УДК 519.21

Б. В. Бондарев, д-р физ.-мат. наук,
Г. Г. Жирный, инж. (Донец. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Some problems of the theory of multiparameter random fields such as question of absolute continuity of measures, averaging in multiparameter case are investigated. For some stochastic system, inequalities of large deviations are built.

Досліджуються деякі властивості багатопараметричних випадкових полів: питання абсолютної неперервності мір, усереднення у багатопараметричному випадку. Для однієї стохастичної системи побудовані нерівності великих відхилень.

Теория случайных полей в настоящее время является недостаточно разработанной областью, особенно это касается случаев невыполнения условия Каироли–Уолша. В данной работе введены некоторые основные понятия и доказаны важные свойства случайных многопараметрических полей, естественным образом обобщающие соответствующие результаты теории полей с двумя параметрами. Многопараметрическое условие Каироли–Уолша [1, 2] предполагается невыполненным.

Рассмотрены вопросы абсолютной непрерывности мер, соответствующих одному типу случайных полей, вопросы усреднения для многопараметрических полей и построения неравенств больших уклонений для траекторий и оценки максимального правдоподобия параметра в системе, описываемой стохастическим уравнением.

1. Предварительные сведения. Пусть $R_+^m = \{ \bar{x} = (x^1, \ldots, x^m),\ x^i \geq 0,\ i = \overline{1,m} \}$. Введем отношение „$\leq$": $\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow x^i \leq y^i \ \forall\, i = \overline{1,m}$. Пусть $[\bar{x}, \bar{y}]^m = \{\bar{z} \in R_+^m\colon \bar{x} \leq \bar{z} \leq \bar{y}\}$. Следуя [3], обозначим через $V_m(\bar{x}, \bar{y}, k)$ множество всех векторов из R_+^m, у которых каждая координата есть либо x^i, либо y^i, и ровно k координат есть x^i, где $\bar{x}, \bar{y} \in R_+^m$, $k \in \overline{0,m}$. Для $\varphi = \varphi(\bar{x})$, $\varphi\colon R_+^m \to R^1$ положим

$$\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m} \varphi = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{\bar{u} \in V_m(\bar{x},\bar{y},k)} \varphi(\bar{u}) \quad \text{при} \quad \bar{x} \leq \bar{y}.$$

Введем иную смешанную разность. Пусть $\bar{x} = \left(x^1, \bar{\bar{x}}\right)$, $\bar{y} = \left(y^1, \bar{\bar{y}}\right)$, $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in R_+^{m-1}$, $t, x^1, y^1 \in R_+^1$, $m \geq 2$. Обозначим

$$\Delta^{m-1,t}_{\left[\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\right]^{m-1}} \varphi = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{\bar{u} \in V_{m-1}\left(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},k\right)} \varphi(t, \bar{u}) \quad \text{при} \quad \bar{\bar{x}} \leq \bar{\bar{y}}.$$

Пусть имеем $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, на котором выделен поток под-σ-алгебр $F = \{\mathfrak{F}_{\bar{x}}\}$, $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \subseteq \mathfrak{F} \ \forall\ \bar{x} \in R_+^m$; $\mathfrak{F}_{\bar{x}} \subseteq \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ при $\bar{x} \leq \bar{y}$. Пусть также выполнено:

1) $\mathfrak{F}_{\bar{0}} = \mathfrak{F}_{(0,\ldots,0)}$ пополнена всеми подмножествами из $\mathfrak{F}$ вероятности 0;

2) $\mathfrak{F}_{\bar{x}} = \bigcap\limits_{\substack{\bar{u} \geq \bar{x},\\ \bar{u} \neq \bar{x}}} \mathfrak{F}_{\bar{u}}$.

Пусть имеем некоторый поток под-σ-алгебр $A = \left\{\mathfrak{A}_{\bar{x}},\ \bar{x} \in [\bar{a}, \bar{b}]^m\right\}$. Обозначим $\tilde{\mathfrak{G}}^j_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{A}_{\bar{u}}: u^j \in [a^j, b^j]^m, u^i = x^i$ при $i \neq j\}$, $\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{A}_{\bar{u}}: u^i = x^i, u^j \in [a^j, b^j]$ при $j \neq i\}$, $\mathfrak{G}_{\bar{x}}(A) = \sigma\{\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(A), i = \overline{1,m}\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$. При этом $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^m)$, $\vec{b} = (b^1, \ldots, b^m)$, $\vec{a} < \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in R^m_+$, где $[\vec{a}, \vec{b}]^m$ — рассматриваемое параметрическое множество.

В дальнейшем будем писать $\xi \prec \mathfrak{A}$, если случайная величина ξ измерима относительно под-σ-алгебры $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$.

При $m = 2$ определение разностного мартингала было дано в работе [4]. Следующее определение обобщает это понятие на случай $m > 2$.

Определение 1. *Назовем $\xi(\bar{x})$ m-параметрическим разностным мартингалом относительно потока под-σ-алгебр A на $[\vec{a}, \vec{b}]^m$, $m \geq 2$, если $\xi(\bar{x}) \prec \mathfrak{A}_{\bar{x}}$, $M|\xi(\bar{x})| < +\infty$ $\forall\, \bar{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]^m$, а также:*

1) *при $m = 2$ выполнено:*

а) $M\left(\Delta^2_{[\bar{x},\bar{y}]^2}\xi \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(A)\right) = 0 \quad \forall\, \vec{a} \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq \vec{b}$;

б) $\xi(x^1, a^2)$ *является мартингалом относительно потока* $G^1 = \left\{\tilde{\mathfrak{G}}^2_{(x^1,a^2)}(A)\right\}$ при $x^1 \in [a^1, b^1]$ *(аналогичное выполнено и для* $\xi(a^1, x^2)$ *по* x^2*)*;

2) *при $m > 2$ выполнено:*

а) $M\left(\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m}\xi \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(A)\right) = 0 \quad \forall\, \vec{a} \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq \vec{b}$;

б) $\eta_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^m) = \xi(\bar{x})|_{x^i = a^i}$ *является $(m-1)$-параметрическим разностным мартингалом относительно потока* $\tilde{G}^i = \left\{\tilde{\mathfrak{G}}^i_{\bar{x}}(A)\right\}$ на $[a^1, b^1] \times \ldots \times [a^{i-1}, b^{i-1}] \times [a^{i+1}, b^{i+1}] \times \ldots \times [a^m, b^m]$ *при всех* $i = \overline{1,m}$.

Теорема 1. *Пусть $\xi(\bar{x})$ — m-параметрический разностный мартингал относительно F на $[\vec{a}, \vec{b}]^m$, где при всех $i = \overline{1,m}$ выполнено $b^i < +\infty$. Предположим, что выполнено следующее:*

1) $\exists\, 1 \leq i_0 \leq m$: $\sup\limits_{x^{i_0} \in [a^{i_0}, b^{i_0}]} \xi(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall\, \bar{x} \in [\vec{a}, \vec{b}]^m$;

2) $\sup\limits_{\bar{y} \in [\vec{a}, \vec{b}]^m} M(\xi^+(\bar{y}))^p < +\infty$, *где* $p > 1$, $\xi^+(\bar{y}) = \max(\xi(\bar{y}), 0)$;

Тогда

$$M\left(\sup_{\bar{y} \in [\vec{a}, \vec{b}]^m} \xi(\bar{y})\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{mp} \sup_{\bar{y} \in [\vec{a}, \vec{b}]^m} M(\xi^+(\bar{y}))^p.$$

Доказательство теоремы проводится индукцией по числу параметров m.

Заметим, что условие 1 теоремы 1 является существенным. В самом деле, пусть $\xi(x, y, z) \equiv -1$ при $(x, y, z) \in D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Тогда $\xi(\bar{x})$ — 3-параметрический разностный мартингал относительно F на D, но

$$M\left(\sup_D \xi(x, y, z)\right)^2 = 1 > 0 = 2^6 \sup_D M(\xi^+(x, y, z))^2.$$

Определение 2. *Назовем винеровским полем* $w(\bar{y})$ *действительное гауссовое сепарабельное поле, непрерывное с* $P = 1$ *и удовлетворяющее условиям* $M w(\bar{y}) = 0$, $M w(\bar{x})\, w(\bar{y}) = \prod_{i=1}^{m} \min(x^i, y^i)$.

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.1 из работы [5].

Теорема 2. *Пусть* $\xi(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$, *непрерывно с* $P = 1$, *обращается в нуль на координатных гиперплоскостях и для* $\bar{0} \le \bar{x} \le \bar{y} \le \bar{T}$ *выполнено* $(P$*-п. н*$)$:

1) $M\left(\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m} \xi \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right) = 0$;

2) $M\left\{\left(\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m} \xi\right)^2 \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right\} = \prod_{j=1}^{m} (y^j - x^j)$.

Тогда случайное поле $\xi(\bar{x})$ *— винерово.*

В дальнейшем предполагаем, что имеется винерово поле $w(\bar{y})$ на $[\bar{0}, \bar{T}]^m$ и выполнено $w(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$, а также

$$M\left(\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m} w \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right) = 0; \tag{1}$$

$$M\left\{\left(\Delta^m_{[\bar{x},\bar{y}]^m} w\right)^2 \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right\} = \prod_{j=1}^{m} (y^j - x^j) \tag{2}$$

для $\bar{T} \ge \bar{y} \ge \bar{x} \ge 0$, $\bar{T} = (T, \ldots, T) \in R^m_+$, $T < +\infty$.

В [3] была построена теория стохастического интегрирования $\mathfrak{F}_{\bar{x}}$-измеримых функций, которая легко обобщается на случай $\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(F)$-измеримых функций при выполнении (1), (2). При этом справедливы очевидные обобщения некоторых свойств.

2. Формула типа формулы Ито. Аналог следующего утверждения в двупараметрическом случае приведен в [5].

Теорема 3. *Пусть случайное поле* $\xi(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ *имеет представление* $(m \ge 2)$

$$\xi(\bar{y}) = \int_{[\bar{0},\bar{y}]^m} a(\bar{v})\, d\bar{v} + \int_{[\bar{0},\bar{y}]^m} b(\bar{v})\, dw(\bar{v})$$

при $\bar{0} \le \bar{y} \le \bar{T}$, *где* $a(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$, $b(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$, *и*

$$P\left\{\int_{[\bar{0},\bar{T}]^m} |a(\bar{y})|\, d\bar{y} < +\infty\right\} = P\left\{\int_{[\bar{0},\bar{T}]^m} b^2(\bar{y})\, d\bar{y} < +\infty\right\} = 1.$$

Тогда для каждого $f(t) \in C^2(R^1)$ P*-п.н. справедливо*

$$f(\delta(y^1, \xi)) - f(\delta(x^1, \xi)) = \int_{[\bar{x},\bar{y}]^m} f'(\delta(u^1, \xi))\, b(\bar{u})\, dw(\bar{u}) +$$

$$+ \int_{[\bar{x},\bar{y}]^m} \left(\frac{1}{2} f''(\delta(u^1, \xi))\, b^2(\bar{u}) + f'(\delta(u^1, \xi))\, a(\bar{u})\right) d\bar{u},$$

где $\delta(r,\xi) = \Delta^{m-1,r}_{[\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}]^{m-1}}\xi$, $\bar{u} = (u^1, \bar{\bar{u}})$, $\bar{x} = (x^1, \bar{\bar{x}})$, $\bar{y} = (y^1, \bar{\bar{y}})$, $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y} \in R^m_+$, $r, u^1, x^1, y^1 \in R^1_+$, $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{u}} \in R^{m-1}_+$.

Схема доказательства аналогична однопараметрическому случаю [6, с. 465–468].

Лемма 1. *Если для* $\mathfrak{F}_{\bar{y}}$*-измеримой функции* $f(\bar{y})$

$$I_0(\bar{y})\big|_{\bar{y}=\bar{T}} = \left(\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} Mf^{2k}(\bar{x})\,d\bar{x}\right)\Bigg|_{\bar{y}=\bar{T}} < +\infty,$$

где k *— натуральное, то для* $\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m$

$$M\left(\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} f(\bar{x})\,dw(\bar{x})\right)^{2k} \le (k(2k-1))^k \left(\prod_{i=1}^m y^i\right)^{k-1} I_0(\bar{y}).$$

Доказательство опирается на теорему 3, свойства стохастических интегралов от $\mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(F)$-измеримых функций (при некотором i) и проводится аналогично доказательству леммы 1.1.2 из [5].

Доказательство следующего утверждения очевидно.

Лемма 2. *Пусть* $f(\bar{y}) \prec \mathfrak{G}^i_{\bar{x}}(F)$ *и* $|f|^2 \le N$ *при* $\bar{y} \in [\bar{x}, \bar{u}]^m$. *Тогда*

$$M\left\{\exp\left\{\int\limits_{[\bar{x},\bar{u}]^m} f(\bar{y})\,dw(\bar{y})\right\}\Bigg|\ \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right\} < \exp\left\{\frac{1}{2}N\prod_{i=1}^m (u^i - x^i)\right\}.$$

3. Теорема Гирсанова для полей. Пусть $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ — пространство непрерывных функций на $[\bar{0}, \bar{T}]^m$ с σ-алгеброй $\mathfrak{L} = \sigma\{f(\bar{y}):\ \bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m\}$.

Обозначим

$$\zeta^{\bar{x}}_{\bar{y}} = \int\limits_{[\bar{y},\bar{x}]^m} f(\bar{u})\,dw(\bar{u}) - \frac{1}{2}\int\limits_{[\bar{y},\bar{x}]^m} f^2(\bar{u})\,d\bar{u}, \quad \mathfrak{z}_{\bar{y}} = \exp\zeta^{\bar{y}}_{\bar{0}},$$

где $f(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ — поле, удовлетворяющее условию

$$P\left\{\int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} f^2(\bar{y})\,d\bar{y} < +\infty\right\} = 1. \tag{3}$$

Применяя теорему 3 к функции $\exp z$ и полю $\zeta^{\bar{y}}_{\bar{0}}$, получаем

$$\mathfrak{z}_{\bar{y}} = 1 + \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} \mathfrak{z}_{(u^1, y^2, \ldots, y^m)} f(\bar{u})\,dw(\bar{u}).$$

Лемма 3. *Пусть* $f(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ *и удовлетворяет условию* (3). *Тогда*

$$M\mathfrak{z}_{\bar{y}} \le 1, \tag{4}$$

$$M\left\{\exp\left\{\zeta^{\bar{x}}_{\bar{y}}\right\} \mid \mathfrak{G}_{\bar{y}}(F)\right\} \le 1, \quad \bar{0} \le \bar{y} \le \bar{x} \le \bar{T}. \tag{5}$$

Если f *— ограниченное поле, то в* (4) *и* (5) *имеем равенства.*

Доказательство леммы 3 не представляет затруднений.

Лемма 4. *Если* $f(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ *— случайное поле, удовлетворяющее* (3), *и*

$$M \exp \zeta_{\bar{0}}^{\bar{T}} = 1, \tag{6}$$

то

$$M\left\{\exp\left\{\zeta_{\bar{y}}^{\bar{x}}\right\} \mid \mathfrak{G}_{\bar{y}}(F)\right\} = 1.$$

Рассмотрим новую вероятностную меру $\tilde{P}(d\omega) = \exp\left\{\zeta_{\bar{0}}^{\bar{T}}\right\} P(d\omega)$. Через $\tilde{M}\eta(\omega)$ обозначим ожидание по мере $\tilde{P}(\cdot)$.

Лемма 5. *Если верно* (6), *то для любой* $\mathfrak{F}_{\bar{y}}$*-измеримой случайной величины* $\eta(\omega)$: $\tilde{M}|\eta(\omega)| < +\infty$ *справедливо*

$$\tilde{M}\{\eta(\omega) \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\} = M\left\{\eta(\omega) \exp\left\{\zeta_{\bar{x}}^{\bar{y}}\right\} \mid \mathfrak{G}_{\bar{x}}(F)\right\}, \quad \bar{0} \le \bar{x} \le \bar{y} \le \bar{T}.$$

Теорема 4 (аналог теоремы Гирсанова). *Пусть* $f(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ *— случайное поле, удовлетворяющее условиям* (3) *и* (6). *Тогда случайное поле* $\xi(\bar{y}) \prec \mathfrak{F}_{\bar{y}}$ *вида*

$$\xi(\bar{y}) = w(\bar{y}) - \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} f(\bar{u})\, d\bar{u}$$

является винеровым на $(\Omega, \mathfrak{F}, \tilde{P})$.

Доказательства лемм 4, 5 и теоремы 4 не содержат никаких особенностей по сравнению с двупараметрическим случаем (леммы 1.2.5, 1.2.6 и теорема 1.2.5 из [5]) и мы их опускаем.

Теорема 5. *Пусть при* $\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m$

$$\xi_j(\bar{y}) = \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} a_j(\bar{u}, \xi_j(\bar{u}))\, d\bar{u} + \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} b(\bar{u}, \xi_j(\bar{u}))\, dw(\bar{u}), \tag{7}$$

где $j = 1, 2$, *и выполнено:*

1) $a_j(\bar{x}, t)$, $b(\bar{x}, t)$ *— действительнозначные, борелевы по совокупности переменных функции на* $R_+^m \times R^1$;

2) *существует* $K > 0$ *такое, что*

$$|a_2(\bar{x}, t_1) - a_2(\bar{x}, t_2)|^2 + |a_1(\bar{x}, t_1) - a_1(\bar{x}, t_2)|^2 + \\ + |b(\bar{x}, t_1) - b(\bar{x}, t_2)|^2 \le K|t_1 - t_2|^2,$$

$$|a_1(\bar{x}, t)|^2 + |a_2(\bar{x}, t)|^2 + |b(\bar{x}, t)|^2 \le K(1 + t^2);$$

3) *существует непрерывная по совокупности переменных функция* $\lambda(\bar{x}, t)$ *такая, что*

$$a_2(\bar{y}, t) - a_1(\bar{y}, t) = \lambda(\bar{y}, t)\, b(\bar{y}, t)$$

и

$$P\left\{\int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} \lambda^2(\bar{y}, \xi_1(\bar{y}))\, d\bar{y} < +\infty\right\} = 1.$$

Тогда $\mu_{\xi_2} \ll \mu_{\xi_1}$ *и*

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot, \omega)) =$$

$$= \exp\left\{ \int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} \lambda(\bar{y},\xi_1(\bar{y}))\, dw(\bar{y}) - \frac{1}{2} \int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} \lambda^2(\bar{y},\xi_1(\bar{y}))\, d\bar{y} \right\},$$

где μ_{ξ_j} *— мера, порожденная в* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ *решением уравнения* (7) *при конкретном* j, $j = 1, 2$.

С учетом теоремы 1, леммы 4, теоремы 4 настоящей работы, а также теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения [3] убеждаемся, что доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы VIII.6.2 из [6].

4. О принципе усреднения в многопараметрическом случае. Данный пункт обобщает некоторые результаты, полученные в [7, с. 113–117, 119–122].

Теорема 6. *Пусть при* $\bar{0} \le \bar{x} \le \bar{T}$ *для всех* $T < +\infty$ *выполнено*:

$$\xi(\bar{y}) = \varepsilon^m \left(\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} a(\bar{u},\xi(\bar{u}))\, d\bar{u} + \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} b(\bar{u},\xi(\bar{u}))\, dw(\bar{u}) \right),$$

функция $f(\bar{y})$ *является решением уравнения*

$$f(\bar{y}) = \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} a_0(f(\bar{u}))\, d\bar{u},$$

где

1) $a(\bar{y},t)$, $b(\bar{y},t)$ *— действительнозначные, борелевы функции, определенные на* $R_+^m \times R^1$;

2) $$\lim_{N\to\infty} N^{-m} \int\limits_{[\bar{y},\bar{y}+\bar{N}]^m} a(\bar{u},t)\, d\bar{u} = a_0(t)$$

равномерно по $\bar{y} \in R_+^m$, $t \in R^1$, *где* $\bar{N} = (N,\dots,N) \in R_+^m$;

3) $\exists L > 0$:

$$|a(\bar{y},t) - a(\bar{y},s)|^2 + |b(\bar{y},t) - b(\bar{y},s)|^2 \le L^2 |t-s|^2;$$

4) $\exists C > 0$, $C_1 > 0$:

$$|b(\bar{y},t)| \le C, \quad |a(\bar{y},t)|^2 \le C_1 (1+t^2);$$

5) *существует такая функция* $\rho(\varepsilon,\bar{u}) \ge 0$, *что*

$$\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{u}]^m} \varepsilon^{-m/2} \left| \int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m} \left(a\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{x}, f(\bar{x})\right) - a_0(f(\bar{x})) \right) d\bar{x} \right| \le \rho(\varepsilon,\bar{u}).$$

Тогда при

$$R\exp\{-LT^m\} - \rho(\varepsilon,\bar{T}) > \frac{3+\sqrt{17}}{2}\sqrt{2m}\, CT^{m/2} \tag{8}$$

существует константа $C_0 > 0$, *не зависящая от* R, ε, *для которой*

$$P\left\{ \sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{T}]^m} \left| \xi\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{y}\right) - f(\bar{y}) \right| > R\varepsilon^{m/2} \right\} \le$$

$$\le C_0 \left(\frac{R\exp\{-LT^m\} - \rho(\varepsilon,\bar{T})}{CT^{m/2}} \right)^{4m} \exp\left\{ -\frac{\left(R\exp\{-LT^m\} - \rho(\varepsilon,\bar{T})\right)^2}{2C^2T^m} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\eta(\bar{y}) = \varepsilon^{-m/2}\left(\xi\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{y}\right) - f(\bar{y})\right)$, $\zeta(\bar{y}) = $
$= \varepsilon^{m/2}\int_{\left[\bar{0},\frac{1}{\varepsilon}\bar{y}\right]^m} b(\bar{u},\xi(\bar{u}))\,dw(\bar{u})$.

Имеем $(\bar{u} = (u^1,\ldots,u^m))$

$$\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{u}]^m}|\eta(\bar{y})| \le \left(\rho(\varepsilon,\bar{u}) + \sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{u}]^m}|\zeta(\bar{y})|\right)\exp\left(L\prod_{j=1}^m u^j\right).$$

Тогда

$$P\left\{\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{u}]^m}|\eta(\bar{y})| > R\right\} \le$$

$$\le P\left\{(CT^{m/2})^{-1}\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{u}]^m}|\zeta(\bar{y})| > \frac{R\exp\left\{-L\prod_{j=1}^m u^j\right\} - \rho(\varepsilon,\bar{u})}{CT^{m/2}}\right\}.$$

Согласно лемме 2 имеем

$$M\exp\{(CT^{m/2})^{-1}\lambda\zeta(\bar{y})\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{T^m}\prod_{j=1}^m y^j\right\}.$$

Тогда случайное поле $(CT^{m/2})^{-1}\zeta(\bar{y})$ — субгауссово (терминология [8]). На $D = [\vec{0},\vec{T}]^m$ имеем естественную полуметрику

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \sup_{\lambda\neq 0}\left\{\left|\lambda^{-1}(2\ln M\exp\{\lambda(CT^{m/2})^{-1}(\zeta(\bar{x})-\zeta(\bar{y}))\})^{1/2}\right|\right\} \le$$

$$\le \sup_{\lambda\neq 0}\left\{\left|\lambda^{-1}\left(2\ln\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}T^{-m}\mu\{[\bar{0},\bar{x}]^m\Delta[\bar{0},\bar{y}]^m\}\right\}\right)^{-1/2}\right|\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{m}{T}\|\bar{x}-\bar{y}\|_{R_+^m}\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $\mu(\cdot)$ — мера Лебега в R_+^m, Δ — знак симметрической разности.

Теперь мажоритарную размерность κ пространства $\mathfrak{X} = (D, d(\cdot,\cdot))$ можно положить равной $2m$. Заметим, что в силу (9) κ и константа C_{10} из определения мажоритарной размерности в [8] не зависят от ε. Так как

$$\|(CT^{m/2})^{-1}\zeta(\bar{y})\|_{\mathfrak{X}} \le 1,$$

то согласно теореме 1 из [8] имеем требуемое. Теорема 6 доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *а также*

1) $\exists L_1 > 0:\ |a(\bar{y},t) - a(\bar{y},s)| \le L_1|t-s|$;

2) $\exists K>0,\ \gamma>1:\ \forall\ \bar{y}\in R_+^m,\ \forall\ t\in R^1,\ \forall\ \bar{N}\in R_+^1 \Rightarrow$

$$\left|N^{-m}\int_{[\bar{y},\bar{y}+\bar{N}]^m} a(\bar{u},t)\,d\bar{u} - a_0(t)\right| \le KN^{-\gamma},$$

где $\bar{N} = (N,\ldots,N)\in R_+^m$.

Тогда

$$P\left\{\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{T}]^m}\left|\left(\xi\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{y}\right)-f(\bar{y})\right)\right|>\sqrt{\varepsilon}\right\}\to 0,\quad \varepsilon\to 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что в условиях леммы выполнено $|a_0(t)-a_0(s)|=L_1|t-s|$, $|a_0(t)|\le C_1(1+|t|)$, $|f(\bar{y})|\le C_1\exp\{C_1T^m\}=C_2$ $\forall\, t,s\in R^1$, $\forall\ \bar{y}\in R_+^m$. Положим $\bar{a}=(a^1,\dots,a^m)\in R_+^m$. При $\bar{y}$, $\bar{y}+\bar{a}\in$ $\in[\bar{0},\bar{T}]^m$

$$|f(\bar{y}+\bar{a})-f(\bar{y})|\le C_1(1+C_2)T^{m-1}m\sum_{j=1}^{m}|a^j|.$$

Пусть на всех координатных осях имеем разбиение с одинаковой мелкостью $\Delta_\varepsilon\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m}\left(a\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{u},f(\bar{u})\right)-a_0(f(\bar{u}))\right)d\bar{u}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j_1,\dots,j_m}\left\{\left|\int\limits_{y^{j_1-1}}^{y^{j_1}}\dots\int\limits_{y^{j_m-1}}^{y^{j_m}}\left(a\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{u},f(\bar{u})\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,a\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{u},f(y^{j_1-1},\dots,y^{j_m-1})\right)\right)d\bar{u}\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{y^{j_1-1}}^{y^{j_1}}\dots\int\limits_{y^{j_m-1}}^{y^{j_m}}\left(a\left(\frac{1}{\varepsilon}\bar{u},f(y^{j_1-1},\dots,y^{j_m-1})\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,a_0\big(f(y^{j_1-1},\dots,y^{j_m-1})\big)\right)d\bar{u}\right|+$$

$$\left.+\left|\int\limits_{y^{j_1-1}}^{y^{j_1}}\dots\int\limits_{y^{j_m-1}}^{y^{j_m}}\left(a_0\big(f(y^{j_1-1},\dots,y^{j_m-1})\big)-a_0(f(\bar{u}))\right)d\bar{u}\right|\right\}\le$$

$$\le\frac{2L_1}{\sqrt{\varepsilon}}C_1(1+C_2)T^{2m-1}m\Delta_\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_\varepsilon}\right)^{\gamma}KT^m.$$

Пусть $\Delta_\varepsilon=\varepsilon^\alpha$. Потребуем, чтобы $\varepsilon^{\alpha-1/2}\to 0$, $\varepsilon^{(1-\alpha)\gamma-1/2}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Имеем $1-1/(2\gamma)>\alpha>1/2$. Выбирая $R=\varepsilon^{(1-m)/2}$, получаем $\rho(\varepsilon,\bar{T})/R\to$ $\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, и, начиная с некоторого ε выполнено (8). Тогда получаем утверждение леммы.

5. Неравенства больших уклонений в одной стохастической системе. Результаты данного пункта обобщают теорему 2 работы [9]. Пусть поле $\xi_\varepsilon^\theta(\bar{y})$ задается стохастическим уравнением

$$\xi_\varepsilon^\theta(\bar{y})=\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m}f(\bar{u},\xi_\varepsilon^\theta(\bar{u}),\theta))\,d\bar{u}+\varepsilon\int\limits_{[\bar{0},\bar{y}]^m}b(\bar{u},\xi_\varepsilon^\theta(\bar{u}))\,dw(\bar{u}),$$

где $\bar{y}\in[\bar{0},\bar{T}]^m$, $\theta\in\Theta\subseteq R^s$, $\varepsilon>0$.

Пусть выполнены условия

$$\forall\, t, t_1, t_2 \in R^1,\ \forall\, \bar{y} \in R_+^m,\ \forall\, \theta, \nu, \theta_1, \theta_2 \in \Theta \Rightarrow$$

$$|f(\bar{y}, t, \theta)| \le C_3\,(1 + |t|),\quad 0 < \gamma_1 \le |b(\bar{y}, t)| \le \gamma_2 < +\infty,$$

$$\int\limits_{[\bar{0}, \bar{T}]^m} \left| f\left(\bar{y}, \xi_0^\theta(\bar{y}), \theta_1\right) - f\left(\bar{y}, \xi_0^\theta(\bar{y}), \theta_2\right) \right|^2 d\bar{y} \ \ge\ C_4 \|\theta_1 - \theta_2\|_{R^s}^{2\alpha}, \tag{10}$$

$$|f(\bar{y}, t_1, \theta) - f(\bar{y}, t_2, \theta)|^2 + |b(\bar{y}, t_1) - b(\bar{y}, t_2)|^2 \le L_2^2\, |t_1 - t_2|^2,$$

$$|f(\bar{y}, t, \theta) - f(\bar{y}, t, \nu)| \le L_3 \|\theta - \nu\|_{R^s}^\alpha,\quad \alpha \in (0, 1),$$

где функции $f(\bar{y}, t, \theta)$, $b(\bar{y}, t)$ — действительнозначные и непрерывные по совокупности переменных $(\bar{y}, t)$ при каждом $\theta \in \Theta$.

Пусть $\psi(\varepsilon) \to 0$; $\varepsilon \to 0$ — нормирующий множитель. Кроме того, пусть t: $\theta + \psi(\varepsilon) t \in \Theta$. Тогда согласно теореме 5 имеем

$$\frac{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta + \psi(\varepsilon) t}}}{d\mu_{\xi_\varepsilon^\theta}} \left(\xi_\varepsilon^\theta(\cdot, \omega)\right) =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{[\bar{0}, \bar{T}]^m} \lambda\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}), \theta, t\right) dw(\bar{y}) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int\limits_{[\bar{0}, \bar{T}]^m} \lambda^2\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}), \theta, t\right) d\bar{y} \right\},$$

где $\lambda\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}), \theta, t\right) = b^{-1}\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y})\right)\left(f\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}), \theta + \psi(\varepsilon) t\right) - f\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}), \theta\right)\right)$.

5.1. Неравенство больших уклонений для траекторий. Имеем

$$|\xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}) - \xi_0^\theta(\bar{y})| \le \varepsilon \exp\left\{ L_2 \prod_{j=1}^m y^j \right\} \sup_{\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m} \left| \int\limits_{[\bar{0}, \bar{y}]^m} b(\bar{u}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{u}))\, dw(\bar{y}) \right|.$$

Тогда

$$P\left\{ \sup_{\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m} \left| \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}) - \xi_0^\theta(\bar{y}) \right| > R\varepsilon \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \sup_{\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m} \left| \int\limits_{[\bar{0}, \bar{y}]^m} b(\bar{u}, \xi_\varepsilon^\theta(\bar{u}))\, dw(\bar{u}) \right| > R \exp\left\{ -L_2 T^m \right\} \right\}.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 6, получаем при $P \exp\{-L_2 T^m\} >$ $> \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} \sqrt{2m}\, \gamma_2 T^{m/2}$, что существует $C_5 > 0$ — не зависящая от R, ε константа, для которой

$$P\left\{ \sup_{\bar{y} \in [\bar{0}, \bar{T}]^m} \left| \xi_\varepsilon^\theta(\bar{y}) - \xi_0^\theta(\bar{y}) \right| > R\varepsilon \right\} \le$$

$$\le C_5 \left(\frac{R \exp\{-L_2 T^m\}}{\gamma_2 T^{m/2}} \right)^{4m} \exp\left\{ -\frac{R^2 \exp\{-2 L_2 T^m\}}{2\gamma_2^2 T^{m/2}} \right\} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, если положить $R = \varepsilon^{-\delta}$, $\delta \in (0, 1)$.

5.2. Неравенство больших уклонений для оценки параметра. Пусть $\hat{\theta}_\varepsilon$ — оценка максимального правдоподобия для параметра $\theta = \theta_0$. Будем придерживаться методики, использованной в [10] при доказательстве теоремы 1.5.1. Тогда

$$P\left\{\|\psi^{-1}(\varepsilon)(\hat{\theta}_\varepsilon-\theta_0)\|_{R^s}>H\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{\|t\|_{R^s}>H}\frac{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0+\psi(\varepsilon)t}}}{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0}}}\left(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\omega)\right)\ge 1\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{\|t\|_{R^s}>H}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m}\lambda\left(\bar{y},\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y}),\theta_0,t\right)dw(\bar{y})\right)\ge\right.$$

$$\left.\ge\inf_{\|t\|_{R^s}>H}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m}\lambda^2\left(\bar{y},\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y}),\theta_0,t\right)d\bar{y}\right)\right\}.$$

Обозначим через Γ_r пересечение множества $U_\varepsilon=\psi^{-1}(\varepsilon)(\Theta-\theta_0)$ с шаровым слоем $\{H+r\le\|t\|_{R^s}\le H+r+1\}$. Учитывая очевидное неравенство $(a+b+c)^2\ge\frac{1}{2}a^2-2b^2-2c^2$ и ограниченность $b(\bar{y},s)$, в силу (10) имеем

$$P\left\{\sup_{\Gamma_r}\ln\frac{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0+\psi(\varepsilon)t}}}{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0}}}\left(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\omega)\right)\ge 0\right\}\le$$

$$\le P\left\{\sup_{\Gamma_r}\eta(t)\ge\frac{1}{2\varepsilon\gamma_2^2}\left(\frac{1}{2}C_4\psi^{2\alpha}(\varepsilon)-4L_2T^m(\varepsilon\beta)^2\right)(H+r)^{2\alpha}\right\}+P_1^r,$$

где $P_1^r=P\left\{\sup_{\bar{y}\in[\bar{0},\bar{T}]^m}\left|\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y})-\xi_0^{\theta_0}(\bar{y})\right|\ge(H+r)^\alpha\varepsilon\beta\right\}$, β выбрано так, чтобы

$$B_1=\frac{1}{2\varepsilon^2\gamma_2^2}\left(\frac{1}{2}C_4\psi^{2\alpha}(\varepsilon)-4L_2T^m\varepsilon^2\beta^2\right)>0,$$

и обозначено

$$\eta(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m}\lambda\left(\bar{y},\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y}),\theta_0,t\right)dw(\bar{y}).$$

Разобьем слой $\{H+r\le\|t\|_{R^s}\le H+r+1\}$ на N областей диаметром не больше h каждая. Скорость роста N определим позже. Обозначим индуцированное разбиение через $\Gamma_r^1,\ldots,\Gamma_r^N$. Выберем в Γ_r^j точку t_j. Тогда

$$P\left\{\sup_{\Gamma_r}\eta(t)\ge B_1(H+r)^{2\alpha}\right\}\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{N}P\left\{\eta(t_j)\ge\frac{1}{2}B_1(H+r)^{2\alpha}\right\}+P\left\{\sup_t|\eta(u)-\eta(v)|\ge\right.$$

$$\left.\ge\frac{B_1(H+r)^{2\alpha}}{2};\ \|u\|_{R^s},\|v\|_{R^s}\le H+r+1,\ \|u-v\|_{R^s}\le h\right\}.\qquad(11)$$

Оценим первое слагаемое в (11). В силу леммы 3 имеем

$$P\left\{\sup\eta(t_j)\ge\frac{1}{2}B_1(H+r)^{2\alpha}\right\}\le$$

$$\leq \min_{z>0} P\left\{ z\eta(t_j) - \frac{z^2}{2\varepsilon^2} \int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} \lambda^2\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y}), \dot{\theta}_0, t_j\right) d\bar{y} \geq \right.$$

$$\left. \geq \frac{zB_1(H+r)^{2\alpha}}{2} - \frac{z^2}{2\varepsilon^2} \int\limits_{[\bar{0},\bar{T}]^m} \lambda^2\left(\bar{y}, \xi_\varepsilon^{\theta_0}(\bar{y}), \theta_0, t_j\right) d\bar{y} \right\} \leq$$

$$\leq \exp\{-B_2(H+r)^{2\alpha}\},$$

где $B_2 = \dfrac{B_1\varepsilon^2\gamma_1^2 H^{2\alpha}}{8T^m L_3^2 (H+1)^{2\alpha}\psi^{2\alpha}(\varepsilon)}$.

В силу леммы 1 для натурального k: $M|\eta(t)|^{2k} \leq Q(t)$, где $Q(t) = \max\left(A, A\|t\|_{R^s}^{2\alpha k}\right)$, $A = A(\varepsilon) = (k(2k-1))^k T^{mk}(L_3(\gamma_1\varepsilon)^{-1})^{2k}\psi^{2\alpha k}(\varepsilon)$. Далее, $M|\eta(t+t_1) - \eta(t)|^{2k} \leq Q(t)\|t\|_{R^s}^{2k}$. При этом функция $Q(t)\colon R^s \to R^1$ ограничена на компактах. По теореме 19 приложения 1 из [10] имеем, что при $k \geq \left[\dfrac{s}{2\alpha}\right] + 1$ будет существовать $B > 0$, зависящая от s, k, m, α, для которой

$$M \sup_{\substack{\|u-v\|_{R^s} \leq h, \\ \|u\|_{R^s},\, \|v\|_{R^s} \leq H+r+1}} |\eta(u) - \eta(v)| \leq B A^{1/2k}(H+r+1)^{\alpha+s} h^{(2\alpha k - s)/(2k)}.$$

Очевидно, что

$$P\left\{ \sup_{\substack{\|u-v\|_{R^s} \leq h, \\ \|u\|_{R^s},\, \|v\|_{R^s} \leq H+r+1}} |\eta(u) - \eta(v)| \geq \frac{B_1(H+r)^{2\alpha}}{2} \right\} \leq$$

$$\leq B_3(H+r)^{s-\alpha} h^{(2\alpha k - s)/(2k)},$$

где

$$B_3 \leq \frac{2BA^{1/(2k)}}{B_1}\left(\frac{H+1}{H}\right)^{\alpha+s}.$$

Тогда

$$P\left\{ \sup_{\Gamma_r} \eta(t) \geq B_1(H+r)^{2\alpha} \right\} \leq$$

$$\leq N\exp\{-B_2(H+r)^{2\alpha}\} + B_3(H+r)^{s-\alpha} h^{(2\alpha k - s)/(2k)},$$

$$P_0 = P\left\{ \sup_{\|t\|_{R^s} > H} \ln \frac{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0+\psi(\varepsilon)t}}}{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0}}}\left(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\omega)\right) \geq 0 \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{+\infty} P\left\{ \sup_{\Gamma_r} \ln \frac{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0+\psi(\varepsilon)t}}}{d\mu_{\xi_\varepsilon^{\theta_0}}}\left(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot,\omega)\right) \geq 0 \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{+\infty}\left(N\exp\{-B_2(H+r)^{2\alpha}\} + B_3(H+r)^{s-\alpha} h^{(2\alpha k - s)/(2k)} + P_1^r \right).$$

Пользуясь свойствами субгауссовых полей, легко получить, что существует константа $C_6 > 0$, не зависящая от θ_0, ε, β, H, r, α, для которой

$$P_1^r \le P\left\{\sup_{\vec{y}\in[\vec{0},\vec{y}]^m}\left|\int_{[\vec{0},\vec{y}]^m} b\left(\vec{u},\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\vec{u})\right)dw(\vec{u})\right| \ge \beta(H+r)^\alpha e^{-L_2T^m}\right\} \le$$

$$\le C_6\left(\frac{\beta(H+r)^\alpha e^{-L_2T^m}}{\gamma_2 T^{m/2}}\right)^{4m} \exp\left\{-\frac{\beta^2(H+r)^{2\alpha}e^{-2L_2T^m}}{2\gamma_2^2T^m}\right\}.$$

Положим $h = \exp\{-(H+r)^{2\alpha}p\}$, $0 < p < \dfrac{B_2}{s}$, $N \le A_0(H+r)^{s-1}h^{-s}$. Обозначим

$$\alpha_0 = \max(s-\alpha; 4\alpha m),$$

$$C_7 = \max\left(A_0; B_3; C_6\left(\frac{\beta e^{-L_2T^m}}{\gamma_2 T^{m/2}}\right)^{4m}\right),$$

$$B_0 = \min\left\{B_2 - ps; p\,\frac{2\alpha k - s}{2k}; \frac{\beta^2\exp\{-2L_2T^m\}}{2\gamma_2^2T^m}\right\},$$

где A_0 — достаточно большое число.

Тогда

$$P_0 \le 3\,C_7\sum_{r=0}^{+\infty}(H+r)^{\alpha_0}\exp\left\{-B_0(H+r)^{2\alpha}\right\} \le$$

$$\le 3\,C_7\sum_{r=0}^{r_0(H)}(H+r)^{\alpha_0}\exp\left\{-B_0(H+r)^{2\alpha}\right\} +$$

$$+\,3\,C_7\exp\left\{-\frac{B_0}{2}(H+r)^{2\alpha}\right\}\int_{r_0(H)}^{+\infty}(H+y)^{\alpha_0}\exp\left\{-\frac{B_0}{2}(H+y)^{2\alpha}\right\}dy =$$

$$= P_1(H),$$

где $r_0(H) = \max\left(0; 1 + \left[\left(\dfrac{\alpha_0}{2B_0\alpha}\right)^{1/2\alpha} - H\right]\right) \to 0$ при $H \to +\infty$, $[y]$ обозначает целую часть числа $y \in R^1$.

Полагая $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/\alpha}$, $H = \varepsilon^{\kappa - 1/\alpha}$, где $\kappa \in \left(0, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\psi(\varepsilon)H \to 0,$$

$$B_1 = \frac{1}{2\gamma_2^2}\left(\frac{1}{2}C_4 - 4L_2T^m\beta^2\right),$$

$$B_2 = \frac{B_1^2\gamma_1^2}{8T^mL_3^2}\left(\frac{H}{H+1}\right)^{2\alpha} \to B_2^0 = B_1^2\gamma_1^2\left(8T^mL_3^2\right)^{-1},$$

$$B_3 = \frac{2B(k(2k-1))^{1/2}T^{m/2}L_3}{B_1\gamma_1}\left(\frac{H+1}{H}\right)^{\alpha+s} \to$$

$$\to B_3^0 = 2B\left(k(2k-1)T^m\right)^{1/2}L_3\left(B_1\gamma_1\right)^{-1},$$

$P\left\{\|\psi^{-1}(\varepsilon)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta_0)\|_{R^s} > H\right\} \le P_1(H) \to 0$ (экспоненциально быстро), т. е. оценка $\hat{\theta}_\varepsilon$ состоятельна.

1. *Imkeller P.* A stochastic calculus for continuous N-parameter strong martingales // Stochast. Process. and Appl. – 1985. – **20**. – P. 1–40.
2. *Fazekas I.* On convergence of multiparameter strong martingales in Banach lattices // Anal. Math. – 1984. – **10**. – P. 202–207.
3. *Пономаренко Л. Л.* Стохастические интегралы по многопараметрическому броуновскому движению и связанные с ними стохастические уравнения // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1972. – Вып. 7. – С. 100–109.
4. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов // Тр. шк.-сем. по теории случайных процессов (Друскининкай, 25 ноября – 30 ноября 1974 г.). – Вильнюс, 1975. – С. 33–68.
5. *Кнопов П. С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – Киев: Наук. думка, 1981. – 152 с.
6. *Гихман И.И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
7. *Бондарев Б. В.* Неасимптотические методы статистики случайных процессов: Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 358 с.
8. *Островский Е. И.* Экспоненциальные оценки распределения максимума негауссовского случайного поля // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, вып. 3. – С. 482–493.
9. *Бондарев Б. В., Симогин А. А.* Неравенства больших уклонений для оценок неизвестных параметров в стохастических системах // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 2. – С. 95–112.
10. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 527 с.

Получено 16.01.95