УДК 531.19, 511.9

В. І. Скрипник, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РІВНОВАГУ В КВАНТОВІЙ СИСТЕМІ ЧАСТИНОК З МАГНІТНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Density matrices, which define equilibrium in the thermodynamic limit for a class of quantum systems of particles interacting via a collective electromagnetic field with a zero scalar potential, are computed.

Обчислюються матриці густини, що визначають рівноважні стани в термодинамічній границі для одного класу квантових систем, взаємодія в яких визначається колективним електромагнітним полем з нульовим скалярним потенціалом.

Вступ. Розглянемо квантову ν-вимірну систему частинок (n — довільне ціле число) з гамільтоніаном

$$H_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (p_j - a_j(x_1, \ldots, x_n))^2, \tag{1}$$

де

$$p_j = \{p_j^\alpha\}_{\alpha=1}^{\nu}, \quad p_j^\alpha = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}, \quad x_j = \{x_j^\alpha\}_{\alpha=1}^{\nu},$$

$$(p_j - a_j)^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(p_j^\alpha - a_j^\alpha\right)^2, \quad x_j \in \mathbb{R}^\nu.$$

Частинка з координатою x_j може мати внутрішню структуру, яка визначається параметром $\sigma_j \in \Sigma(r) \subset \mathbb{R}$, де $\Sigma(r)$ — множина з r елементів. У випадку гамільтоніана (1) функція $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ може залежати від $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Особливе місце серед цих систем займає двовимірна система ($\nu = 2$) Черна – Саймонса, у якої

$$a_j^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha'=1}^{2} \varepsilon^{\alpha\alpha'} \frac{\partial}{\partial x_j^{\alpha'}} U(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

де $\varepsilon^{\alpha\alpha'}$ — кососиметричний тензор, $U(x_1, \ldots, x_n)$ — потенціальна енергія системи заряджених частинок з координатами $x_1, \ldots, x_n$ та зарядами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$,

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le k < j \le n}^{n} \sigma_k \sigma_j \Phi(x_j - x_k), \tag{3}$$

$$\Phi(x) = \ln|x|. \tag{4}$$

З рівності

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1} = \sum_{\alpha'=1}^{2} \varepsilon^{\alpha\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \ln|x|, \quad x = (x^1, x^2),$$

випливає, що для системи Черна – Саймонса справджується рівність

$$a_j^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} U(x_1, \ldots, x_n), \quad x_j \neq x_k, \tag{5}$$

де $U(x_1, \ldots, x_n)$ визначається рівністю (3) за умови, що

$$\Phi(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}, \quad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

Система Черна – Саймонса виникла в рамках топологічної електродинаміки і використовується в теорії високотемпературної надпровідності [1–3].

У випадку регулярної функції a_j, яка обмежена з частковими похідними до другого порядку на компактних множинах, оператор, що заданий рівністю (1) та умовою (5) в усьому просторі, визначатиме самоспряжений оператор в $L^2(\Lambda)$ (з граничною умовою Діріхле на границі $\partial\Lambda$ компактної області Λ), як генератор сильнонеперервної півгрупи (стисливої)

$$P^{\beta}_{n,\Lambda} = \exp\{-\beta H_{n,\Lambda}\}.$$

Аналогічну півгрупу можна побудувати і у випадку функції a_j, яка сингулярна на гіперповерхнях $x_j = x_k$ і задовольняє умову (5). У цьому випадку гамільтоніан $H_{n,\Lambda}$ буде визначатись або як замикання оператора, заданого рівністю (1) на $C_0^{\infty}\left(\Lambda^n \setminus \bigcup_{j<k}(x_j = x_k)\right)$, або як самоспряжене розширення з цієї множини $\left(\Lambda^n = \underbrace{\Lambda \times \ldots \times \Lambda}_{n}\right)$.

Рівноважний стан системи нескінченного числа частинок визначається за допомогою границі при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^{\nu}$ редукованих матриць густини

$$\rho^{\Lambda}(x_1, \ldots, x_m | y_1, \ldots, y_m) = \Xi_{\Lambda}^{-1} \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n} \prod_{s=1}^{n} z_{\sigma'_s} \times$$
$$\times \int_{\Lambda^n} P^{\beta}_{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_n \mid y_1, \ldots, y_m, x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_1 \ldots dx'_n, \tag{7}$$

$$\Xi_{\Lambda} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n} \prod_{s=1}^{n} z_{\sigma'_s} \int_{\Lambda^n} P^{\beta}_{(\Lambda)}(x'_1, \ldots, x'_n \mid x'_1, \ldots, x'_n)\, dx'_1 \ldots dx'_n,$$

$$\sum_{\sigma} = \sum_{\sigma \in \Sigma(r)}.$$

Ці редуковані матриці густини відповідають статистиці Максвелла – Больцмана, z_{σ} визначає активність частинки з зарядом σ, β — обернена температура, $P^{\beta}_{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$ — ядро оператора $P^{\beta}_{n,\Lambda}$.

Нетривіальною математичною задачою квантової статистичної механіки є перехід до термодинамічної границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^{\nu}$ у виразі (7), тобто знаходження відношення двох розбіжних у цій границі виразів [4].

Для систем, у яких гамільтоніан є сумою кінетичної та потенціальної енергій, розроблена техніка розв'язку цієї задачі [5]. Використання цієї техніки для систем з гамільтоніаном (1) наштовхується на певні труднощі.

У цій роботі вперше розв'язується задача переходу до термодинамічної границі у виразі (7) для гамільтоніану (1) та функції a_j, що задовольняє умови (3), (5), коли $\sigma_j \in \Sigma(r) \subset \gamma\mathbb{Z}$ та виконуються наступні умови для функції Φ:

1) $\Phi(x) \in C^2(\mathbb{R}^{\nu} \setminus 0) \cap L^1(\mathbb{R}^{\nu})$, $\nu \geq 1$;

2) $\Phi(x) = |x|$, $\nu = 1$.

Ми показуємо, що термодинамічна границя у першому випадку (перший пункт) обчислюється досить просто, і приходимо до висновку, що нетривіальна проблема переходу до термодинамічної границі у виразі для редукованих матриць густини виникає лише тоді, коли функція Φ неінтегровна. Розв'язок цієї проблеми одержуємо для одновимірної системи, у якої функція $U(x_1, \ldots, x_n)$ — потенціальна енергія системи n заряджених частинок з координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ та зарядами $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ (другий пункт). Крім того, встановлюємо цікавий факт: редуковані матриці густини відмінні від нуля у термодинамічній границі, коли одновимірні змінні $x_j - y_j$ належать гратці $2\pi\gamma^{-2}\mathbb{Z}$.

1. Системи з короткодією. Нехай $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^\nu)$, $C^2(\mathbb{R}^\nu)$— множина функцій, які разом з частинними похідними першого та другого порядку є обмеженими на компактних підмножинах $\mathbb{R}^\nu$, а $\hat{u}$, $\hat{a}_j$ — оператори множення відповідно на функції $U(x_1, \ldots, x_n)$, $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ з рівностей (3), (5) і $p_j = i^{-1}(\partial / \partial x_j)$. Тоді справджується рівність

$$p_j - \hat{a}_j = \exp\{i\hat{u}\}\, p_j \exp\{-i\hat{u}\}.$$

Очевидно, що з неї випливають рівності

$$\left(p_j - \hat{a}_j\right)^2 = \exp\{i\hat{u}\}\, p_j^2 \exp\{-i\hat{u}\}$$

та

$$H_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(p_j - \hat{a}_j\right)^2 = -\exp\{i\hat{u}\}\,\frac{\Delta_n}{2}\exp\{-i\hat{u}\}.$$

Визначимо тепер оператор $H_{n,\Lambda}$ як генератор (інфінітезімальний) стисливої сильнонеперервної півгрупи $P_{n,\Lambda}^{\beta}$ в $L^2(\Lambda^n)$

$$P_{n,\Lambda}^{\beta} = \exp\{-\beta H_{n,\Lambda}\} = \exp\{i\hat{u}\}\, P_{0,n,\Lambda}^{\beta} \exp\{-i\hat{u}\}, \tag{8}$$

де $P_{0,n,\Lambda}^{\beta}$ — стислива півгрупа з інфінітезімальним генератором $H_{n,\Lambda}^{0}$,

$$H_{n,\Lambda}^{0} = -\frac{1}{2}\Delta_{n,\Lambda}, \quad \Delta_n = \Delta_{n,\mathbb{R}},$$

$\Delta_{n,\Lambda}$ — νn-вимірний лапласіан з граничною умовою Діріхле.

Нехай тепер $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$. У цьому випадку так само визначимо гамільтоніан як генератор півгрупи $P_{n,\Lambda}^{\beta}$, заданої правою частиною рівності [8].

Півгрупа $P_{n,\Lambda}^{\beta}$ має ядро $P_{(\Lambda)}^{\beta}(X_n \mid Y_n)$,

$$P_{(\Lambda)}^{\beta}(X_n \mid Y_n) = \exp\{iU(X_n)\}\, P_{0(\Lambda)}^{\beta}(X_n \mid Y_n) \exp\{-iU(Y_n)\},$$

$$X_n = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{\nu n}, \quad Y_n = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{\nu n},$$

$P_{0(\Lambda)}^{\beta}(X_n \mid Y_n)$ — ядро півгрупи $P_{0,n,\Lambda}^{\beta}$.

Нехай

$$U(X_m, X_n') = U(X_m) + U(X_n') + W(X_m, X_n').$$

Тоді

$$P^{\beta}_{(\Lambda)}(X_m, X'_n | Y_m, X'_n) = \exp\{i(U(X_m) - U(Y_m))\} \times$$

$$\times \exp\{i(W(X_m | X'_n) - W(Y_m | X'_n))\} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(X_m, X'_n | Y_m, X'_n). \tag{9}$$

Очевидно, що

$$W(X_m | X'_n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_k \sigma_j \Phi(x_k - x'_j).$$

З цієї рівності та з того, що $P^{\beta}_{0(\Lambda)}(X_m | Y_m)$ факторизується, випливає рівність

$$\Xi_{\Lambda} \rho^{\Lambda}(X_m | Y_m) = \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x_k | y_k) \times$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{\sigma} z_{\sigma} \int_{\Lambda} \exp\left\{ i \left[\sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j \big(\Phi(x_j - x) - \Phi(y_j - x)\big) \right] \right\} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x | x)\, dx \right\} \times$$

$$\times \exp\{i(U(X_m) - U(Y_m))\}.$$

Таким чином,

$$\rho^{\Lambda}(X_m | Y_m) = \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x_k | y_k) \times$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{\sigma} z_{\sigma} \int_{\Lambda} \left\{ \exp\left\{ i \left[\sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j \big(\Phi(x_j - x) - \Phi(y_j - x)\big) \right] \right\} - 1 \right\} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x | x)\, dx \times \right.$$

$$\times \exp\{i[U(X_m) - U(Y_m)]\}. \tag{10}$$

Ядро $P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x | y)$ є інтегралом за мірою Вінера, яка зосереджена на множині траєкторій, що починаються в точці x та закінчуються в точці y в момент β, від характеристичної функції траєкторій, що належать Λ. Тому в границі маємо

$$\lim_{L \nearrow \mathbb{R}^{\nu}} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x | x) = (2\pi\beta)^{-\nu/2},$$

$$\lim_{L \nearrow \mathbb{R}^{\nu}} P^{\beta}_{0(\Lambda)}(x | y) = (2\pi\beta)^{-\nu/2} \exp\left\{ -\frac{|x - y|^2}{2\beta} \right\} = P^{\beta}_{0}(x | y).$$

Отже, ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^{\nu} \setminus 0) \cap L^1(\mathbb{R}^{\nu})$. *Тоді редуковані матриці густини квантової системи, гамільтоніан якої для скінченного числа частинок в компактній області* Λ *заданий рівністю* (8), *в термодинамічній границі визначаються таким чином:*

$$\rho(X_m | Y_m) = \lim_{L \nearrow \mathbb{R}^{\nu}} \rho^{\Lambda}(X_m | Y_m) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} P^{\beta}_{0}(x_k | y_k) \exp\{i[U(X_m) - U(Y_m)]\} \times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{\sigma} \frac{z_\sigma}{(2\pi\beta)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} \left\{\exp\left\{i\left[\sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j\big(\Phi(x_j - x) - \Phi(y_j - x)\big)\right]\right\} - 1\right\} dx.$$

2. Одновимірна система з сингулярною дальнодією. Розглянемо одновимірну систему. Тоді Λ є відрізок $[-L, L] \equiv [L]$ і нехай $\Phi(x) = |x|$. Перепишемо для цього випадку рівність (10):

$$\rho^{[L]}(X_m' | Y_m) = \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} P_0^\beta(x_k | y_k) \times$$

$$\times \exp\{i[U(X_m) - U(Y_m)]\} + G_{[L]}(X_m | Y_m),$$

де

$$G_{[L]}(X_m | Y_m) =$$

$$= \sum_{\sigma} z_\sigma \int_{-L}^{L} \left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j\big(|x_j - x| - |y_j - y|\big)\right\} - 1\right] P_{0[L]}^\beta(x|x)\, dx,$$

$$x_j, y_j \in [-L, L].$$

Упорядкуємо тепер усі змінні таким чином:

$$x_i \le x_{i+1}, \quad y_i \le y_{i+1}, \quad x_1 \le y_1, \quad x_m \le y_m.$$

Далі, розіб'ємо відрізок $[-L, L]$ на три відрізки $[-L, x_1]$, $[x_1, y_m]$, $[y_m, L]$. Тоді функція $G_{[L]}$ має вигляд

$$G_{[L]}(X_m | Y_m) =$$

$$= \sum_{\sigma} z_\sigma \left[\left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j\big(x_j - y_j\big)\right\} - 1\right] \int_{-L}^{x_1} P_{0[L]}^\beta(x|x)\, dx + \right.$$

$$+ \left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j\big(y_j - x_j\big)\right\} - 1\right] \int_{y_m}^{L} P_{0[L]}^\beta(x|x)\, dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{y_m} \left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j\big(|x_j - x| - |y_j - x|\big)\right\} - 1\right] P_{0[L]}^\beta(x|x)\, dx.$$

Перші два доданки у правій частині цієї рівності прямують до $-\infty$, якщо не виконується умова

$$\sigma \sum_{j=1}^{m} \sigma_j (x_j - y_j) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

З умови $\sigma, \sigma_j \in \gamma\mathbb{Z}$ випливає, що $x_j - y_j \in 2\pi\gamma^{-2}\mathbb{Z}$. Таким чином, за цієї умови згадані вище доданки рівні нулю і редуковані матриці густини не залежать від L.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Для одновимірної квантової системи, гамільтоніан якої на відрізку $[-L, L]$ заданий рівністю* (8) *і* $\Phi(x) = |x|$, $\sigma_j \in \gamma\mathbb{Z}$, *редуковані матри-*

ці густини $\rho^{[L]}(X_m|Y_m)$ *збігаються до функцій* $\rho(X_m|Y_m)$ *при* $x_j - y_j \in \in 2\pi\gamma^{-2}\mathbb{Z}$:

$$\rho(X_m|Y_m) = \prod_{k=1}^{m} z_{\sigma_k} P_0^{\beta}(x_k|y_k) \exp\{i[U(X_m) - U(Y_m)]\} \times$$

$$\times \sum_{\pi \in S_{2m}} \exp\left\{G^{(\pi)}(X_m|Y_m)\right\} \chi_\pi(X_m|Y_m),$$

де S_{2m} — *група перестановок множини* $(1, \ldots, 2m)$, χ_π — *характеристична функція області* $V_{\pi(1)} \le V_{\pi(2)} \le \ldots \le V_{\pi(2m)}$, *де* $(v_1, \ldots, v_{2m}) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$,

$$G^{(\pi)}(V_{2m}) = \sum_{s=1}^{2m-1} \sum_{\sigma} z_\sigma (2\pi\beta)^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{V_{\pi(s)}}^{V_{\pi(s+1)}} \left[\exp\left\{ i \sum_{j=1}^{m} \sigma\sigma_j \left(|v_j - x| - |v_{j+m} - x| \right) \right\} - 1 \right] dx.$$

Якщо $x_j - y_j \bar{\in} 2\pi\gamma^{-2}\mathbb{Z}$, *то редуковані матриці густини у термодинамічній границі збігаються до нуля.*

1. *Jackiw R., Pi So-Young.* Classical and quantal non-relativistic Chern – Simons theory // Phys. Rev. D. – 1990. – **42**, № 15. – P. 3500–3508.
2. *Lykken J. D., Sonnenschein J., Wese N.* The theory of anyonic superconductivity. A review. – Preprint / TAUP-1858-91.
3. *Fradkin E.* Field theories of condensed matter systems. – Addison: Wesley Publ. Co., 1991. – 350 p.
4. *Ruelle D.* Statistical mechanics. Rigorous results. – New York: W. A. Benjamin, 1969. – 215 p.
5. *Ginibre J.* Reduced density matrices of quantum gases. I, II J. // Math. Phys. – 1965. – **6**, № 2. – P. 238–262.

Одержано 26.08.94