УДК 512.6, 512.548

Ф. М. Сохацький, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

ПРО ІЗОТОПИ ГРУП. II

A canonical decomposition of a group isotope is selected, its uniqueness is established, and relationships between them are found. The outer characteristics of identities implying for a group isotopy to be linear and for a corresponding group to be abelian are found. Identities of an abelian group isotope, that is of T-quasigroup, are described. A new method of description of isotopical closures of a class of groups is given.

Виділено канонічні розклади ізотопів груп, встановлено їх однозначність і знайдено співвідношення між ними. Встановлено зовнішні характеристики тотожностей, виконання яких дає лінійність чи алінійність ізотопії і комутативність відповідної групи. Описано тотожності лінійних ізотопів абелевих груп, тобто T-квазігруп. Дано новий метод опису ізотопних замикань класів груп.

Ця стаття є продовженням роботи [20] автора по дослідженню ізотопів груп, тому в ній продовжується нумерація теорем, лем, формул і т. д.

3. Канонічні розклади. Виділимо канонічні розклади груп ізотопів, які єдині з точністю до нейтрального елемента групи розкладу. Перед розкриттям цієї теми встановимо справедливість такого результату.

Лема 8. *Якщо* $(Q;\cdot)$ *— груповий ізотоп і* u *— будь-який елемент множини* Q, *то рівності*

$$x+y = (x/u)(f_u\backslash y), \tag{19}$$

$$x+y = (x/e_u)(u\backslash y) \tag{20}$$

визначають на множині Q *одну й ту ж групову операцію* $\cdot(+)$ *з одиничним елементом* u. *При цьому протилежний елемент в групі* $(Q;+)$ *знаходиться за будь-якою із формул*

$$\begin{aligned} -x &= (u/(f_u\backslash x))u, \quad -x = f_u((x/u)\backslash u), \\ -x &= (u/(u\backslash x))e_u, \quad -x = u((x/e_u)\backslash u), \end{aligned} \tag{21}$$

де $f_u = u/u$, $e_u = u\backslash u$ *— ліва та права локальні одиниці елемента* u.

При цьому групу $(Q;+)$ назвемо *групою канонічного розкладу.*

Доведення. Безпосередньою перевіркою при використанні тотожностей (2) переконуємось в тому, що елемент u є спільною одиницею для групоїдів, що визначені рівностями (19), (20). Оскільки кожний з них головно ізотопний квазігрупі $(Q;\cdot)$, яка за означенням ізотопна деякій групі, то за наслідками 2, 5 вони є групами і співпадають між собою. Рівності (21) доводяться простою перевіркою. Наприклад, перша з них при використанні (2) випливає з такої залежності:

$$(u/(f_u\backslash x))u+x = (((u/(f_u\backslash x))u)/u)(f_u\backslash x) = (u/(f_u\backslash x))(f_u\backslash x) = u.$$

Зауваження 5. Прирівнюючи праві частини співвідношень (19) та (20), а також праві частини рівностей (21), ми отримуємо сім тотожностей, які згідно з лемою 8 виконуються в будь-якому груповому ізотопі. Ці тотожності назвемо *супутніми.*

Повернемось до розгляду поставленої задачі про розклади. Для цього введемо необхідні поняття.

Означення 2. *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— груповий ізотоп, тоді праві частини формул*

$$x\cdot y = \lambda_0 x+\lambda_1 y, \quad x\cdot y = \rho_0 x+\rho_1 y, \quad x\cdot y = \mu_0 x+c+\mu_1 y \tag{22}$$

і алгебри $(Q;+,\lambda_0,\lambda_1)$, $(Q;+,\rho_0,\rho_1)$, $(Q;+,\mu_0,\mu_1,c)$ *назвемо відповідно лівим, правим та середнім* a*-канонічними розкладами, якщо елемент* a *є нейтральним в групі* $(Q;+)$ *та виконуються умови* $\lambda_1 a = \rho_0 a = \mu_0 a = \mu_1 a = a$.

Теорема 5. *Будь-який груповий ізотоп* $(Q;\cdot)$ *для будь-якого елемента* $a \in \in Q$ *має єдиний лівий, правий та середній* a*-канонічні розклади і вони визначаються відповідно рівностями*

$$x \cdot y = xa + f_a y, \quad x \cdot y = xe_a + ay, \quad x \cdot y = xe_a + aa + f_a y. \tag{23}$$

Крім того, виконується співвідношення $x \cdot y = xa - aa + ay$.

Доведення. Перепозначимо в лемі 8 u через a і зробимо таку заміну змінних: в співвідношенні (19) замінимо x на xa та y на $f_a y$, а в рівності (20) — x на xe_a та y на ay. В результаті одержимо перші дві рівності із (23), які задовольняють умови відповідно лівого та правого a-канонічного розкладу. З них випливають залежності $ay = aa + f_a y$ та $f_a y = -aa + ay$, які разом з доведеними співвідношеннями дають інші рівності.

Нехай (22) — будь-які інші лівий, правий та середній a-канонічні розклади. З наслідку 5 випливає співпадання групових операцій, що наявні у співвідношеннях (22) та (23), а з наслідку 8 — відповідних компонент лівого та правого канонічних розкладів. З означення середнього a-канонічного розкладу маємо рівність $c = aa$, а після застосування наслідку 8 — єдиність і середнього a-канонічного розкладу. Теорема доведена.

Знайдемо залежність між a- та b-канонічними розкладами. Для цього зазначимо спочатку, що після теореми 5 можна вважати, що загальний вигляд a-канонічних розкладів такий:

$$x \cdot y = \alpha_0 x \circ \alpha_1 y, \quad x \cdot y = \beta_0 x \circ \beta_1 y, \quad x \cdot y = \beta_0 x \circ bb \circ \alpha_1 y. \tag{24}$$

***Наслідок* 11.** *Нехай* a, b *— будь-які два елементи множини* Q. *Тоді для того щоб* (22) *та* (24) *були відповідно* a*- та* b*-канонічними розкладами ізотопу* $(Q;\cdot)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались такі співвідношення:*

$$x \circ y = x - b + y, \quad \alpha_0 x = \lambda_0 x + \lambda_1 b, \quad \alpha_1 y = b - \lambda_1 b + \lambda_1 y,$$

$$\beta_0 x = \rho_1 x - \rho_0 b + b, \quad \beta_1 y = \beta_0 b + \rho_1 y.$$

Доведення. За наслідком 5 групи $(Q;\circ)$ та $(Q;+)$ відрізняються одиницею, тобто $x \circ y = x - b + y$, тому

$$xy = \alpha_0 x \circ \alpha_1 y = \alpha_0 x - b + \alpha_1 y = (\alpha_0 x - b + \alpha_1 a) + (-\alpha_1 a + \alpha_1 y)$$

— також лівий a-канонічний розклад. І тоді з теореми 5 випливає $\alpha_0 x - b + \alpha_1 a = \alpha_0 x$, $-\alpha_1 a + \alpha_1 y = \lambda_1 y$. Звідси при $y = b$ маємо $-\alpha_1 a = \lambda_1 b - b$, але тоді ці ж співвідношення означають виконання другої та третьої рівностей із наслідку. Аналогічно доводяться і інші залежності.

4. Тотожності. Із п. 1 випливає, що зовнішні параметри квазігрупової тотожності, такі як розташування змінних, їх повторюваність, довжина слів тощо, свідчать про ізотопність даної квазігрупи деякій групі. Виявляється, що ці параметри дають і більш конкретну інформацію, а саме: про комутативність групи, лінійність ізотопії і т. д. В цьому пункті ми розглянемо деякі з цих питань.

Позначимо через Q множину, на якій будемо розглядати операції. Нехай v — підслово слова w квазігрупової сигнатури. Замінимо всі змінні із w, крім тих, всі входження яких в w належать v, деякими елементами множини Q. В результаті слово w матиме вигляд $\alpha v'$, де α — деяка підстановка *множини* Q, оскільки вона є композицією трансляцій квазігрупових операцій. Підстановку α назвемо *коефіцієнтом підслова* v *в слові* w при даному значенні змінних. Назвемо тотожність $w=v$ *врівноваженою стосовно змінної* x, якщо x входить в запис слів точно w і v по одному разу. Якщо ж тотожність врівноважена стосовно кожної змінної, то вона називається *врівноваженою*.

Твердження 3. *Якщо тотожність* $w=v$ *врівноважена стосовно змінної* x, *то її коефіцієнти в* w *і* v, *що визначені однаковим набором значень інших змінних, співпадають.*

Доведення безпосередньо випливає з означення.

Твердження 4. *Якщо змінна* x *має точно два оточуючих терми в тотожності* $w=v$ *по одному в обох частинах рівності і при деякому значенні змінних має сюр'єктивну властивість, то різниця між відповідними коефіцієнтами підслів співпадає з різницею між перетвореннями, які вони визначають.*

Доведення. Дійсно, нехай за умов твердження одне оточуюче підслово визначає перетворення α, а інше — $\beta\alpha$, а коефіцієнти відповідно дорівнюють γ і δ. Тоді після заміни всіх змінних зазначеними значеннями одержимо залежність

$$\gamma\alpha(x) = \delta\beta\alpha(x)$$

для всіх x із Q. Після заміни αx на x маємо $\gamma=\delta\beta$, тобто необхідну рівність.

Скрізь нижче запис $w(u)$ означатиме, що u є підсловом слова w.

Теорема 6. *Нехай квазігрупова тотожність* $w=v$ *має вигляд*

$$w(w_1(x)\diamond w_2(y)) = v(v_1 * v_2) \tag{25}$$

і виконуються такі умови:

1) *кожна із змінних* x, y *має точно два оточуючих терми, які лежать в множині* $\{w_1, w_2, v_1, v_2\}$;

2) *існує значення інших змінних, при яких кожна із змінних* x, y *має сюр'єктивну властивість (відповідні різниці для змінних позначимо через* δ_1, δ_2, *а коефіцієнти підслів* $w_1\diamond w_2$ *та* $v_1 * v_2$ — *через* μ_1, μ_2 *відповідно);*

3) *квазігрупи* $(Q;\diamond)$ *та* $(Q;*)$ *ізотопні групам* $(Q;\circ)$ *та* $(Q;+)$ *(відповідні ізотопії позначимо через* $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ *та* (α,β,γ)).

Тоді існує ізоморфізм θ *груп* $(Q;\circ)$ *та* $(Q;+)$ *та елементи* a, c *такі, що виконуються умови*

$$\alpha_1 = R_a\theta\alpha\delta_1, \quad \beta_1 = L_a^{-1}R_c\theta\beta\delta_2, \quad \gamma_1\mu_1^{-1} = R_c\theta\gamma\mu^{-1},$$

якщо слово v_1 *є оточуючим змінної* x;

$$\alpha_1 = R_a\theta I\delta_1, \quad \beta_1 = L_a^{-1}R_c\theta I\delta_2, \quad \gamma_1\mu_1^{-1} = R_c\theta I\gamma\mu^{-1},$$

якщо слово v_1 *є оточуючим змінної* y, *де* $Ix=-x$.

Доведення. Надамо в тотожності $w=v$ всім змінним, крім x, y, значень, які гарантують для x, y сюр'єктивну властивість. Позначимо перетворення, що визначаються при цьому словами $w_1(x)$ та $w_2(y)$, відповідно через π_1, π_2. Тоді одержимо таку залежність:

$$\mu_1(\pi_1(x)\diamond\pi_2(y)) = \mu(\delta_{i_1}\pi_{i_1}(x_1) * \delta_{i_2}\pi_{i_2}(x_2)),$$

де $\{x_1,x_2\}=\{x,y\}$, $\{i_1,i_2\}=\{1,2\}$ для всіх $x,y\in Q$. Після заміни $\pi_1(x)$ на x та $\pi_2(y)$ на y матиме

$$\mu_1(x\diamond y) = \mu(\delta_{i_1}(x_1) * \delta_{i_2}(x_2)).$$

Замінивши квазігрупові операції на ізотопні їм групові, дістанемо

$$\mu_1\gamma_1^{-1}(\alpha_1(x)\circ\beta_1(y)) = \mu\gamma^{-1}(\alpha\delta_1(x)+\beta\delta_2(y));$$

якщо $x_1 = x,\ y_1 = y$, то

$$\mu_1\gamma_1^{-1}(\alpha_1(x)\circ\beta_1(y)) = \mu\gamma^{-1}(\alpha\delta_2(y)+\beta\delta_1(x)),$$

тобто

$$\mu_1\gamma_1^{-1}(\alpha_1(x)\circ\beta_1(y)) = \mu\gamma^{-1}I(I\beta\delta_1(x)+I\alpha\delta_2(y)).$$

Після застосування леми 1 отримуємо необхідне твердження.

***Наслідок* 12.** *Якщо виконується тотожність* (25) *і умови* 1, 2 *теореми* 6, *то коефіцієнти підслів* $w_1 \diamond w_2$ *та* $v_1 * v_2$ *відрізняються лінійним (алінійним) відображенням відповідних груп канонічних розкладів, якщо змінна* x *входить в запис слова* v_1 *(відповідно слова* v_2*).*

***Наслідок* 13.** *Нехай в квазігруповій алгебрі* $(Q;\Omega)$ *виконується тотожність*

$$(v_1(x)\cdot v_2(y)) * u = v_3(x)\circ v_4(y),$$

в якій підслова $v_1,\ v_3$ *та* $v_2,\ v_4$ *є оточуючими відповідно для змінних* $x,\ y$ *із спільною сюр'єктивною властивістю,* $(Q;\cdot)$ *— ізотоп деякої групи, а* u *— довільне слово в* $(Q;\Omega)$*. Тоді ізотоп групи буде:*

1) *ліволінійним, якщо операції* $(*)$, $(\circ)$ *співпадають з* $(\cdot)$;

2) *праволінійним, якщо операції* $(\circ)=(\cdot)$, *а операція* $(*)$ *є комутуванням* $(\cdot)$;

3) *ліволінійним, якщо* $(*)=(\cdot)$ *і* $(\circ)$ *є комутуванням* $(\cdot)$;

4) *праволінійним, якщо* $(\circ)=(*)$ *є комутуванням операції* $(\cdot)$.

Вияснимо метод обчислення коефіцієнтів підслів в словах примітивних квазігруп. Для цього перепозначимо через $L_{0,a},\ L_{1,a},\ L_{2,a}$ праву, ліву і середню трансляції квазігрупи $(Q;\cdot)$, тобто

$$L_{0,a}(x) = x\cdot a,\quad L_{1,a}(x) = a\cdot x,\quad L_{2;a}(x) = y \leftrightarrow x\cdot y = a.$$

Обернену до $L_{i,a}$ трансляцію позначимо через $L_{-i,a},\ i = 0, 1, 2$ ($-\dot{0}$ не ототожнюємо з 0). Індуктивно визначимо поняття координати підслова в слові сигнатури примітивної квазігрупи:

вважатимемо, що координата виділеного входження слова v в слова

$$v\cdot u,\quad u\cdot v,\quad v\backslash u,\quad v/u,\quad u\backslash v,\quad u/v \tag{26}$$

відповідно дорівнює $0,\ 1,\ 2,\ -0,\ -1,\ -2$; при цьому підслово u назвемо *підсловом входження;*

якщо $(i_1, \ldots, i_s)$, $(j_1, \ldots, j_k)$ — координати даного входження слова u в слово v та слова v в слово w відповідно, то координатами отриманого входження слова u в слово w буде послідовність $(j_1, \ldots, j_k, i_1, \ldots, i_s)$.

Справедливе таке твердження.

Лема 9. *При даному значенні змінних коефіцієнт* α *слова* v *з координатами* $(i_1, \ldots, i_s)$ *в слові* w *обчислюється за формулою*

$$\alpha = L_{i_1,b_1}L_{i_2,b_2}\ldots L_{i_s,b_s}, \tag{27}$$

де $b_1, \ldots, b_s$ *— відповідні значення послідовності слів входження слова* v *в слово* w.

Доведення проведено індукцією по s. При $s = 1$, тобто коли w є першим надсловом слова v, слово w має вигляд (26) і тому, надавши значення всім змінним, крім тих, всі входження яких в w належать v, одержимо відповідно вирази

$$L_{0,b}(v'),\quad L_{1,b}(v'),\quad L_{2,b}(v'),\quad L_{-0,b}(v'),\quad L_{-1,b}(v'),\quad L_{-2,b}(v'),$$

де b — значення слова u при відповідному значенні змінних. Це і доводить твердження при $s=1$.

Нехай тепер $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ — координати входження слова v в слово w. Перше надслово слова v позначимо через u. З означення координат підслова випливає, що слово u в слові w має координати $(i_2, \dots, i_s)$, а слово v в слові u — координату i_1. Тоді за індуктивним припущенням при даному значенні змінних коефіцієнт слова u в слові w дорівнює $L_{i_2,b_2}\dots L_{i_s,b_s}$, а коефіцієнт слова v в слові u — L_{i_1,b_1}, де $b_1, \dots, b_s$ — послідовність значень підслів входження слова v в слово w. Тому, коефіцієнт α має вигляд (27).

***Наслідок* 14.** *Нехай $(i_1, \dots, i_s)$ — координати підслова v безповторного слова $w \cdot i$ $(b_1, \dots, b_s)$ — довільна послідовність елементів базової множини. Тоді при деякому значенні змінних координата α слова v в слові w має вигляд* (27).

Доведення. Нехай $(u_1, \dots, u_s)$ — послідовність підслів входження слова v в слово w. Оскільки слово w безповторне, тобто кожна змінна входить в його запис не більше одного разу, то будь-яка пара підслів із множини $\{u_1, \dots$ $\dots, u_s\}$ не має входжень спільної змінної, тому система

$$u_1 = b_1,\quad u_2 = b_2, \dots, u_s = b_s$$

має принаймні один розв'язок. Наслідок доведений.

***Наслідок* 15.** *Будь-який коефіцієнт α підслова v з координатами $(i_1, \dots, i_s)$ в слові w дилінійного ізотопу $(Q; \cdot; /; \backslash)$ з канонічним розкладом $x \cdot y = \mu_0 x + a + \mu_1 y$ має вигляд*

$$a = L_b R_c \mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_s} \tag{28}$$

для деяких елементів a, b базової множини, де L_b і R_c — ліва і права трансляція групи, $\mu_2 = -\mu_1^{-1}\mu_0$, $\mu_{-i} = \mu_i^{-1}$ для всіх $i = 0, 1, 2$.

Доведення. Після леми 9 досить показати, що $L_{i,b} = L_c R_d \mu_i$ для всіх $i = \pm 0, \pm 1, \pm 2$.

Дійсно, $L_{0,b}(x) = x \cdot b = \mu_0 x + a + \mu_1 b = R_d \mu_0$, де $d = a + \mu b$, $L_{1,b}(x) = b \cdot x = \mu_0 b + a + \mu_1 x = L_c \mu_1 x$, $c = \mu_0 b + a$. Рівність $L_{2,b}(x) = y$ рівносильна $xy = b$, тобто $\mu_0 x + a + \mu_1 y = b$, звідки $y = \mu_1^{-1}(-a - \mu_0 x + b)$, тому

$$L_{2,b}(x) = -\mu_1^{-1}(a) - \mu_1^{-1}\mu_0(x) + \mu_1^{-1}(b) = L_c R_d \mu_2(x),$$

де $c = -\mu_1^{-1}(a)$, $d = \mu_1^{-1}(b)$, якщо μ_1 — автоморфізм. У випадку, коли μ_1 є антиавтоморфізмом, доведення аналогічне.

У співвідношенні (28) перетворення $\mu_{i_1}\mu_{i_2}\dots\mu_{i_s}$ назвемо *канонічним коефіцієнтом* підслова v в слові w, а також через $\operatorname{seq} w$ позначимо послідовність зліва направо змінних, які входять в запис слова w, а через $[w]$ — множину всіх змінних, що входять в запис слова w. Наприклад, нехай $w = z \cdot ((x \cdot y)\backslash x)$, тоді $\operatorname{seq} w = (z, x, y, x)$, $[w] = \{x, y, z\}$.

Лема 10. *Нехай w $(\operatorname{seq} w = (y_0, y_1, \dots, y_n))$ — слово дилінійного ізотопу $(Q; \cdot; /; \backslash)$, $(Q; +)$ — його група канонічного розкладу та α_i — канонічний коефіцієнт входження змінної y_i, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Тоді:*

а) *для деяких елементів $b_0, b_1, \dots, b_n \in Q$ і перестановки σ чисел $0, 1, 2, \dots, n$ виконується співвідношення*

$$w = I_{\sigma 0}\alpha_{\sigma 0}y_{\sigma 0} + I_{\sigma 1}\alpha_{\sigma 1}y_{\sigma 1} + \ldots + I_{\sigma n}\alpha_{\sigma n}y_{\sigma n} + b, \tag{29}$$

де $I_i(x) = -b_i + x + b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *причому перестановка* σ *тотожна, якщо ізотоп лінійний;*

б) *якщо до того ж ізотоп* $(Q; \cdot)$ *лінійний і* w *є словом сигнатури* $(\cdot)$, *то*

$$w = \alpha_0 y_0 + \beta_0 a + \alpha_1 y_1 + \beta_1 a + \ldots + \alpha_{n-1}y_{n-1} + \beta_{n-1}a + a_n x_n,$$

де $a = 0 \cdot 0$, β_i — *канонічний коефіцієнт мінімального підслова в* w, *яке містить підслова* y_i, y_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Доведення. Доведемо індукцією по n існування елементів $a_0, \ldots, a_{n+1}$ таких, що виконується залежність

$$w = a_0 + \alpha_{\sigma 0}y_{\sigma 0} + a_1 + \alpha_{\sigma 1}y_{\sigma 1} + \ldots + a_n + \alpha_{\sigma n}y_{\sigma n} + a_{n+1}, \tag{30}$$

в якій перестановка σ тотожна, коли ізотоп лінійний, а якщо до того ж w є словом сигнатури $(\cdot)$, то $a_0 = a_{n+1} = 0$, $a_1 = \beta_0 a, \ldots, a_n = \beta_{n-1}a$.

Нехай $x \cdot y = \mu_0 x + a + \mu_1 y$ — середній канонічний розклад і $I(x) = -x$. Тоді виконуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} x\backslash z &= -\mu_1^{-1}(a) + \mu_2(x) + \mu_1^{-1}z, \quad \text{якщо} \;\; \mu_1 \in \operatorname{Aut}(Q; +); \\ x\backslash z &= \mu_1^{-1}z + \mu_2 x - \mu_1^{-1}a, \quad \text{якщо} \;\; \mu_1 \in I\operatorname{Aut}(Q; +); \\ x/y &= \mu_0^{-1}z + \mu_2^{-1}y - \mu_0^{-1}a, \quad \text{якщо} \;\; \mu_0 \in \operatorname{Aut}(Q; +); \\ x/y &= -\mu_0^{-1}a + \mu_2 y - \mu_0^{-1}z, \quad \text{якщо} \;\; \mu_0 \in I\operatorname{Aut}(Q; +), \end{aligned} \tag{31}$$

де $\operatorname{Aut}(Q; +)$ — група автоморфізмів, а $I\operatorname{Aut}(Q; +)$ — множина антиавтоморфізмів групи $(Q; +)$. Отже, при $n = 1$ твердження а) і б) виконуються.

Нехай $w \rightleftharpoons u * v$, де $* \in \{\cdot; /; \backslash\}$, і довжина слова w дорівнює n. Оскільки довжини підслів u, v менші за n, то за індуктивним припущенням їх можна подати у вигляді (30):

$$u = c_0 + \gamma_{\pi 0}y_{\pi 0} + c_0 + \gamma_{\pi 1}y_{\pi 1} + \ldots + c_{k-1} + \gamma_{\pi(k-1)}y_{\pi(k-1)} + c,$$

$$v = c_k + \gamma_{\tau k}y_{\tau k} + c_{k+1} + \gamma_{\tau(k+1)}y_{\tau(k+1)} + \ldots + c_n + \gamma_{\tau n}y_{\tau n} + c_{n+1},$$

де підстановки π, τ тотожні, якщо ізотоп $(Q; \cdot)$ лінійний, і $c_0 = c = c_{n+1} = 0$, $c_i = \delta_i(a)$ для всіх $i \neq k, n+1$, якщо до того ж u і v є словами сигнатури $(\cdot)$. Через δ_i позначимо канонічний коефіцієнт мінімального підслова в u при $i < k$, та в v при $i \geq k$, яке містить входження y_i та y_{i+1}. Оскільки координати підслів u, v в слові $u * v$ відповідно дорівнюють 0, 1 при $(*) = (\cdot)$; 2, -1 при $(*) = (\cdot)$; -0, -2 при $(*) = (/)$, то залежності між канонічними коефіцієнтами в словах w та u, v виражаються такими співвідношеннями:

$$\alpha_i = \mu_0\gamma_i, \quad \alpha_j = \mu_1\gamma_j, \quad \beta_m = \mu_0\delta_m, \quad \beta_s = \mu_1\delta_s, \quad \text{якщо} \quad (*) = (\cdot);$$

$$\alpha_i = \mu_2\gamma_i, \quad \alpha_j = \mu_{-1}\gamma_j, \quad \beta_m = \mu_2\delta_m, \quad \beta_s = \mu_{-1}\delta_s, \quad \text{якщо} \quad (*) = (\backslash);$$

$$\alpha_i = \mu_{-0}\gamma_i, \quad \alpha_j = \mu_{-2}\gamma_j, \quad \beta_m = \mu_{-0}\delta_m, \quad \beta_s = \mu_{-2}\delta_s, \quad \text{якщо} \quad (*) = (/)$$

для всіх $i = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = k, k+1, \ldots, n$; $m = 1, \ldots, k-1$; $s = k+1, \ldots, n$. Після застосування співвідношень (31) до виразу $w = u * v$ одержимо залежність (30). Наприклад, нехай $w = u/v$, і перетворення μ_0, μ_1 — антиавтоморфізми групи $(Q; +)$. Тоді

$$w = u/v = -\mu_0^{-1}a + \mu_2 v + \mu_0^{-1}u =$$

$$= -\mu_0^{-1}a + \mu_2(c_k + \gamma_{\tau k}y_{\tau k} + \ldots + c_n + \gamma_{\tau n}y_{\tau n} + c_{n+1}) +$$

$$+ \mu_0^{-1}(c_0 + \gamma_{\pi 0}y_{\pi 0} + c_0 + \gamma_{\pi 1}y_{\pi 1} + \ldots + c_{k-1} + \gamma_{\pi(k-1)}y_{\pi(k-1)} + c) =$$

$$= -\mu_0^{-1}a + \mu_2 c_k + \mu_2\gamma_{\tau k}y_{\tau k} + \mu_2 c_n + \mu_2\gamma_{\tau n}y_{\tau n} + \mu_2 c_{n+1} +$$

$$+ \mu_0^{-1}c + \mu_0^{-1}\gamma_{\pi(k-1)}y_{\pi(k-1)}\mu_0^{-1}c_{k-1} + \mu_0^{-1}\gamma_{\pi 0}y_{\pi 0}\mu_0^{-1}c_0 =$$

$$= -\mu_0^{-1}a + \mu_2 c_k + \alpha_{\tau k}y_{\tau k} + \mu_2 c_n + \alpha_{\tau n}y_{\tau n} + \mu_2 c_{n+1} +$$

$$+ \mu_0^{-1}c + \alpha_{\pi(k-1)}y_{\pi(k-1)}\mu_0^{-1}c_{k-1} + \alpha_{\pi 0}y_{\pi 0}\mu_0^{-1}c_0.$$

Тобто з точністю до перепозначень елементів і перестановки індексів отримаємо співвідношення (30). Аналогічно розглядаються і інші випадки.

Цим самим п. б) доведено, а для встановлення справедливості п. а) у співвідношенні (30) введемо такі перепозначення:

$$b = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1}, \quad b_i = -(a_0 + a_1 + \ldots + a_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Лема доведена.

Нехай $x \in [w]$, де w — слово дилінійного ізотопу. Тоді суму всіх перетворень, які є коефіцієнтами змінної x у виразі (29), назвемо *повним коефіцієнтом змінної x у слові w*. Очевидно, що коли група канонічного розкладу комутативна, то повний коефіцієнт змінної співпадає з сумою канонічних коефіцієнтів всіх входжень цієї змінної в слово w. Безпосередньо з леми 10 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 16.** *Нехай w — слово лінійного ізотопу $(Q; \cdot; /; \backslash)$ абелевої групи, і $[w] = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, тоді*

$$w = \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k + b, \tag{32}$$

де γ_i — повний коефіцієнт змінної x_i в слові w.

Для некомутативного випадку не завжди можна отримати такий результат. Проте інколи це можна зробити. З леми 10 випливає такий наслідок.

Наслідок 17. *Нехай кожне входження будь-якої змінної не міститься між двома входженнями іншої в слові w ($[w] = \{x_0, \ldots, x_k\}$) лінійного ізотопу $(Q; \cdot; /; \backslash)$. Тоді виконується співвідношення* (32).

Оскільки будь-який повний коефіцієнт змінної залишає 0 на місці, то із співвідношення (29) випливає, що вільний член b обчислюється за формулою $b = w(0, 0, \ldots, 0)$.

Якщо в залежності (29) надати значення 0 всім змінним, крім x_i, то одержимо формулу обчислення повного коефіцієнту γ_i цієї змінної:

$$\gamma_i(x_i) = w(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) - w(0, \ldots, 0), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Враховуючи викладене, співвідношення (32) можна переписати у вигляді

$$w = w(x_0, 0, \ldots, 0) - b + \ldots + w(0, \ldots, 0, x_{n-1}, 0) - b + w(0, \ldots, 0, x_n), \tag{34}$$

де $b = w(0, \ldots, 0)$.

Надалі нам потрібний буде наступний очевидний результат.

Лема 11. *Нехай $(Q; +)$ — група, a, b — її елементи і $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, $\beta_0, \ldots, \beta_n$ — перетворення цієї групи з умовою $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тоді тотожність*

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + a = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + b$$

рівносильна одночасному виконанню таких рівностей:

$$a = b, \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Теорема 7. *Нехай w, v — слова сигнатури $(\cdot; /; \backslash)$ $([w] \cup [v] = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$ і 0 — довільний фіксований елемент множини Q. Якщо $(Q; \cdot)$ — лінійний ізотоп абелевої групи або лінійний ізотоп групи і в словах w, v кожне входження кожної змінної не міститься між двома входженнями іншої змінної, то рівносильними будуть такі умови:*

1) *тотожність $w = v$ виконується в $(Q; \cdot; /; \backslash)$;*

2) *в $(Q; \cdot; /; \backslash)$ виконуються тотожності*

$$w(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) = v(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0), \quad i = 0, 1, \ldots, n;$$

3) *вірна рівність $w(0, \ldots, 0) = v(0, \ldots, 0)$ і для середнього 0-канонічного розкладу співпадають повні коефіцієнти кожної змінної в словах w і v.*

Доведення. Нехай виконується умова теореми і $x \cdot y = \mu_0 x + a + \mu_1 y$ — середній 0-канонічний розклад ізотопу $(Q; \cdot)$. Тоді з наслідків 16 і 17 випливає, що тотожність $w = v$ рівносильна тотожності

$$\gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n + b = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + c,$$

де γ_i і β_i — повні коефіцієнти змінної x_i в словах відповідно w і v. Згідно з лемою 11 ця залежність рівносильна рівностям $\gamma_0 = \beta_0, \ldots, \gamma_n = \beta_n$, $b = c$, тому пп. 1, 3 рівносильні. Застосування співвідношення (33) завершує доведення теореми.

Теорема 8. *Якщо в тотожності $w = v$ лінійної квазігрупи $(Q; \cdot; /; \backslash)$ існує така пара змінних, що ніяке входження однієї не міститься між двома входженнями іншої, порядок слідування в обох частинах різний і один із повних коефіцієнтів кожної змінної в w чи v є сюр'єктивним перетворенням, то будь-яка ізотопна до $(Q; \cdot)$ група є комутативною.*

Доведення. Нехай 0 — довільний елемент і $(Q; +)$ — група 0-канонічного розкладу. Нехай x, y — зазначена пара змінних. Тоді з наслідку 17 випливає справедливість співвідношення

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + b = \beta_1 y + \beta_2 x + c.$$

З наслідку 7 випливає комутативність групи $(Q; +)$, а тому комутативною буде будь-яка ізотопна до $(Q; \cdot)$ група, оскільки вона ізоморфна групі $(Q; +)$.

Наслідок 18. *Якщо в лінійному ізотопі виконується тотожність, яка врівноважена стосовно пари змінних, що мають різний порядок слідування в лівій і правій частинах рівності, то будь-яка група, яка ізотопна цьому ізотопу, комутативна.*

Наприклад, розглянемо тотожність медіальності

$$xy \cdot uv = xu \cdot yv.$$

Якщо взяти змінні x, y, u за визначальні, то з теореми 2 випливатиме ізотопність квазігрупи $(Q; \cdot)$ деякій групі, а з розташування змінних y, u та теореми 3 випливає, що така група комутативна. Лінійність гарантує наслідок 13. А за теоремою 7 тотожність медіальності рівносильна системі тотожностей

$$x0 \cdot 00 = x0 \cdot 00, \quad 0y \cdot 00 = 00 \cdot y0, \quad 00 \cdot u0 = 0u \cdot 00, \quad 00 \cdot 0v = 00 \cdot 0v.$$

Очевидно, що ця система рівносильна другій тотожності системи. Якщо через

$x \cdot y = \mu_0 x + a + \mu_1 y$ позначити 0-канонічний розклад, то зазначена тотожність рівносильна залежності $\mu_0\mu_1 = \mu_1\mu_0$. Це і є змістом теореми Брака – Тойоди про медіальні квазігрупи.

5. Ізотопні замикання класів груп. Знайдемо ефективний спосіб перетворення: а) формул істинних в групі — в формули істинні в усіх ізотопах цієї групи; б) системи формул, яка описує абстрактний клас груп, — в систему формул, яка описує його ізотопне замикання.

Для цього введемо таке поняття.

Означення 3. *Нехай* Φ *— будь-яка формула групової сигнатури і* u *— предметна змінна, яка не входить в запис формули* Φ. *Тоді універсальним термальним замиканням формули* Φ *назвемо формулу* $\forall u\Psi$, *де* Ψ *— формула квазігрупової сигнатури, яка одержана із формули* Φ *заміною всіх входжень групових операцій з використанням співвідношень* (19) – (21) *на символи квазігрупових операцій. При цьому змінну* u *назвемо змінною переходу від* Φ *до* $\forall u\Psi$.

Справедливий такий результат.

Теорема 9. *Інваріантна при ізоморфізмі формула виконується в групі тоді і тільки тоді, коли її універсальне термальне замикання виконується в одному (а отже, і у всіх) із ізотопів цієї групи.*

Доведення. Нехай $(Q;\cdot)$ — будь-який ізотоп групи $(Q;\circ)$, u — довільний елемент множини Q і Φ — інваріантна при ізоморфізмі формула групової сигнатури. Визначимо рівністю (19) на множині Q операцію $(+)$. За лемою 8 $(Q;+)$ — група, яка ізотопна, а отже, ізоморфна групі $(Q;\circ)$, тому формула Φ виконується і в групі $(Q;+)$. Згідно з лемою 8 в групі $(Q;+)$ виконуються також співвідношення (20), (21). Замінимо всі входження операцій $(+)$ та $(-)$ на їх вирази, що задані формулами (19) – (21). В результаті одержимо формулу Ψ квазігрупової сигнатури, яка виконується для даного елемента u, але оскільки елемент u довільний, то в квазігрупі $(Q;\cdot)$ вірна формула $\forall u\Psi$.

Навпаки, нехай в ізотопі $(Q;\cdot)$ групи $(Q;\circ)$ виконується формула $\forall u\Psi$, яка є універсальним термальним замиканням формули Φ із змінною переходу u. За допомогою довільно вибраного елемента a рівністю (19) при $u=a$ визначимо на множині Q операцію $(+)$. За лемою 8 $(Q;+)$ є групою, для якої істинні також співвідношення (20), (21) при $u=a$. Оскільки формула Ψ виконується в $(Q;\cdot)$ для всіх u, то, зокрема, вона буде істинною і при $u=a$. Користуючись рівностями (19) – (21) при $u=a$, в формулі повернемось до операцій $(+,-)$. В результаті отримаємо виконання формули Φ в групі $(Q;+)$, а отже, і в ізоморфній їй групі $(Q;\circ)$. Теорема доведена.

Наприклад, якщо група $(Q;+)$ комутативна, тобто в ній справедлива тотожність

$$x + y = y + x, \tag{35}$$

то в будь-якому її ізотопі $(Q;\cdot)$ виконуватиметься кожна із тотожностей

$$\begin{gathered}(x/u)((u/u)\backslash y) = (y/u)((u/u)\backslash x),\\ (x/u)((u/u)\backslash y) = (y/(u\backslash u))(u\backslash x),\\ (x/(u\backslash u))(u\backslash y) = (y/(u\backslash u))(u\backslash x).\end{gathered} \tag{36}$$

І навпаки, якщо в ізотопі групи виконується принаймні одна з цих тотожностей, то за теоремою 9 ця група буде комутативною, а тому в ізотопі справедливі будуть і дві інші тотожності.

Звернемо увагу на те, що при переході до універсального термального замикання в одній і тій же формулі різні входження в формулу групової операції $(+)$ можна замінювати різними виразами (19), (20). Так само для операції $(-)$. Так ми отримали, наприклад, формули (36), заміняючи в (35) входження операції $(+)$ за співвідношеннями (19) та (20).

Тепер перейдемо до другого з поставлених у цьому пункті питань і розглянемо метод опису ізотопного замикання класу груп. Для цього введемо необхідне поняття.

Означення 4. *Універсальним термальним замиканням системи групових формул* Π *назвемо систему формул* Π', *яка є об'єднанням системи термальних універсальних замикань формул із* Π *та системи супутніх тотожностей, що виникають при термальному замиканні формул в разі заміни групової операції в формулах із різними термальними співвідношеннями* (19) – (21).

Наприклад, якщо при термальних універсальних замиканнях використовували і співвідношення (19), і співвідношення (20), то в універсальне термальне замикання системи повинна входити супутня тотожність

$$(x/u)((u/u)\backslash y) = (x/(u\backslash u))(u\backslash y). \tag{37}$$

Теорема 10. *Абстрактний клас груп визначається системою інваріантних при ізоморфізмі формул тоді і тільки тоді, коли його ізотопне замикання визначається універсальним термальним замиканням цієї системи формул.*

Доведення. Нехай абстрактний клас груп Γ визначається системою формул Π, кожна з яких інваріантна при ізоморфізмі. Якщо квазігрупа $(Q;\cdot)$ лежить в ізотопному замиканні класу Γ (його ми позначимо через $J\Gamma$), тобто вона ізотопна деякій групі із Γ, то за теоремою 9 в ній виконується кожна формула, яка є універсальним термальним замиканням деякої формули із Π, а за лемою 8 — всі сім супутніх тотожностей.

Нехай в квазігрупі $(Q;\cdot)$ виконуються всі формули ізотопного замикання Π' системи Π і u — будь-який елемент множини Q. Визначимо алгебру $(Q; +,-)$ тими із рівностей (19) – (21), які застосовувались при утворенні термального замикання Π'. Якщо при утворенні Π' використовувались обидва вирази (19) і (20), то, за означенням, серед формул Π' існує тотожність (37), яка свідчить про тотожне їх співпадання. Те ж саме зауваження справедливе і для операції $(-)$. В усіх формулах системи Π' замінимо змінну переходу елементом u і за допомогою співвідношень (19) – (21) перейдемо до символів групових операцій $(+)$ та $(-)$. Тобто отримаємо виконання всіх формул із Π в алгебрі $(Q;+,-)$. Оскільки клас Γ визначається системою формул Π, то $(Q;+)$ є групою із класу Γ. Квазігрупа $(Q;\cdot)$ ізотопна групі $(Q;+)$, тому вона лежить в ізотопному замиканні класу Γ. Цим самим ми довели, що клас $J\Gamma$ визначається системою Π', якщо Γ визначається системою Π.

Навпаки, нехай клас квазігруп $J\Gamma$ визначається системою формул Π'. Покажемо, що тоді клас Γ визначається системою формул Π. Дійсно, нехай група $(Q;+)$ лежить в класі Γ. З припущення випливає, що її ізотоп $(Q;\cdot)$ лежить в класі $J\Gamma$, і тому в ньому виконуються всі формули із Π'. А теорема 9 говорить про виконання в групі $(Q;+)$ кожної із формул системи Π.

Якщо ж в групі $(Q;+)$ мають місце формули із Π, то за теоремою 9 в усіх її ізотопах виконуються формули із Π'. Тому будь-який із ізотопів групи $(Q;+)$ лежить в класі $J\Gamma$. Нехай $(Q;\cdot)$ — один із таких ізотопів. З означення класу $J\Gamma$ випливає, що квазігрупа $(Q;\cdot)$ ізотопна деякій групі із класу Γ. Обидві згадані групи ізотопні одній і тій же квазігрупі, тому вони ізотопні між собою, а отже, ізоморфні. А оскільки клас Γ абстрактний, то група $(Q;+)$ лежить в класі Γ. Теорема доведена.

Оскільки означене термальне замикання формули не змінює її логічної будови, то вірні такі твердження.

***Наслідок* 19.** *Ізотопне замикання многовиду (квазімноговиду, псевдомноговиду) груп є многовидом (відповідно квазімноговидом, псевдомноговидом) квазігруп.*

***Наслідок* 20.** *Абстрактний клас груп скінченно базований тоді і тільки тоді, коли таким буде його ізотопне замикання.*

Те, що многовидами будуть ізотопні замикання класу всіх груп та класу всіх абелевих груп, було встановлено В. Д. Білоусовим [3]. Потім А. А. Гварамія [10], використовуючи методи теорії автоматів, довів наслідок 19 та частково наслідок 20.

Але якщо для опису многовиду всіх ізотопів абелевих груп було знайдено в [3] тотожність від чотирьох змінних

$$x\backslash y(u\backslash v) = u\backslash y(x\backslash v),$$

то для опису многовиду ізотопів всіх груп — лише від п'яти:

$$x(y\backslash(z/u)v) = (x(y\backslash z)/u)v.$$

З теореми 10 випливає, що ізотопне замикання будь-якого абстрактного класу груп описують формули, в яких лише на одну змінну більше, ніж в формулах, що описують відповідний клас груп. Для прикладу знайдемо тотожність, яка описує многовид всіх ізотопів груп.

***Наслідок* 21.** *Ізотопне замикання класу всіх груп є многовидом квазігруп, який в многовиді всіх квазігруп визначається тотожністю*

$$([x(u\backslash y)]/u)z = x(u\backslash[(y/u)z]). \tag{38}$$

Доведення. Клас всіх груп в класі всіх квазігруп виділяється асоціативністю: $(x+y)+z = x+(y+z)$. Знайдемо термальне універсальне замикання цієї формули. Таких замикань є декілька. Ми утворимо термальне замикання, замінивши перше і третє входження операції $(+)$ співвідношенням (20), а друге і четверте співвідношенням (19). В результаті одержимо тотожність

$$([x/(u\backslash u))(u\backslash y)]/u)((u/u)\backslash z) = (x/(u\backslash u))(u\backslash[(y/u))((u/u)\backslash z]). \tag{39}$$

За теоремою 10 ізотопне замикання класу всіх груп описується тотожностями (37) і (39). Оскільки тотожність (37) випливає із (39) при $y = u$, то для завершення доведення досить замінити в тотожності (39) $x/(u\backslash u)$ на x та $(u/u)\backslash z$ на y.

Зокрема, звідси випливає, що ізотопне замикання класу абелевих груп описується в многовиді всіх квазігруп тотожністю (38) та однією з тотожностей (36).

***Наслідок* 22.** *Абстрактний клас груп визначається системою формул тоді і тільки тоді, коли його ізотопне замикання визначається системою, що складається з тотожності (38) і універсального термального замикання кожної формули даної системи.*

Дійсно, з наслідку 21 випливає, що кожна супутня тотожність є наслідком тотожності (38), тому з теореми 10 отримуємо справедливість цього твердження.

Ряд групових ізотопів описується умовами, що накладаються на компоненти ізотопії, тому виникає необхідність їх опису в термінах квазігрупових операцій. В більшості випадків це можна зробити, користуючись таким результатом.

Теорема 11. *Формула* Φ *сигнатури* $(+, -, \alpha, \beta)$ *виконується в усіх лівих (правих, середніх) канонічних розкладах* $(Q; +, \alpha, \beta)$ *ізотопу* $(Q; \cdot)$ *групи* $(Q; +)$ *тоді і тільки тоді, коли в ізотопі* $(Q; \cdot)$ *виконується формула* Φ', *яка отримана із формули* Φ *замінами* (19) – (21) *та*

$$\alpha x = xu, \quad \beta x = (u/u)x$$

(*відповідно* $\alpha x = x(u \backslash u)$, $\beta x = ux$ *та* $\alpha x = x(u \backslash u)$, $\beta x = (u/u)x$).

Доведення. Якщо зазначена в умові теореми формула Φ виконується в усіх лівих канонічних розкладах, а кожний такий розклад однозначно визначається зазначеними в умові теореми формулами при деякому u, то це означатиме справедливість формули Φ'. Інші твердження теореми очевидні.

Наприклад, знайдемо опис ліволінійних ізотопів груп. Такі ізотопи визначаються тим, що ліва компонента правого канонічного розкладу є автоморфізмом відповідної групи, тобто $\rho_0(x+y) = \rho_0 x + \rho_0 y$ або

$$(x+y)(u/u) = x(u \backslash u) + y(u \backslash u).$$

Після застосування теореми 11 та заміни різних входжень операції $(+)$ різними виразами отримаємо такий наслідок.

Наслідок 23. *Клас всіх ліволінійних ізотопів груп описується тотожностями* (2), (38) *та будь-якою із тотожностей*

$$((x/u)((u/u) \backslash y))(u \backslash u) = (x(u \backslash u)/u)((u/u) \backslash y(u \backslash u)),$$

$$((x/u)((u/u) \backslash y))(u \backslash u) = x(u \backslash y(u \backslash u)),$$

$$((x/(u \backslash u))(u \backslash y)(u/u) = (x(u \backslash u)/u)((u/u) \backslash y(u \backslash u)),$$

$$((x/(u \backslash u))(u \backslash y)(u/u) = x(u \backslash y(u \backslash u)).$$

В [13] іншими методами доведено, що клас ліволінійних ізотопів груп описується тотожністю

$$(x(u \backslash y))z = (x(u \backslash u))(u \backslash yz).$$

Користуючись наведеним тут методом, легко виписати тотожності, які описують в класі всіх ізотопів груп класи праволінійних, лінійних, алінійних, право- та лівоалінійних ізотопів груп чи комутативних груп і т. д.

20. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп. I // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 10. – С. 1387–1398.

Одержано 16.06.94