УДК 514.752.43

І. В. Потапенко (Ін-т математики, економіки і механіки, Одес. нац. ун-т)

НОВІ РІВНЯННЯ ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЕРХОНЬ В E_3

We prove a necessary and sufficient condition for the existence of a displacement vector in the case of infinitesimal deformation of a surface in the Euclidean space E_3, which must be satisfied by two symmetric tensor fields.

Доказано необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять два симметрических тензорных поля для существования вектора смещения при инфинитезимальной деформации поверхности в евклидовом пространстве E_3.

У класичній теорії поверхонь у тривимірному евклідовому просторі відомою є теорема Боне [1], в якій стверджується, що якщо коефіцієнти двох форм, одна з яких додатно означена, задовольняють основні рівняння (рівняння Гаусса та рівняння Майнарді – Петерсона – Кодацці), то існує з точністю до руху та дзеркального відображення поверхня, для якої зазначені форми будуть коефіцієнтами першої та другої квадратичної форми.

У даній роботі отримано нову форму умов інтегровності для існування вектора зміщення інфінітезимальної деформації поверхні в E_3. Ця форма складається з рівнянь, аналогічних рівнянням Гаусса та рівнянням Майнарді – Петерсона – Кодацці у класичній теорії поверхонь.

Розглянемо у тривимірному евклідовому просторі E_3 регулярну класу C^k, $k \geq 3$, поверхню S, гомеоморфну плоскій двовимірній однозв'язній області з векторно-параметричним рівнянням

$$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2), \tag{1}$$

та її інфінітезимальну регулярну класу C^k, $k \geq 3$, деформацію S_t:

$$\overline{r}_t = \overline{r}(x^1, x^2) + t\,\overline{y}(x^1, x^2), \tag{2}$$

де $\overline{y}(x^1, x^2)$ — вектор зміщення, який є регулярною класу C^k, $k \geq 3$, векторною функцією в даній області, t — малий параметр. Частинні похідні вектора зміщення запишемо у вигляді

$$\overline{y}_i(x^1, x^2) = P_{i.}^{\alpha}\overline{r}_\alpha + P_i^{*}\overline{n}\,. \tag{3}$$

Теорема 1. *Якщо регулярна поверхня S класу C^k, $k \geq 3$, в евклідовому просторі E_3 зазнає інфінітезимальної деформації* (2), *то існують два симетричні тензорні поля α_{ij} та β_{ij}, які задовольняють співвідношення*

$$\beta_{ik}b_{jl} - \beta_{ij}b_{kl} + \beta_{jl}b_{ik} - \beta_{kl}b_{ij} = g_{ml}\delta R_{ijk}^{m} + \alpha_{ml}R_{ijk}^{m} \tag{4}$$

та

$$\beta_{ij,k} - \beta_{ik,j} = b_{mj}\delta\Gamma_{ik}^{m} - b_{mk}\delta\Gamma_{ij}^{m}, \tag{5}$$

де тензорні поля $\delta\Gamma_{ij}^{h}$ та δR_{ijk}^{h} є варіаціями символів Кристоффеля другого роду та тензора Рімана, " , " — коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} поверхні, R_{ijk}^{h} — компоненти тензора кривини Рімана.

Доведення. Нехай поверхня (1) зазнає інфінітезимальної деформації з вектором зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$. Як відомо [2, с. 66 – 68], варіації коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм поверхні, символів Кристоффеля другого роду та тензора Рімана є такими:

$$\alpha_{ij} \equiv \delta g_{ij} = P^{\beta}_{i.} g_{\beta j} + P^{\beta}_{j.} g_{\beta i}, \tag{6}$$

$$\beta_{ij} \equiv \delta b_{ij} = P^{m}_{i.} b_{mj} + P^{*}_{i,j}, \tag{7}$$

$$\delta\Gamma^h_{ij} = P^h_{i.,j} - P^*_i b^h_j + P^{*h} b_{ij}, \tag{8}$$

$$\delta R^h_{ijk} = \delta\Gamma^h_{ik,j} - \delta\Gamma^h_{ij,k}. \tag{9}$$

Тут $b^h_j = b_{ij} g^{ih}$.

Покажемо, що умови, зазначені в теоремі, виконано.

Варіюванням рівнянь Гаусса

$$b_{ik} b_{jl} - b_{ij} b_{kl} = g_{ml} R^m_{ijk} \tag{10}$$

отримуємо (4).

І, аналогічно, варіюванням рівнянь Майнарді – Петерсона – Кодацці

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = 0 \tag{11}$$

маємо (5).

Теорему 1 доведено.

Звичайно, виникає питання: чи є виконання умов (4), (5) достатніми для існування вектора зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$?

Теорема 2. *Якщо на регулярній поверхні класу* C^k, $k \geq 3$, *існують два симетричні тензорні поля* α_{ij} *та* β_{ij} *класу* C^m, $m \geq 2$, *які задовольняють співвідношення* (4), (5), *де тензорні поля* $\delta\Gamma^h_{ij}$ *та* δR^h_{ijk} *визначаються за формулами*

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{g^{mh}}{2}(\alpha_{im,j} + \alpha_{jm,i} - \alpha_{ij,m}) \tag{12}$$

та

$$\delta R^h_{ijk} = \delta\Gamma^h_{ik,j} - \delta\Gamma^h_{ij,k}, \tag{13}$$

" , " — *коваріантна похідна на базі метричного тензора* g_{ij}, *то існує інфінітезимальна деформація* (2) *з вектором зміщення* $\overline{y}(x^1, x^2)$, *для якої ці тензорні поля будуть варіаціями* δg_{ij} *та* δb_{ij} *коефіцієнтів першої та другої квадратичної форми поверхні відповідно.*

Доведення. Зазначимо, що тензорні поля (12), (13), які визначаються через задане тензорне поле α_{ij}, поки ще не є варіаціями ніяких геометричних об'єктів.

Для існування інфінітезимальної деформації поверхні з вектором зміщення (3) повинні виконуватись так звані умови інтегровності [2, с. 103]

$$P^h_{i.,j} - P^*_i b^h_j = P^h_{j.,i} - P^*_j b^h_i, \tag{14}$$

$$P^*_{i,j} + P^m_{i.} b_{mj} = P^*_{j,i} + P^m_{j.} b_{mi}. \tag{15}$$

Покажемо, що при існуванні на поверхні двох симетричних тензорних полів α_{ij} та β_{ij}, які задовольняють співвідношення (4), (5), існує інфінітезимальна деформація (2) з вектором зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$, для якої ці тензорні поля будуть варіаціями δg_{ij} та δb_{ij} коефіцієнтів першої та другої квадратичної форми поверхні, що будуть виражатись за формулами (6) та (7) через компоненти похідної вектора зміщення (3) відповідно.

Для цього, використовуючи формулу (12), записуємо (7), (8) таким чином:

$$P^*_{i,\,j} \;=\; \beta_{ij} - P^{m}_{i.} b_{mj}\,, \tag{16}$$

$$P^{h}_{i.,\,j} \;=\; \delta\Gamma^h_{ij} + P^*_i b^h_j - P^{*h} b_{ij}\,. \tag{17}$$

Тобто ми хочемо встановити умови, за яких тензорне поле β_{ij} буде варіацією коефіцієнтів другої квадратичної форми, а тензорне поле (12) — варіацією символів Кристоффеля другого роду при деякій інфінітезимальній деформації поверхні з вектором зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$, частинні похідні якого мають вигляд (3).

Оскільки тензорні поля β_{ij} та $\delta\Gamma^h_{ij}$ симетричні, то у випадку існування розв'язків системи (16), (17), яка є системою типу Коші відносно невідомих функцій $P^h_{i.}$, P^*_i, співвідношення (14), (15), які в свою чергу є достатніми для існування вектора зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$, будуть виконуватись.

Запишемо умови інтегровності цієї системи. Для цього (16) коваріантно здиференціюємо по x^k і, підставивши вираз (17), отримаємо

$$P^*_{i,\,jk} \;=\; \beta_{ij,\,k} - \left(\delta\Gamma^m_{ik} + P^*_i b^m_k - P^{*m} b_{ik}\right) b_{mj} - P^m_{i.} b_{mj,\,k}\,. \tag{18}$$

Проальтернуємо (18) і, застосувавши тотожність Річчі, одержимо

$$P^*_m R^m_{.ijk} \;=\; \beta_{ij,\,k} - \beta_{ik,\,j} - \delta\Gamma^m_{ik} b_{mj} + \delta\Gamma^m_{ij} b_{mk} + P^{*m}(b_{ik} b_{mj} - b_{ij} b_{mk}) \;-$$

$$-\; P^*_i\left(b^m_k b_{mj} - b^m_j b_{mk}\right) - P^m_{i.}(b_{mj,\,k} - b_{mk,\,j})\,.$$

Використовуючи формули [2, с. 31, 34]

$$b^m_k b_{mj} - b^m_j b_{mk} \;=\; 0\,, \tag{19}$$

$$b_{mj,\,k} \;=\; b_{mk,\,j}\,, \tag{20}$$

$$R_{mijk} \;=\; b_{ik} b_{mj} - b_{ij} b_{mk} \tag{21}$$

та очевидну рівність

$$P^*_m R^m_{.ijk} \;=\; P^{*m} R_{mijk}\,,$$

переконуємося, що виконано (5).

Аналогічно, коваріантно здиференціювавши (17) по x^k, з використанням (16) будемо мати

$$P^h_{i.,\,jk} \;=\; \delta\Gamma^h_{ij,\,k} + \left(\beta_{ik} - P^m_{i.} b_{mk}\right) b^h_j \;+$$

$$+\; P^*_i b^h_{j,\,k} - g^{mh}\left(\beta_{mk} - P^l_{m.} b_{lk}\right) b_{ij} - P^{*h} b_{ij,\,k}\,. \tag{22}$$

Проальтернуємо (22) і, застосувавши тотожність Річчі, отримаємо

$$P^h_{m.}R^m_{.ijk} - P^m_{i.}R^h_{.mjk} = \delta\Gamma^h_{ij,k} - \delta\Gamma^h_{ik,j} + \beta_{ik}b^h_j - \beta_{jk}b^h_k -$$
$$- P^m_{i.}\left(b_{mk}b^h_j - b_{mj}b^h_k\right) + P^*_i\left(b^h_{j,k} - b^h_{k,j}\right) - g^{mh}(\beta_{mk}b_{ij} - \beta_{mj}b_{ik}) +$$
$$+ g^{mh}P^l_{m.}(b_{lk}b_{ij} - b_{lj}b_{ik}) - P^{*h}(b_{ij,k} - b_{ik,j}). \qquad (23)$$

Використавши формули (13), (20), а також

$$R^h_{.ijk} = b^h_j b_{ik} - b^h_k b_{ij},$$

(23) перепишемо у вигляді

$$\delta R^h_{.ijk} = \beta_{ik}b^h_j - \beta_{jk}b^h_k - g^{mh}(\beta_{mk}b_{ij} - \beta_{mj}b_{ik}) - P^h_{m.}R^m_{.ijk} - g^{mh}P^l_{m.}R_{lijk}. \qquad (24)$$

Використавши математичну операцію опускання індексу h в (24) за допомогою метричного тензора g_{hn}, отримаємо

$$g_{hn}\delta R^h_{.ijk} = \beta_{ik}b_{jn} - \beta_{jk}b_{kn} - \beta_{nk}b_{ij} + \beta_{nj}b_{ik} - g_{hn}P^h_{m.}R^m_{.ijk} - P^l_{n.}R_{lijk}. \qquad (25)$$

Враховуючи формулу

$$R_{lijk} = g_{lm}R^m_{.ijk}$$

та (6), переконуємось, що (25) збігається з (4).

Теорему 2 доведено.

Теорема 2 показує, що умови (4), (5), які в теорії інфінітезимальних деформацій є певними аналогами рівнянь Гаусса та рівнянь Петерсона – Майнарді – Кодацці в класичній теорії поверхонь, є не лише необхідними для існування інфінітезимальної деформації, а й достатніми.

Стосовно відновлення поля деформацій $\bar{y}(x^1, x^2)$ за відомими функціями α_{ij} та β_{ij} маємо три рівняння для шести функцій, адже кількість суттєвих рівнянь у співвідношеннях (4), (5) дорівнює трьом. У співвідношеннях (14), (15) ця кількість також дорівнювала трьом рівнянням для шести функцій $P^h_{i.}$, P^*_i. Таким чином, як видно з теореми 2, співвідношення (4), (5) можна вважати новою формою умов інтегровності існування вектора зміщення при інфінітезимальній деформації поверхні в E_3.

Сучасні дослідження інфінітезимальних деформацій поверхонь у тривимірному евклідовому просторі [3 – 5] потребують альтернативних підходів до їх вивчення. Отриманий результат дасть змогу досліджувати різні, більш складні типи інфінітезимальних деформацій поверхонь в E_3.

1. *Bonnet O. J.* Memoire sur la theorie des surfaces applicables sur une surface donee // J. Ěcole Polytechnique. – 1867. – **25**. – P. 1 – 51.
2. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: АстроПринт, 1999. – 168 с.
3. *Лейко С. Г., Федченко Ю. С.* Інфінітезимальні поворотні деформації поверхонь та їх застосування в теорії пружних оболонок // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1697 – 1703.
4. *Fomenko V. T.* ARG-deformations of a hypersurface with a boundary in Riemannian space // Tensor. – 1993. – **54**. – P. 28 – 34.
5. *Ferapontov E. V.* Surfaces in 3-spaces possessing non trivial deformations which preserve the shape operator // Different. Geometry and Integrable Systems in Differential Geometry (Tokyo, July 17 – 21, 2001). – Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2002. – P. 145 – 159.

Одержано 22.09.09