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку. Запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно, $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ — компактное подмножество области D. Мы будем также предполагать, что отображение f *сохраняет ориентацию,* т. е. топологический индекс $\mu\,(y,\, f,\, G) > 0$ для произвольной области $G \Subset D$ и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Всюду далее $C(E,\, f) = \Big\{y \in \overline{\mathbb{R}^n}\colon y = \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m),$ $x_m \to x_0 \in E\Big\}$ — предельное множество отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ на множестве $E \subset \overline{D}$. Приведенные выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \infty$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\big\}$, $B(r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < r\big\}$, $\mathbb{B}^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < 1\big\}$, $S(x_0, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\big\}$, $S(r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = r\big\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = 1\big\}$, (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, где $x_i,\ y_i$ — координаты точек x и y, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, запись $g = \mathrm{id}$ для отображения $g\colon D \to \mathbb{R}^n$ означает, что g — тождественное отображение, для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ запись $|A|$

означает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{mes}_1\,(A)$ обозначает линейную меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$:

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS,$$

$$\fint\limits_A f(x)\, dm(x) := \frac{1}{|A|} \int\limits_A f(x)\, dm(x),$$

$\mathrm{dist}(A,B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что x — *точка ветвления* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки x сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать B_f. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1 \tag{3}$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \,\mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\, dm(x).$$

Пусть $E,\, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в [10]). Рассмотрим следующее определение [1]. Пусть $Q\colon D \to [1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-гомеоморфизмом*, если выполняется неравенство (2) для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. Аналогично, непрерывное отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, допускающее ветвления, будем называть *Q-отображением*, если (2) выполнено для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. Изучение Q-отображений связано с обширным применением к различным классам отображений, в частности классам Соболева (см. последний пункт статьи). Рассмотрим следующее определение (см. [5], а также п. 2 гл. VII в [6]). Будем говорить, что точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является *асимптотическим пределом* отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в точке $b \in \partial D$, если найдется кривая $\alpha\colon [0,1) \to D$ с $\alpha(t) \to b$ при $t \to 1$ такая, что $f(\alpha(t)) \to z_0$ при $t \to 1$. Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U \cap E$ связны.

Предложение 1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, Q — односвязное и локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P — компонента связности множества $f^{-1}Q$ такая, что $\overline{P} \subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если дополнительно Q относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$ (см. лемму* 2.2 *раздела* 2 *в* [5]).

Предложение 2. *Пусть отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ нульмерное, $A \subset f(D)$ и существует непрерывное сечение $s\colon A \to D$ отображения f, т. е. $f \circ s = \mathrm{id}$. Если A относительно локально связно в точке $y \in \overline{A}$, то предельное множество $C(s, y)$ является либо континуумом в ∂D, либо единственной точкой в D (см.* [9], *а также лемму* 3.10 *в* [5]).

Предложение 3. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — локальный гомеоморфизм, F — компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f также инъективно в некоторой окрестности множества F (см.* [8, *с.* 422], *а также следствие* 3.8 *в* [5]).

Следующие важные определения можно найти в [6] (раздел 3 гл. II). Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a,\, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: i) $\alpha(a) = x$; ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$; iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a,\, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$. Аналогично можно определить максимальное поднятие кривой $\beta\colon (b, a] \to \mathbb{R}^n$ при отображении f с концом в точке x (см. раздел 3 гл. II в [6]). Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta\colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ (или, соответственно, $\beta\colon (b, a] \to \mathbb{R}^n$) имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (или, соответственно, с концом в точке x) (см. следствие 3.3 гл. II в [6]). *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называем пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. *Емкостью* конденсатора E называется величина

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* (пишем $f \in ACL$), если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Известно, что если $f \in ACL$, то f имеет почти всюду частные производные в D. Если эти частные производные принадлежат классу $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для $p \geq 1$, то говорят, что $f \in ACL^p(D)$, или просто $f \in ACL^p$, если недоразумение невозможно. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую емкость* (пишут $\operatorname{cap} C = 0$), если существует ограниченное открытое множество A с $C \subset A$ такое, что $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Аналогично тому, как последнее определение введено в $\mathbb{R}^n$, можно определить понятие множества емкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ — якобиан отображения f в точке x, т. е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$,

$l\left(f'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_O(x,f) = \dfrac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x,f)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ — в остальных точках. *Внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_I(x,f) = \dfrac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n}$, если $J(x,f)\neq 0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ — в остальных точках.

3. Основные леммы.

Лемма 1. *Предположим, что область D содержит начало координат, $f\colon D\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, — Q-отображение в D и при некотором $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(0,\partial D)$ и $\varepsilon\to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right) \qquad (4)$$

для борелевской функции $\psi(t)\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$, удовлетворяющей условию $0< I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty$ для произвольного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Пусть Γ — семейство открытых кривых $\gamma(t)\colon(0,1)\to\mathbb{R}^n$ таких, что $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$ и $\gamma(t)\not\equiv 0$. Тогда $M(f(\Gamma))=0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i, \qquad (5)$$

где Γ_i — семейство кривых $\alpha_i(t)\colon(0,1)\to\mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha_i(1)\in\{0<|x|=r_i<\varepsilon_0\}$, r_i — некоторая последовательность с $r_i\to 0$ при $i\to\infty$, и $\alpha_i(t)\to 0$ при $t\to 0$. Зафиксируем $i\geq 1$ и $\varepsilon\in(0,r_i)$. В силу соотношения (4) имеем $I(\varepsilon,r_i)>0$ при всех $\varepsilon\in(0,r_i)$. Положим $A_i(\varepsilon)=\big\{x\in\mathbb{R}^n : \varepsilon<|x|<r_i\big\}$. Заметим, что борелевская функция

$$\rho(x)=\rho_{\varepsilon,i}(x)=\begin{cases}\psi\left(|x|\right)/I\left(\varepsilon,r_i\right), & x\in A_i(\varepsilon),\\ 0, & x\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus A_i(\varepsilon),\end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (3) и, следовательно, по определению Q-отображения,

$$M\Big(f\big(\Gamma\big(S(\varepsilon),S(r_i),A_i(\varepsilon)\big)\big)\Big) \leq \int\limits_{A_i(\varepsilon)} Q(x)\rho^n_{\varepsilon,i}(x)\,dm(x) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \qquad (6)$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \dfrac{1}{I(\varepsilon,r_i)^n}\displaystyle\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\,dm(x)$. С учетом (4) имеет место следующее соотношение:

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x|)\,dm(x) = G(\varepsilon)\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = G(\varepsilon)\left(1 + \dfrac{\int_{r_i}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt}{\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt}\right)^n$, где $\int_{r_i}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$ — фиксированное число, а $\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку величина интеграла слева в (4) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0$. Заметим, что при любом $\varepsilon \in (0, r_i)$

$$\Gamma_i > \Gamma\left(S(\varepsilon), S(r_i), A_i(\varepsilon)\right). \tag{7}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1, 2, \ldots$ из (6) и (7) получаем, что

$$M(f\Gamma_i) \le \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \to 0 \tag{8}$$

при $\varepsilon \to 0$. Однако левая часть неравенства (8) не зависит от ε и поэтому $M(f\Gamma_i) = 0$. Наконец, из (5) и полуаддитивности модуля следует, что $M(f(\Gamma)) = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 3$, — открытое дискретное Q-отображение в D, $x_0 \in \partial D$ — изолированная существенно особая точка отображения f. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D \setminus \{x_0\})$ и $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{9}$$

для некоторой борелевской функции $\psi(t)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, удовлетворяющей условию

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{10}$$

Если $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0.

Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что найдется окрестность U точки x_0, для которой $z_0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = z_0 = 0$. По дискретности f, $\overline{B(r_0)} \subset U \cap (D \cup \{0\})$ и $S(r_0) \cap f^{-1}(0) = \varnothing$ для некоторого $r_0 > 0$. Положим $U_0 = B(r_0) \setminus \{0\}$, $g = f|_{U_0}$. Поскольку $\operatorname{dist}\,(fS(r_0), 0) > 0$ и, по предположению, $0 \notin \overline{f(B_f \cap U)}$, найдется $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(r')} \cap (fS(r_0) \cup gB_g) = \varnothing. \tag{11}$$

Так как $z_0 = 0$ является асимптотическим пределом отображения f в точке $x_0 = 0$, найдется кривая $\alpha(t)\colon [0,1) \to U_0$ с $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$ такая, что $\beta(t) = f(\alpha(t)) \to 0$ при $t \to 1$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < |\beta(t)| < r'$ при всех $t \in (0,1)$. Тогда в силу (11)

$$|\alpha| \subset U_0 \setminus B_g. \tag{12}$$

Определим при $0 \le t \le 1$ и $0 < \varphi \le \pi$ так называемые *сферические покрытия* по правилу

$$G(t,\varphi) = \big\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ |y| = |\beta(t)|,\ \ (y,\beta(t)) > |y|^2\cos\varphi\big\}.$$

Пусть $G^*(t,\varphi)$ — $\alpha(t)$-компонента связности множества $g^{-1}G(t,\varphi)$ и φ_t — точная верхняя грань чисел $\varphi \in (0,\pi]$ таких, что g отображает $G^*(t,\varphi)$ гомеоморфно на $G(t,\varphi)$. Такое $\varphi_t > 0$ существует в силу соотношения (11) и того, что $\beta(t) \in f(U_0)$. Положим $G(t) = G(t,\varphi_t)$, $G^*(t) = G^*(t,\varphi_t)$, тогда отображение g определяет при каждом фиксированном t гомеоморфизм $g_t : G^*(t) \to G(t)$. Покажем, что для почти всех $r \in (0,r')$ из равенства $|\beta(t)| = r$ следует, что $0 \notin \overline{G^*(t)}$. Предположим, что $0 \in \overline{G^*(t)}$ при некотором t, тогда найдется последовательность $x_k \in G^*(t)$ с $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $f(x_k) \to y_t \in \overline{G(t)}$ при $k \to \infty$. Заметим, что отображение g_t^{-1} является сечением отображения f на множестве $G(t) \subset f(U_0)$ и по предложению 2 множество $C(g_t^{-1}, y_t)$ есть континуум, содержащий точку $x_0 = 0$ и, возможно, точки границы U_0. В силу соотношения (11) $C(g_t^{-1}, y_t) = \{0\}$, т. е. $g_t^{-1}(y) \to 0$ при $y \to y_t$. Пусть $\Gamma(t)$ — семейство открытых кривых $\gamma_t(s)\colon (0,1) \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих $\beta(t)$ и y_t в $G(t)$, т. е. $\gamma_t(0) = y_t$, $\gamma_t(1) = \beta(t)$ и $\gamma_t(s) \in G(t)$ при $s \in (0,1)$. Обозначим $\Gamma^*(t) = g_t^{-1}\Gamma(t)$. Тогда каждая кривая $\gamma_t^*(s) : (0,1) \to U_0$ семейства $\Gamma^*(t)$ такова, что $\gamma_t^*(s) \to 0$ при $s \to 0$. Обозначим

$$\Gamma^* = \bigcup_{t\colon\, 0\in\overline{G^*(t)}} \Gamma^*(t).$$

По лемме 1 $M(g(\Gamma^*)) = 0$. С другой стороны, согласно 10.2 в [10],

$$M(g\Gamma^*) \ge b_n \int\limits_E \frac{dr}{r},$$

где постоянная b_n зависит только от размерности n и $E = \big\{|\beta(t)|\colon 0 \in \overline{G^*(t)}\,\big\}$ при некотором t. Следовательно, линейная мера Лебега $\mathrm{mes}_1(E) = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $T = \{t\colon 0 \le t < 1,\ |\beta(t)| \notin E\}$. Заметим, что в силу (11) $\overline{G^*(t)} \subset U_0 \setminus B_g$ при $t \in T$. По предложению 1 отображение f отображает $\overline{G^*(t)}$ гомеоморфно на $\overline{G(t)}$. Кроме того, по предложению 3 f инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(t)}$. Согласно определению угла φ_t это возможно только в случае $\varphi_t = \pi$. Следовательно, при каждом $t \in T$ множество $\overline{G^*(t)} = \overline{G^*(t,\pi)}$ есть поверхность в $U_0 \setminus B_g$, топологически эквивалентная сфере, и f гомеоморфно отображает $\overline{G^*(t)}$ на $S(|\beta(t)|)$. Пусть $D(t)$ обозначает ограниченную компоненту множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G^*(t)}$. Положим $T_0 = \{t \in T\colon 0 \in D(t)\}$. Возможны 2 случая: $1 \in \overline{T_0}$ и $1 \notin \overline{T_0}$.

Случай 1. Предположим, что $1 \in \overline{T_0}$, тогда найдется возрастающая последовательность $t_j \in T_0$ такая что $t_j \to 1$. Положим $r_j = |\beta(t_j)|$ и $D_j = D(t_j)$; без ограничения общности можно считать, что $r_{j+1} < r_j$ и в силу того, что $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$, $D_{j+1} \subset D_j$. Пусть A_j — сферическое кольцо $B(r_1) \setminus \overline{B(r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, найдется компонента A_j^* множества $g^{-1}A_j$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. Далее, так как $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$, $\overline{A_j^*} \subset U_0$. Кроме того, в силу того, что $\overline{A_j} \cap gB_g = \varnothing$, $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$. По предложению 1 f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. Согласно изложенному выше, существует сечение $s_j\colon A_j \to A_j^*$ отображения f такое, что $s_j = s_k|_{A_j}$ при всех $k > j$. Следовательно, мы построили сечение $s\colon B(r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в

$B(r_1) \setminus \{0\}$. По предложению 2 множество $C(s, 0)$ является либо континуумом в ∂U_0, либо единственной точкой в U_0. Заметим, что в силу соотношения (11) первая возможность исключена, если только $C(s, 0)$ не вырождается в точку $x_0 = 0$. Таким образом, сечение s может быть продолжено до непрерывного отображения $\overline{s}$ всего шара $B(r_1)$. Заметим также, что в силу условия $\partial D_j \cap A_j^* = \varnothing$ и того, что $t_j \in T_0$, точка $x_0 = 0$ всегда принадлежит ограниченной компоненте дополнения кольцевой области A_j^* при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}$. Далее, так как $C(s, 0) = \bigcap\limits_{j=2}^{\infty} \overline{A_j^*}$, случай $C(s, 0) = \{a\}$ невозможен при $a \neq 0$. Таким образом, $C(s, 0) = \{0\}$ и $\overline{s}(0) = 0$. Пусть x_k — произвольная последовательность в U_0 с $x_k \to 0$ при $k \to \infty$, тогда $f(x_k) \to 0$ при $k \to 0$. Это означает, что отображение f устранимо в точке $x_0 = 0$, что противоречит условию леммы.

Случай 2. Предположим теперь, что $1 \notin \overline{T_0}$. Кривую α мы можем продолжить до кривой $\overline{\alpha}\colon [-1, 1) \to \mathbb{R}^n$ так, что $\overline{\alpha}(-1) \in \partial U_0 \setminus \{0\}$, $\overline{\alpha}(-1, 1) \subset U_0$, $\overline{\alpha}|_{[0,1)} = \alpha$ и $\overline{\beta} = f(\overline{\alpha}(t)) \neq 0$ при всех $t \in [-1, 1)$. По предположению найдется δ, $0 \leq \delta < 1$, такое, что $[\delta, 1) \cap T_0 = \varnothing$. Выберем возрастающую последовательность точек $t_j \in T \cap [\delta, 1)$ такую, что: 1) $t_j \to 1$ при $j \to \infty$; 2) $|\beta(t)| < r_j = |\beta(t_j)|$ при всех $t \in (t_j, 1)$; 3) $|\overline{\beta}(t)| > r_{j+1}$ при всех $t \in [-1, t_j]$. Как и выше, положим $D_j = D(t_j)$. Поскольку $\alpha(t_j) \to 0$ при $j \to \infty$ и последовательность $\alpha(t_j)$ можно выбрать монотонно убывающей, случай 2 можно условно разбить на 2 подслучая: a) $D_j \subset D_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{N}$; b) $\overline{D}_j \cap \overline{D}_{j+1} = \varnothing$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что имеет место случай a). Рассуждаем, как и в первом случае. Пусть A_j означает сферическое кольцо $B(r_1) \setminus \overline{B(r_j)}$. Поскольку отображение g инъективно в окрестности границы ∂D_1, найдется компонента A_j^* множества $g^{-1} A_j$ такая, что $\partial A_j^* \supset \partial D_1$. В силу того, что $\overline{A_j} \cap g B_g = \varnothing$, множество $\overline{A_j^*} \subset U_0 \setminus B_g$. По предложению 1 f отображает A_j^* гомеоморфно на A_j. Заметим, что $\alpha(t_1, 1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_1$ и $A_j^* \subset D_j \setminus \overline{D}_1$. Рассуждая, как и выше, получаем непрерывное сечение $s\colon B(r_1) \setminus \{0\} \to U_0 \setminus B_g$ отображения f в $B(r_1) \setminus \{0\}$. Имеем $C(s, 0) = \bigcap\limits_{j=2}^{\infty} \overline{s\,(B_j \setminus \{0\})}$, следовательно, $C(s, 0)$ — континуум [11, с. 15]. Заметим также, что континуум $C(s, 0)$ невырожденный, поскольку множества A_j^* образуют монотонно возрастающую последовательность по включению, и $C(s, 0) \cap S(r_0) = \varnothing$ в силу (11), следовательно, $C(s, 0) \subset U_0 \cup \{0\}$. Последнее, однако, противоречит предложению 2. Предположим, что имеет место случай b). Заметим, что в этом случае

$$\alpha(t_j, 1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j. \tag{13}$$

Действительно, если (13) не выполнено, то найдется $t_j' \in (t_j, 1)\colon \alpha(t_j') \in \partial \overline{D}_j$ и $|\beta(t_j')| = |\beta(t_j)|$, но это невозможно, так как по предположению 2 $|\beta(t_j')| < |\beta(t_j)|$. Положим $u_{j+1} = \sup\{t\colon \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\}$. Выберем окрестность U_{j+1} границы ∂D_{j+1} так, что сужение $f|_{U_{j+1}}$ инъективно (см. предложение 3). Поскольку $\beta(t_{j+1}, 1) \subset B(r_{j+1})$, будем иметь $g\left(U_{j+1} \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\right)\right) \subset B(r_{j+1})$, ибо вследствие инъективности g в U_{j+1} все связные компоненты множества $g\left(U_{j+1} \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_{j+1}\right)\right)$ принадлежат одной и той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus S(r_{j+1})$. Следовательно, с учетом условия 3 найдется число $v_1 = \max\{t\colon t_j < t < u_{j+1}, |\beta(t)| = r_{j+1}\}$, причем неравенства $t_j < v_1 < u_{j+1}$ строгие, $v_1 > \delta$ и, по определению, $v_1 \in T$, так как $\beta(t_{j+1}) = r_{j+1}$ и $t_{j+1} \in T$. Покажем, что

$$\overline{D}(v_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1}). \tag{14}$$

Заметим прежде всего, что $\overline{G^*(v_1)}$ не может содержать точку $x_0 = 0$, так как $v_1 \in \in T$, и не может пересекать кривую $\overline{\alpha}$ в точке $\overline{\alpha}(-1)$, поскольку $\overline{\alpha}(-1) \in \partial U_0 \setminus \{0\}$ и в силу условия (11). Если $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_j \neq \varnothing$, то либо $\overline{G^*(v_1)} \cap \overline{G^*(t_j)} \neq \varnothing$, либо $\overline{D}(t_j) \subset D(v_1)$, либо $\overline{D}(v_1) \subset D(t_j)$. В первом случае $r_{j+1} = |\beta(v_1)| = r_j$, что невозможно в силу условия 2. Во втором случае $\overline{G^*(v_1)} \cap \overline{\alpha}(-1, t_j) \neq \varnothing$, что противоречит условию 3. Третий случай невозможен в силу (13). Следовательно, $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_j = \varnothing$. Далее, пусть $\overline{D}(v_1) \cap \overline{D}_{j+1} \neq \varnothing$, тогда либо $\overline{G^*(v_1)} \cap \overline{G^*(t_{j+1})} \neq \varnothing$, либо $\overline{D}(t_{j+1}) \subset D(v_1)$, либо $\overline{D}(v_1) \subset D(t_{j+1})$. В первом случае $\alpha(v_1) \in \overline{D}_{j+1}$, поскольку тогда $D(v_1) = D_{j+1}$, что противоречит выбору v_1. Во втором случае $\overline{G^*(v_1)} \cap \alpha(t_{j+1}, 1) \neq \varnothing$, что противоречит условию 2. Наконец, в третьем случае $v_1 > u_{j+1}$, что снова противоречит выбору v_1. Таким образом, соотношение (14) доказано. В таком случае $v_1' = \sup \left\{t \colon \alpha(t_j, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}(v_1)\right\} > t_j$. Тогда найдется $v_2 = \max \left\{t \colon t_j < t < v_1', |\beta(t)| = r_{j+1}\right\}$ такое, что $\overline{D}(v_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}_j \cup \overline{D}_{j+1} \cup \overline{D}(v_1)$. И так далее. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечное число компонент связности $\overline{G^*(v_i)}$ множества $g^{-1}S(r_{j+1})$. Заметим, что существует $v = \lim\limits_{j\to\infty} v_j$, $v \in (t_j, u_{j+1})$, такое, что каждая окрестность точки $\alpha(v)$ пересекает бесконечно много компонент $g^{-1}S(r_{j+1})$. Последнее невозможно, так как в силу соотношения (12) отображение f является локальным гомеоморфизмом в точке $\alpha(v)$.

Лемма доказана.

Следующее утверждение доказано автором в [7] (см. лемму 3.1 и теорему 5.1).

Предложение 4. *Пусть $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное Q-отображение в D, $x_0 \in \partial D$ — изолированная существенно особая точка отображения f такая, что найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})\right) = 0$ *для любой окрестности $U \supset \{x_0\}$ в D.*

Лемма 3. *Пусть $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное Q-отображение в D, $x_0 \in \partial D$ — изолированная существенно особая точка отображения f, относительно которой найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функция $\psi(t) > 0$ такие, что выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. Выберем $r_0 > 0$ так, что $\overline{B(x_0, r_0)} \subset D \cup \{x_0\}$, и положим $U_0 = B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Поскольку $0 \notin f(D)$, существует $r' > 0$ такое, что

$$\overline{B(r')} \cap fS(x_0, r_0) = \varnothing. \tag{15}$$

Без ограничения общности можно в дальнейшем считать, что $r' < 1$.

По предложению 4 в силу (15) найдется сферическое покрытие $G \subset S(r')$ такое, что некоторая связная компонента G^* множества $f^{-1}G$ содержится в U_0. Для $y \in S(r')$ обозначим через $\gamma_y \colon (0, r'] \to \overline{B(r')}$ кривую $\gamma_y(t) = ty$. Пусть при каждом $r'y \in G$ элемент γ_y^* есть максимальное поднятие кривой γ_y с концом в G^*, $\gamma_y^* \colon (r_y, r'] \to U_0$. Покажем, что $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Введем в рассмотрение множество $G = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*(t_k)\right\}$, где $t_k \in \in (r_y, r']$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = r_y \colon \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*(t_k) = x$. Заметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Другими словами, G — предельное множество $\gamma_y^*(t)$ при $t \to c-0$. Для $x \in G \cap U_0$, в силу непрерывности f, будем иметь $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in (r_y, r')$, $t_k \to r_y$ при $k \to \infty$. Однако $f\left(\gamma_y^*(t_k)\right) = \gamma_y(t_k) \to \gamma_y(r_y)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на $G \cap U_0$ в U_0. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\gamma_y^*}$ (см. 3.6 гл. I в [11]) $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right)} = \limsup\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right) = \liminf\limits_{k\to\infty} \gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right) \neq \varnothing$ в силу монотонности последовательности связных множеств $\gamma_y^*\left((r_y, t_k]\right)$ и, таким образом, G является связным (см. 9.12 гл. I в [11]). Таким образом, вследствие дискретности f и в силу соотношения (15) G не может состоять более чем из одной точки. Пусть $G \neq \{x_0\}$. Тогда кривая $\gamma_y^* \colon (r_y, r'] \to U_0$ продолжается до замкнутой кривой $\gamma_y^* \colon [r_y, r'] \to U_0$. Тогда имеем $f\left(\gamma_y^*(r_y)\right) = \gamma_y(r_y)$, т. е. $\gamma_y^*(r_y) \in f^{-1}\left(\gamma_y\right)$. С другой стороны, можно построить (см. следствие 3.3 главы II в [6]) максимальное поднятие ${\gamma_y^*}'$ кривой $\gamma_y|_{(0,\, r_y]}$ с концом в точке $\gamma_y^*(r_y)$. Наконец, объединяя поднятия γ_y^* и ${\gamma_y^*}'$, получаем новое поднятие ${\gamma_y^*}''$ кривой γ_y, которое определено на $(r'_y, r']$, что противоречит максимальности поднятия γ_y^*. Следовательно, $G = \{x_0\}$ и $\gamma_y^*(t) \to x_0$ при $t \to r_y$.

Для справедливости заключения леммы достаточно показать, что $r_y = 0$ для почти всех $r'y \in G$. Пусть $E_i = \left\{y \in \mathbb{S}^{n-1} \colon r'y \in G, r_y > 1/i\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Достаточно показать, что $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$ для каждого i, где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Для фиксированного $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\Gamma_i = \{\gamma_y^* \colon y \in E_i\}$. Согласно изложенному выше, все кривые семейства Γ_i стремятся к точке x_0, поэтому $M(\Gamma_i) = 0$. По лемме 1 также $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Заметим, что семейство $f\Gamma_i$ минорирует семейство Δ всех отрезков $\alpha_y \colon [1/i, r'] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha_y(t) = ty$, $y \in E_i$. Пусть $\rho \in \operatorname{adm} f\Gamma_i$. При каждом фиксированном $y \in E_i$ по неравенству Гельдера имеем оценку

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt\right)^{1/n}, \tag{16}$$

так как $\left(\int_{1/i}^{r'} t^n\,dt\right)^{(n-1)/n} \leq \left(\dfrac{r'^{\,(n+1)}}{n+1}\right)^{(n-1)/n} < 1$ ибо $r' < 1$. Опять же, по неравенству Гельдера и по выбору ρ, $1 \leq \int_{1/i}^{r'} \rho(ty)dt \leq \left(\int_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n}$, откуда следует, что $\left(\int_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt\right)^{1/n} \leq \int_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)dt$. Тогда согласно (16)

$$\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \leq \int\limits_{1/i}^{r'} \rho^n(ty)\,dt. \tag{17}$$

Используя неравенство (17) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)dm(x) \geq \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int\limits_{1/i}^{r'} t^{n-1}\rho(ty)\,dt \right) dy \geq \frac{1}{i^{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho), \tag{18}$$

где $F_\rho = \left\{ y \in \mathbb{S}^{n-1} \colon \int\limits_{1/i}^{r'} \rho(ty)\,dt \geq 1 \right\}$. Заметим, что вследствие выбора ρ имеет место включение $E_i \subset F_\rho$. Поскольку $M(f\Gamma_i) = 0$, из (18) следует $\mathcal{H}^{n-1}(F_\rho) = 0$ и, значит, $\mathcal{H}^{n-1}(E_i) = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, *— открытое дискретное* Q*-отображение в* D, $x_0 \in \partial D$ *— изолированная существенно особая точка отображения* f, *относительно которой найдутся* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функция* $\psi(t) > 0$ *такие, что выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$.

Доказательство легко следует из лемм 2 и 3. Предположим противное, тогда найдется $y \in \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)\right) \setminus \overline{fB_f}$. Тогда по лемме 3 y является асимптотическим пределом отображения f в точке x_0. Однако по лемме 2 $y \in \overline{f(B_f \cap U)}$ для любой окрестности U точки x_0, что противоречит сделанному предположению.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $f \colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *— открытое дискретное* Q*-отображение в* D, $x_0 \in \partial D$ *— изолированная существенно особая точка отображения* f, *относительно которой найдутся* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функция* $\psi(t) > 0$ *такие, что выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда множество* fB_f *неограничено.*

Доказательство. Заметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ и согласно лемме 4 существует последовательность $y_k \in fB_f$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тем самым, fB_f неограничено, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Пусть* $f \colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *— открытое дискретное* Q*-отображение в* D, $x_0 \in \partial D$ *— изолированная существенно особая точка отображения* f, *относительно которой найдутся* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функция* $\psi(t) > 0$ *такие, что выполнены условия* (9) *и* (10). *Тогда* $x_0 \in \overline{B_f}$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует окрестность U точки x_0 такая, что

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap B_f = \varnothing. \tag{19}$$

Заметим, что точка $y_0 = \infty \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(U \setminus \{x_0\})$. Применим к сужению $g := f|_{U \setminus \{x_0\}}$ отображения f на множество $U \setminus \{x_0\}$ лемму 4. Тогда найдется последовательность $y_k \in f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Однако последнее противоречит соотношению (19), ибо тогда $f\left(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})\right) \neq \varnothing$ и, значит, $(B_f \cap (U \setminus \{x_0\})) \neq \varnothing$.

Лемма доказана.

4. Основные следствия. Следуя работе [12], введем следующее определение. Будем говорить, что функция $\varphi \colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in$ *FMO* в x_0), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} \left|\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon\right| dm(x) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)dm(x)$. Например, функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если в точке $x_0 \in D$ выполнено $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,dm(x) < \infty$.

Предложение 5. *Пусть $Q\colon D \to [1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $x_0 \in \partial D$ — изолированная точка границы D такие, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$. Тогда можно указать $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и функцию $\psi(t) > 0$ такие, что в точке x_0 выполнены условия* (9) *и* (10).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $Q \in FMO(0)$ и $\varepsilon_0 < \min\left\{\operatorname{dist}\left(0, \partial D \setminus \{0\}\right), e^{-1}\right\}$. На основании следствия 2.3 из [12] для функции $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{t\,\log\,(1/t)}$ имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \displaystyle\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt = \log\frac{\log\,(1/\varepsilon)}{\log\,(1/\varepsilon_0)}$. Таким образом, предложение 5 в случае $Q \in FMO$ доказано. Покажем его справедливость в случае $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$. Как и прежде, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\left\{\operatorname{dist}\,(0,\,\partial D \setminus \{0\})\,,1\right\}$. Положим $\psi(t) = \dfrac{1}{t\,\log\,(1/t)}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\,(1/|x|)\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\,(1/|x|)\right)^n}\,dS\right) dr \leq$$

$$\leq \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\log\,(1/r)} = \omega_{n-1}\log\frac{\log\,(1/\varepsilon)}{\log\,(1/\varepsilon_0)} = \omega_{n-1} I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \displaystyle\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$.

Предложение 5 доказано.

Комбинируя теперь леммы 2 – 6 с предложением 5, получаем важнейшие следствия данной работы.

Теорема 1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное Q-отображение в D, $x_0 \in \partial D$ — изолированная существенно особая точка отображения f такие, что либо $Q \in FMO(x_0)$, либо $q_{x_0}(r) = O\Big(\left[\log\,(1/r)\right]^{n-1}\Big)$ при $r \to 0$. Тогда*:

1) *если $n \geq 3$ и точка $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ является асимптотическим пределом f в точке x_0, то для любой окрестности $U \subset D$, содержащей точку x_0, выполнено $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$*;

2) *каждая точка множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ является асимптотическим пределом f в точке x_0*;

3) *если* $n \geq 3$, *то* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$;
4) *если* $n \geq 3$ *и* $\infty \notin f(D)$, *то*
a) *множество* fB_f *неограничено,*
b) $x_0 \in \overline{B_f}$.

5. О точности условий на $Q(x)$, n и отображение f. Следующая теорема показывает, что условия на функцию $Q(x)$, указанные в теореме 1, являются точными в том смысле, что их нельзя заменить условием $Q(x) \in L^p_{\mathrm{loc}}$ ни для какого сколь угодно большого $p > 1$. Здесь используется конструкция А. А. Игнатьева и В. И. Рязанова из монографии [14, с. 110].

Теорема 2. *Для каждого* $p > 1$ *найдется открытое дискретное* Q*-отображение* $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ *с* $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, $n \geq 2$, *для которого точка* $x_0 = 0$ *является изолированной существенно особой точкой и которое не удовлетворяет ни одному из заключений теоремы* 1, *а также заключению предложения* 4. *Более того,* f *является гомеоморфизмом в* $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$.

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f\colon \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:
$$f(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} x,$$
или, что то же самое, в сферических координатах
$$R = 1 + r^{\alpha}, \qquad \Theta = \vartheta,$$
где $\alpha \in (0, n/p)$. Заметим, что f отображает $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$ в $\mathbb{R}^n$. Определим $K(x,f) = \max\left\{K_I(x,f), K_O(x,f)\right\}$, тогда $K(x,f) = \max\left\{\dfrac{\alpha r^{\alpha}}{1 + r^{\alpha}}, \left(\dfrac{1 + r^{\alpha}}{\alpha r^{\alpha}}\right)^{n-1}\right\}$, $r = |x|$. Кроме того, $f \in C^1 \subset W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ и $K(x,f)$ локально ограничена в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, поэтому, согласно [13], $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$. Следовательно, f является Q-гомеоморфизмом с $Q(x) := K(x,f)$ (см. теоремы 4.6 и 6.10 в [1]). При малых r
$$Q(x) = K(x,f) = \left(\frac{1 + r^{\alpha}}{\alpha r^{\alpha}}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n-1} \frac{1}{r^{\alpha(n-1)}}.$$
Следовательно, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$, поскольку $\alpha p < n$. Заметим, что все точки сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ являются асимптотическими пределами отображения f в нуле. Тем не менее, заключения 1, 3, 4 теоремы 1 не выполнены, ибо $B_f = \varnothing$, а заключение 2 нарушено в силу того, что $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right) = \{|y| \leq 1\} \cup \{|y| \geq 2\}$. В то же время ни одна из точек множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\big(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\big)$, кроме точек сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, очевидно, не является асимптотическим пределом отображения f в точке 0.

Приведенное выше отображение является также контрпримером к теореме Сохоцкого (см. предложение 4). Хотя $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой отображения f, предельное множество $C(f, 0)$ есть сфера $\{|y| = 1\} \neq \overline{\mathbb{R}^n}$ и $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$.

Теорема доказана.

Известно, что даже для квазирегулярных отображений (т. е. отображений, удовлетворяющих условию $M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma)$ для некоторой постоянной $K \geq 1$) заключения лемм 2, 4, 5, 6, а также утверждения 1, 3, 4 теоремы 1 нарушаются при $n = 2$ (см. п. 3.23 в [5]). Контрпример: $x_0 = 0$ и $f(z) = e^{z/|z|^2}$.

Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f во всех приведенных выше результатах является существенным.

Теорема 3. *При каждом $n \geq 2$ найдется дискретное Q-отображение $g\colon \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $Q \equiv 1$, $x_0 = 0$ является изолированной существенно особой точкой и при этом заключения* 1 – 4 a) *теоремы* 1, *а также заключение предложения* 4 *не имеют места.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ кубами с единичными ребрами

$$C_{k_1,\ldots,k_n} = \prod_{i=1}^{n} [k_i, k_i+1], \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $x \in C_{k_1,\ldots,k_n}$. Полагая $G_0 = \sigma_1 \circ \ldots \sigma_n$, где $\sigma_l = \sigma_{l,\operatorname{sign} k_l} \circ \ldots \sigma_{l,|k_l|\operatorname{sign} k_l}$, $\operatorname{sign} k_l$ — знак числа k_l, $\sigma_{l,0} = \mathrm{id}$ и $\sigma_{l,m}$ — отражение относительно гиперплоскости $x_l = m \in \mathbb{Z}$, получаем, что $G_0(x) \in C_{0,\ldots,0}$ для любой точки $x \in C_{k_1,\ldots,k_n}$. Сжатие $G_1(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n} x$ переводит $C_{0,0,0\ldots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^n}$. Положим $G_2(x) := G_1(x) \circ G_0(x)$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения $G_2(x)$, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}^n}$. Тогда отображение

$$g(x) := G_2 \circ G_3(x), \tag{20}$$

где $G_3(x) = \dfrac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку $x_0 = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n}. \tag{21}$$

По построению отображения g, заданного соотношением (20), видно, что оно сохраняет модуль семейств кривых в $\mathbb{R}^n$, т. е. оно является 1-отображением в терминах соотношения (2). Ясно также, что g — дискретное отображение. Тем не менее, каждое из утверждений 1 – 4 a) теоремы 1 нарушено, ибо gB_g сосредоточено в $\overline{\mathbb{B}^n}$ и ни одна из точек множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ не является асимптотическим пределом g в точке 0 в силу (21).

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Заключение 4 b) теоремы 1 в предыдущем примере выполнено, так как B_g — множество гиперплоскостей $B_g = \bigcup\limits_{i,k} A_{k,i}$, где $A_{k,i} = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\colon x_i = k\big\}$ и $0 \in \overline{B_g}$. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что из 4 b), вообще говоря, не следует ни одно из остальных заключений теоремы 1. Более того, если отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ не удовлетворяло бы условию 4 b) теоремы 1, то f было бы открытым отображением в $U \setminus \{x_0\}$, где U — некоторая окрестность существенно особой точки x_0. Поэтому пример неоткрытого отображения, которое бы нарушало условие 4 b) теоремы 1 в указанном выше смысле, не может быть построен.

6. О приложениях к классам Соболева. В этом пункте мы укажем приложения открытых дискретных Q-отображений к классам Соболева. Такая связь дает нам определенные основания считать всю изложенную выше теорию Q-отображений вполне состоятельной и обладающей в известном смысле правом на существование и свое место в геометрической теории функций.

Предложение 6. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — *открытое дискретное отображение класса* $W^{1,n}_{\text{loc}}(D)$, *для которого* $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\text{loc}}$ *и* $|B_f| = 0$. *Тогда* f *является* $K_I(x,f)$*-отображением.*

Доказательство следует непосредственно из замечания 4.10 и теоремы 6.10 в [1].

Комбинируя теорему 1 с предложением 6, получаем важнейший результат работы.

Теорема 4. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное отображение класса* $W^{1,n}_{\text{loc}}$ *в* D, $|B_f| = 0$, $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\text{loc}}$, $x_0 \in \partial D$ — *изолированная существенно особая точка отображения* f *такая, что либо* $K_I(x,f) \in FMO(x_0)$, *либо* $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$, $q_{x_0}(r)$ — *среднее интегральное значение функции* $K_I(x,f)$ *на сфере* $|x - x_0| = r$. *Тогда*:

1) *если* $n \geq 3$ *и точка* $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$ *является асимптотическим пределом* f *в точке* x_0, *то* $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ *для любой окрестности* $U \subset D$, *содержащей точку* x_0;

2) *каждая точка множества* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$ *является асимптотическим пределом* f *в точке* x_0;

3) *если* $n \geq 3$, *то* $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D) \subset \overline{fB_f}$, *множество* fB_f *неограничено и* $x_0 \in \overline{B_f}$.

По теореме 1 в [15] отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{\text{loc}}$ такое, что $J(x,f) \geq 0$ почти всюду и $K_O(x,f) \in L^p_{\text{loc}}$ при некотором $p > n-1$ является открытым и дискретным. Поэтому получаем простое следствие из теоремы 4.

***Следствие* 1.** *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — *отображение класса* $W^{1,n}_{\text{loc}}$ *такое, что* $J(x,f) \geq 0$ *почти всюду,* $K_O(x,f) \in L^p_{\text{loc}}$ *при некотором* $p > n-1$ *и* $|B_f| = 0$. *Предположим, что* $x_0 \in \partial D$ — *изолированная существенно особая точка отображения* f *такая, что либо* $K_I(x,f) \in FMO(x_0)$, *либо* $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$, $q_{x_0}(r)$ — *среднее значение функции* $K_I(x,f)$ *на сфере* $|x - x_0| = r$. *Тогда выполнены все заключения теоремы* 4.

***Замечание* 2.** Поскольку $K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f)$ почти всюду (см., например, [16]), то условия на $K_I(x,f)$ в теореме 4 можно заменить условиями $K_O^{n-1}(x,f) \in$ $\in FMO(x_0)$, либо $q^*_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$, $q^*_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение функции $K_O^{n-1}(x,f)$ на сфере $|x - x_0| = r$.

В частности, все заключения теоремы 4 и следствия 1 имеют место, если при $x \to x_0$

$$K_O(x,f) = O\left(\log\frac{1}{|x - x_0|}\right).$$

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
2. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
3. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
4. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
5. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – **488**. – P. 1 – 31.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **3**, № 26.

7. *Севостьянов Е. А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 3. – С. 366 – 381.
8. *Зорич В. А.* Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. – 1967. – **116**, № 3. – С. 415 – 433.
9. *Agard S., Marden A.* A removable singularity theorem for local homeomorphisms // Indiana Math. J. – 1970. – **20**. – P. 455 – 461.
10. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
11. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
12. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
13. *Heinonen J., Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1993. – **125**. – P. 81 – 97.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009.
15. *Manfredi J. J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – **47**, № 3. – P. 1131 – 1145.
16. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.

Получено 20.03.09