УДК 517.51

О. Ю. Дюженкова, асист. (Укр. пед. ун-т им. М. П. Драгоманова, Киев)

ЗАМЕЧАНИЕ О МОДУЛЕ ГЛАДКОСТИ З. ДИТЗИАНА И В. ТОТИКА

For each function $f(x)$, which is continuous on the segment $[-1, 1]$, set $\tilde{f}(t) = f(\cos t)$, the connection between the ordinary kth modulus of smoothness, $\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)})$, of the derivative $\tilde{f}^{(r)}$ of order r and the kth modulus of smoothness with a weight φ_r, $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$, of the rth order derivative $f^{(r)}$ of the function f is proved. The latter was introduced by Z. Ditsian and V. Totik. For example, if r is odd and k is even, we prove that these moduli are equivalent as $t \to 0$.

Для кожної неперервної на $[-1, 1]$ функції $f(x)$ покладемо $\tilde{f}(t) = f(\cos t)$. Досліджено зв'язок між звичайним k-м модулем неперервності $\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)})$ r-ї похідної $\tilde{f}^{(r)}$ функції $\tilde{f}$ та k-м модулем неперервності $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ з вагою φ_r r-ї похідної $f^{(r)}$ функції f, що був введений З. Дітзіаном та В. Тотіком. Зокрема, у випадку r — непарне, k — парне доведено, що ці модулі еквівалентні при $t \to 0$.

Пусть $(r+1) \in N$, $[a, b] \in R$, $C^0_{[a,b]} := C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций f с равномерной нормой $\|f\|_{[a,b]} := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$; $C^r_{[a,b]} := \{ f \mid f^{(r)} \in C_{[a,b]} \}$. Положим $I := [-1, 1]$, $C^0 := C := C_I$, $\|f\| := \|f\|_I$; C^r — подмножество функций $f \in C$, имеющих непрерывную r-ю производную на интервале $(-1, 1)$ ($C^r \neq C^r_I$ при $r \neq 0$).

Пусть $k \in N$, $m = k + r$,

$$\Delta_h^k(g; t) \leq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g\left(t - \frac{kh}{2} + ih\right)$$

— симметричная k-я разность функции $g = g(t)$ с шагом $h \in R$ в точке $t \in R$.

Для периодической непрерывной на R функции g обозначим через

$$\omega_k(\tau, g) = \sup_{h \in [0,\tau]} \sup_{t \in R} \left| \Delta_h^k(g; t) \right|, \quad \tau \geq 0,$$

ее k-й модуль непрерывности.

Положим $\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$. Для функции $f \in C$ обозначим через

$$\overline{\omega}_{k,0}(\tau, f) := \overline{\omega}_k(\tau, f) :=$$

$$:= \sup_{h \in [0,\tau]} \sup_{x:\, \left[x - \frac{kh\varphi(x)}{2},\, x + \frac{kh\varphi(x)}{2}\right] \in (-1,1)} \left| \Delta^k_{h\varphi(x)}(f, x) \right|, \quad \tau \geq 0,$$

ее k-й модуль непрерывности, введенный З. Дитзианом и В. Тотиком [1]. Для функции $f \in C^r$, $r \in N$, положим

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) = \sup_{h \in [0,\tau]} \sup_{x:\, \left[x - \frac{kh\varphi(x)}{2},\, x + \frac{kh\varphi(x)}{2}\right] \in (-1,1)} \left| \left(1 + x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{r/2} \times \right.$$

$$\times\left(1 - x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{r/2} \Delta^k_{h\varphi(x)}(f^{(r)}, x)\Bigg|,$$

где $\tau \geq 0$.

Всюду далее c_i — константы, зависящие только от k и r.

Для каждой функции $f \in C$ положим

$$\tilde{f}(t) := f(\cos t).$$

В настоящей статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любых $k \in N$, $(r+1) \in N$ и любой функции $f \in C$, для которой $f^{(r)}(t)$ непрерывна на R, справедлива оценка*

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) \leq c_1 \omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)}), \quad \tau \geq 0. \tag{1}$$

Теорема 2. *Для любых $k \in N$, $(r+1) \in N$ и любой функции $f \in C^r$ справедливы оценки*

$$\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)}) \leq c_2\left(\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) + \tau^k \|f\|\right), \quad \tau \geq 0, \tag{2}$$

если k — четное, r — нечетное, или k — нечетное, $r = 0$;

$$\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)}) \leq c_2\left(\tau^k \int\limits_\tau^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u^{k+1}}\, du + \tau^k \|f\|\right), \quad 0 \leq \tau \leq 2, \tag{3}$$

если k — нечетное, r — нечетное;

$$\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)}) \leq c_2\left(\int\limits_0^\tau \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u}\, du + \tau^k \|f\|\right), \quad \tau \geq 0, \tag{4}$$

если k — нечетное, r — четное;

$$\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)}) \leq$$

$$\leq c_2\left(\int\limits_0^\tau \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u}\, du + \tau^k \int\limits_\tau^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u^{k+1}}\, du + \tau^k \|f\|\right), \quad \tau \geq 0, \tag{5}$$

если k — четное, r — четное.

Замечание. В случае $m = 1$, т. е. $r = 0$, $k = 1$, имеем более точную, чем (2), оценку

$$\omega_1(\tau, \tilde{f}) \leq c_2' \overline{\omega}_1(\tau, f).$$

Оценки (1)–(5) означают, что прямые и обратные теоремы конструктивной теории приближения функций в терминах $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ следуют из соответствующих теорем в терминах $\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)})$, и обратно.

Вместе с тем существуют ситуации, в которых применение $\overline{\omega}_k(\tau, f)$ дает более точную оценку. Например, в монотонной аппроксимации известна оценка $E_n^{(1)}(f) \leq c_3 \overline{\omega}_2(1/n, f)$, которая в силу (1) влечет оценку $E_n^{(1)}(f) \leq$ $\leq c_3' \overline{\omega}_2(1/n, \tilde{f})$. Обратно, из второй оценки первая не следует. Потому что, во-первых, 2 — четное число и, во-вторых, обе оценки окажутся неверными, если в них заменить 2 на $k > 2$.

Ранее для случая $r = 0$ теоремы 1 и 2 были доказаны Л. Г. Шах [2].

В дальнейшем будут использованы следующие хорошо известные факты (см., например, [3]).

Если функция $g \in C^k_{[a,b]}$ и $(x-k\rho/2, x+k\rho/2) \in [a,b]$, то

$$\left|\Delta^k_\rho(g;x)\right| \le \rho^k \| g^{(k)} \|_{[a,b]}. \tag{6}$$

Если $P = P(x)$ — многочлен степени $\le k-1$, то при каждом $j = \overline{1,k-1}$

$$\| P^{(j)} \|_{[a,b]} \le c_1' (b-a)^{-j} \| P \|_{[a,b]}. \tag{7}$$

Обозначим $\omega(\tau) := \omega_k(\tau, \tilde f^{(r)})$. Выполняется неравенство

$$\tau_1^{-k}\omega(\tau_1) \le 2^k \tau_2^{-k}\omega(\tau_2), \quad 0 < \tau_2 < \tau_1. \tag{8}$$

Аналогично

$$\tau_1^{-k}\overline{\omega}_{k,r}(\tau_1, f^{(r)}) \le c_4 \tau_2^{-k}\overline{\omega}_{k,r}(\tau_2, f^{(r)}), \quad 0 < \tau_2 < \tau_1.$$

***Доказательство теоремы* 1.** 1°. Зафиксируем точку $x_0 \in (-1,1)$ и число $h > 0$ такие, что $\left[x_0 - \dfrac{kh\varphi(x_0)}{2}, x_0 + \dfrac{kh\varphi(x_0)}{2}\right] \subset (-1,1)$. Положим $d :=$ $:= h\varphi(x_0)$. Справедливость теоремы 1 вытекает из оценки

$$\left(\sqrt{\left(1 - \frac{kd}{2}\right)^2 - x_0^2}\right)^r \left|\Delta^k_d(f^{(r)}, x_0)\right| \le c_1 \omega_k(h, \tilde f^{(r)}), \tag{9}$$

доказательство которой состоит из следующих пунктов.

2°. Обозначим $a := x_0 - \dfrac{kd}{2}$, $b := x_0 + \dfrac{kd}{2}$, $\alpha := \arccos a$, $\beta := \arccos b$, $t_0 := \arccos x_0$, так что $d = h \sin t_0$.

Из равенств $b - a = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin^2 t_0 = \sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} \times$ $\times \cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и неравенств $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}(\alpha-\beta) \le 4\sin\dfrac{\alpha-\beta}{4} < \alpha-\beta$, $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \le$ $\le \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ следуют оценки

$$kh < \alpha - \beta \le \frac{\pi}{2} kh < 2kh. \tag{10}$$

Для $m = 1$ теорема 1 непосредственно вытекает из (8) и (10). Поэтому всюду далее $m > 1$.

3°. Пусть $f_1(x) := f(-x)$, тогда $\tilde f_1(t) = f_1(\cos t) = f(-\cos t) = \tilde f(t-\pi)$. Поскольку $\overline{\omega}_{k,r}\left(\tau, f_1^{(r)}\right) \equiv \overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$, $\omega_k\left(\tau, \tilde f_1^{(r)}\right) \equiv \omega_k\left(\tau, \tilde f^{(r)}\right) =: \omega(\tau)$, то без потери общности можно считать $x_0 \ge 0$. Итак, всюду далее $x_0 \ge 0$, т. е. $2t_0 \le \pi$. Вследствие оценок $\sin t_0 \ge \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и (10) имеем $2(t_0 - \beta) \ge \alpha -$ $- \beta > kh$. Поэтому

$$kh < 2t_0 \le \pi. \tag{11}$$

Поскольку функция $\tilde f = \tilde f(t)$ — 2π-периодическая, то при каждом $j = \overline{1,r}$ найдется точка $\theta_j \in [-\pi, \pi]$, в которой $\tilde f^{(j)}(\theta_j) = 0$. Поэтому в силу неравенства Уитни [4]

$$\left\| \tilde f^{(j)} \right\|_{[-\pi,\pi]} \le c_2'' \omega(\pi) \tag{12}$$

при каждом $j = \overline{1, r}$. Без потери общности будем считать, что $\tilde{f}(0) = 0$, а значит, и для $j = 0$ (12) верно, т. е. $\|\tilde{f}\|_{[-\pi,\pi]} \le c_2'' \omega(\pi)$.

4°. Рассмотрим функцию $t = t(x) := \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, для которой установим оценку

$$|t^{(n)}(x)| < A_n (\sin(t(x)))^{1-2n}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in N, \quad A_n = \text{const}. \tag{13}$$

Обозначим $q_n(t) := t^{(n)}(x)$, в частности, $q_1(t) = -\dfrac{1}{\sin t}$, $q_2(t) = -\dfrac{\cos t}{\sin^3 t}$, $q_3(t) = -\dfrac{\sin^2 t + 3\cos^2 t}{\sin^5 t}, \ldots$. Из тождества $q_{n+1}(t) = -\dfrac{q_n'(t)}{\sin t}$ вытекает представление $q_n(t) = \dfrac{T_{n-1}(t)}{(\sin t)^{2n-1}}$, в котором $T_{n-1} = T_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка $\le n-1$. Поэтому (13) верно с константой $A_n = \|T_{n-1}\|_{[0,\pi]}$.

5°. Покажем, что функция $t^2 = t^2(x) := (\arccos x)^2$ бесконечно дифференцируема на полуинтервале $(-1, 1]$. Обозначим $p_n(t) := (t^2(x))^{(n)}$, в частности, $\rho_1(t) = -\dfrac{2t}{\sin t}$, $\rho_2(t) = -\dfrac{2\sin t - 2t\cos t}{\sin^3 t}, \ldots$. Из тождества $p_{n+1}(t) = -\dfrac{p_n'(t)}{\sin t}$ следует, что функция $p_n = p_n(t)$ — четная (по t) и аналитическая при $|t| < \pi$, а значит, функция $p_n(t(x)) := (t^2(x))^{(n)}$ непрерывна по x на полуинтервале $(-1, 1]$.

Обозначим

$$B_n := \|(t^2)^{(n)}\|_{[-1/2, 1]} < \infty. \tag{14}$$

6°. Из (13) и (14) для $j \in N$ и $n \in N$ следует оценка

$$|(t^j(x))^{(n)}| \le A_{j,n} t^{j-2n}(x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \quad A_{j,n} = \text{const}. \tag{15}$$

Более того, вследствие (14)

$$\|(t^j)^{(n)}\|_{[-1/2,1]} =: B_{j,n} < \infty, \quad B_{j,n} = \text{const}, \quad j \text{ — четное}. \tag{16}$$

7°. Далее, без потери общности будем считать $kh \le 1/2$, т. е. $\alpha < 3\pi/2$. Для четных j справедлива оценка

$$\left|\Delta_d^k((t^j)^{(r)}, x_0)\right| \le c_3'' h^k t_0^k. \tag{17}$$

Действительно, из (6) и (16) вытекает

$$\left|\Delta_d^k((t^j)^{(r)}, x_0)\right| \le d^k \|(t^j)^{(m)}\|_{[a,b]} \le B_{j,m} h^k t_0^k.$$

Для случая $\beta > 6kh$ докажем оценку

$$\left|\Delta_d^k((t^j)^{(r)}, x_0)\right| \le c_4' h^k t_0^{j-m-r}, \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{18}$$

Действительно, поскольку $\beta > 6kh$, то вследствие (10) $t_0 < \alpha < 2kh + \beta < 4\beta/3$, поэтому в силу (6) и (15) имеем

$$\left|\Delta_d^k((t^j)^{(r)}, x_0)\right| \le d^k \| (t^j)^{(m)} \|_{[a,b]} \le A_{j,m} d^k \| t^{j-2m} \|_{[a,b]} \le A_{j,m} d^k \beta^{j-2m} <$$
$$< \left(\frac{4}{3}\right)^{2m-j} A_{j,m} d^k t_0^{j-2m} < c_4' h^k t_0^{j-m-r}.$$

8°. Пусть $\tilde{l} := \tilde{l}(t)$ — многочлен Лагранжа степени $\le k-1$, интерполирующий функцию $\tilde{f}^{(r)} := \tilde{f}^{(r)}(t)$ в k равноотстоящих точках $-2t_0 + \frac{2i}{k-1} 2t_0$, $i = \overline{1, k-1}$, ($\tilde{l}(t) := \tilde{f}^{(r)}(0)$ при $k = 1$).

По неравенству Уитни (см., например, [4, с. 50])

$$\left\| \tilde{f}^{(r)} - \tilde{l} \right\|_{[-2t_0, 2t_0]} \le c_5 \omega(t_0).$$

Рассмотрим многочлен

$$\tilde{\mathfrak{L}}(t) \le \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!} \tau^{\nu} f^{(\nu)}(0) + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-u)^{r-1} \tilde{l}(u)\, du.$$

При всех $t \in [0, 2t_0]$ и $j = \overline{0, r}$ имеем

$$\left|\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(t) - \tilde{f}^{(j)}(t)\right| \le c_6 t^{r-j} \omega(t_0). \tag{19}$$

В частности, учитывая (12), получаем

$$\left|\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0)\right| \le c_7 \omega(\pi) < c_8 h^{-k} \omega(h), \quad i = \overline{0, r}; \tag{20}$$
$$\left\|\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}\right\|_{[0, 2t_o]} \le c_9 \omega(\pi).$$

При всех $j = \overline{r+1, m-1}$ из (7) следует

$$\left\|\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}\right\|_{[0, 2t_0]} \le c_{10} t_0^{r-j} \left\|\tilde{\mathfrak{L}}^{(r)}\right\|_{[0, 2t_0]} \le c_{11} t_0^{r-j} \omega(\pi).$$

В частности, используя (8), имеем

$$\left|\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0)\right| \le c_{11} t_0^{r-j} \omega(\pi) \le c_{12} h^{-k} t_0^{r-j} \omega(h), \quad j = \overline{r+1, m-1}. \tag{21}$$

Поскольку функция $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ — четная, то и многочлен $\tilde{\mathfrak{L}}(t)$ тоже четный. Таким образом, $\tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0) = 0$, если j — нечетное. Следовательно, формула Маклорена для $\tilde{\mathfrak{L}}(t)$ имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{L}}(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{1}{(2j)!} \tilde{\mathfrak{L}}^{(2j)}(0)\, t^{2j},$$

где [] — целая часть, $t = t(x) = \arccos x$.

Обозначим $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x) := \tilde{\mathfrak{L}}(\arccos x)$, где $t = t(x) = \arccos x$. Тогда

$$\tilde{\mathfrak{L}}^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{1}{(2j)!} \tilde{\mathfrak{L}}^{(2j)}(0)\, (t^{(2j)})^{(r)},$$

$$\Delta_d^k(\tilde{\mathfrak{L}}^{(r)}, x_0) = \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \Delta_d^k((t^{2j})^{(r)}, x_0) \frac{1}{(2j)!} \tilde{\mathfrak{L}}^{(2j)}(0) + \right.$$

$$+\sum_{j=\left[\frac{r}{2}\right]+1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \Delta_d^k((t^{2j})^{(r)}, x_0)\,\frac{1}{(2j)!}\,\tilde{\mathfrak{L}}^{(2j)}(0)\Bigg).$$

Используя (17), (20), (21) и (11), выводим

$$\Delta_d^k(\tilde{\mathfrak{L}}^{(r)}, x_0) \le c_{15}\,\omega(h). \tag{22}$$

9°. Обозначим через $\tilde{L} = \tilde{L}(t)$ алгебраический многочлен Лагранжа степени $\le m-1$, который интерполирует функцию $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ в точках $\beta + i(\alpha-\beta)/(m-1)$, $i = \overline{0, m-1}$. Из неравенств Уитни и Маршо вытекает оценка [4, с. 51]

$$|\tilde{f}(t) - \tilde{L}(t)| \le c_{16}\,\frac{\omega(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^k}\,\max\{|t-\alpha|^m, |t-\beta|^m\}. \tag{23}$$

Пусть $\beta > 6kh$, тогда вследствие (10) $\alpha < 4\beta/3 < 4t_0/3$. Поэтому в силу (8) и (23) имеем

$$\|\tilde{f} - \tilde{L}\|_{[0,t_0]} \le c_{16}\,\omega(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^{-k}\alpha^m <$$

$$< c_{16}\,2^k\omega(h)\,h^{-k}\left(\frac{4}{3}\right)^m t_0^m < c_{17}\,h^{-k}t_0^m\,\omega(h).$$

Отсюда, из (8) и (19) следует

$$\|\tilde{L} - \tilde{\mathfrak{L}}\|_{[0,t_0]} \le \|\tilde{f} - \tilde{L}\|_{[0,t_0]} + \|\tilde{f} - \tilde{\mathfrak{L}}\|_{[0,t_0]} \le$$

$$\le c_{17}\,h^{-k}t_0^m\,\omega(h) + c_6\,t_0^r\,\omega(t_0) \le c_{18}\,h^{-k}t_0^m\,\omega(h).$$

Воспользовавшись (7), для всех $j = \overline{0, r}$ получим

$$\left\|\tilde{L}^{(j)} - \tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}\right\|_{[0,t_0]} \le c_5\,t_0^{-j}\,\|\tilde{L} - \tilde{\mathfrak{L}}\|_{[0,t_0]} \le c_{19}\,h^{-k}t_0^{m-j}\,\omega(h).$$

В частности,

$$\left|\tilde{L}^{(j)}(0) - \tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0)\right| \le c_{19}\,h^{-k}t_0^{m-j}\,\omega(h), \quad j = \overline{0, r}. \tag{24}$$

10°. Обозначим $L = L(x) := \tilde{L}(\arccos x)$. Для случая $\beta > 6kh$ докажем неравенство

$$\left|t_0^r\,\Delta_d^k(L^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| \le c_{20}\,\omega(h). \tag{25}$$

Для этого разложим разность $L - \mathfrak{L}$ по формуле Маклорена

$$L(x) - \mathfrak{L}(x) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\tilde{L}^{(j)}(0) - \tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0)\right)t^j,$$

где $t = t(x) = \arccos x$. Тогда

$$\Delta_d^k(L^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\tilde{L}^{(j)}(0) - \tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(0)\right)\Delta_d^k\left((t^j)^{(r)}, x_0\right).$$

Из (18) и (24) получаем

$$\Delta_d^k(L^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0) = c_4\,c_{19}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\,h^{-k}t_0^{m-j}\omega(h)\,h^k\,t_0^{j-m-r} = c_{20}\,t_0^{-r}\,\omega(h).$$

Таким образом, имеем (25).

11°. Обозначим $\tilde{g}(t) := \tilde{f}(t) - \tilde{L}(t)$, $g(x) := \tilde{g}(\arccos x)$. Для случая $\beta > 6kh$ докажем неравенство

$$\left|t_0^r \Delta_d^k(g^{(r)}, x_0)\right| \leq c_{21}\omega(h). \tag{26}$$

Вследствие леммы 4.2′ из [4] для всех $j = \overline{0, r}$ получим

$$\left\|\tilde{g}^{(j)}\right\|_{[\beta,\alpha]} \leq c_{22} h^{r-j}\omega(h). \tag{27}$$

Заметим, что для любой 2π-периодической r раз дифференцируемой на R функции $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(t)$ справедливо представление

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{r} \tilde{\psi}^{(j)}(t) \frac{T_{j,r}(t)}{(\sin t)^{2r-j}}, \quad \sin t \neq 0, \tag{28}$$

в котором $\psi(x) = \tilde{\psi}(\arccos x)$, $T_{j,r}(t)$ — фиксированные тригонометрические полиномы порядка $\leq j$.

Обозначим $A_{j,r} := \| T_{j,r}\|_{[-\pi,\pi]}$.

Поскольку $\alpha = 3\pi/2$, то для всех $t \in [\beta, \alpha]$ справедливо $\sin t > c_{23} t$. Отсюда, из (27) и (10), учитывая условие $\beta > 6kh$, для $x \in [a, b]$ имеем

$$\left|t_0^r g^{(r)}(x)\right| \leq c_{24} \sum_{j=1}^{r} \frac{t_0^r}{t^{2r-j}} h^{r-j}\omega(h) \leq c_{25} \sum_{j=1}^{r} \frac{\beta^r h^{r-j}}{\beta^{2r-j}}\omega(h) \leq c_{21}\omega(h).$$

Неравенство (26) доказано.

Из (26), (25) и (22) следует

$$\left|t_0^r \Delta_d^k(f^{(r)}, x_0)\right| \leq \left|t_0^r \Delta_d^k(f^{(r)} - L^{(r)}, x_0)\right| +$$
$$+ \left|t_0^r \Delta_d^k(L^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| + \left|t_0^r \Delta_d^k(\mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| \leq c_{26}\omega(h).$$

Таким образом, для случая $\beta > 6kh$ оценка (9) доказана.

12°. Для случая $\beta \leq 6kh$ докажем неравенство

$$\left|\beta^r \Delta_d^k(f^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| \leq c_{27}\omega(h). \tag{29}$$

Поскольку $\beta \leq 6kh$, то из (10), (11) следует $kh/2 < t_0 < \alpha < 2kh + \beta < 8kh$. Тогда, учитывая (28) и (19), для $x \in [a, b]$ получаем

$$\left|\beta^r(f^{(r)}(x) - \mathfrak{L}^{(r)}(x))\right| = \left|\beta^r \sum_{j=1}^{r}\left(\tilde{f}^{(j)}(t) - \tilde{\mathfrak{L}}^{(j)}(t)\right)\frac{T_j(t)}{(\sin t)^{2r-j}}\right| \leq$$
$$\leq c_{29} \sum_{j=1}^{r} \frac{\beta^r t^{r-j}}{(\sin t)^{2r-j}}\omega(t_0) \leq c_{27}\omega(h).$$

Таким образом, оценка (29) доказана.

Тогда из (22), (29) следует

$$\left|t_0^r \Delta_d^k(f^{(r)}, x_0)\right| \leq \left|t_0^r \Delta_d^k(f^{(r)} - \mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| + \left|t_0^r \Delta_d^k(\mathfrak{L}^{(r)}, x_0)\right| \leq c_{30}\omega(h). \tag{30}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы **2** состоит из следующих пунктов.

13°. Зафиксируем точку $t_* \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и положительное $h \le 1/m$. Если $\left[t_* - \frac{mh}{2}, t_* + \frac{mh}{2}\right] \in (0, \pi)$, то положим $x_0 := \cos\left(t_* - \frac{mh}{2}\right)$. В противном случае положим $x_0 := 1$. Обозначим $x_m := \cos\left(t_* + \frac{mh}{2}\right)$ и найдем точку $x_* \in (x_m, x_0)$ и число $h_* > 0$ из условий $x_* - \frac{mh_*\varphi(x_*)}{2} = x_m$, $x_* + \frac{mh_*\varphi(x_*)}{2} = x_0$. Из (10) следует $\frac{1}{\pi} h < h_* < h$. Пусть $d := h_*\varphi(x_*)$, $x_j = x_0 + j\frac{x_m - x_0}{2}$, $j = \overline{0, m}$. Всюду далее $x \in [x_m, x_0]$.

Обозначим $P_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})$, $\tilde{P}_j(t) = P_j(\cos x)$. С помощью простых преобразований получим неравенства

$$\Delta_h^k\left(\tilde{P}_j^{(r)}, t_0\right) \le c_{31} h^k \left(\frac{d}{h}\right)^{2j-m}, \quad \frac{m}{2} < j \le m-1, \tag{31}$$

$$\Delta_h^k\left(\tilde{P}_j^{(r)}, t_0\right) \le c_{32} h^k, \quad 1 \le j \le \frac{m}{2}. \tag{32}$$

14°. Согласно неравенству (2) из [2] имеем

$$\left|[x_0, x_1, \ldots, x_j; f]\right| \le \left(\frac{h}{d}\right)^j c_{33} \int_h^{d/h} \frac{\overline{\omega}_m(u, f)}{u^{j+1}} du +$$

$$+ c_{34} \int_{d/h}^{2} \frac{\overline{\omega}_m(u, f)}{u^{2j+1}} du + c_{35}\|f\| =:=: \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + c_{35}\|f\|,$$

где $[x_0, \ldots, x_j; f]$ — j-я разделенная разность функции f.

Оценим $\mathfrak{T}_1$:

$$\mathfrak{T}_1 \le \left(\frac{h}{d}\right)^j c_{36} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \int_h^{d/h} u^{m-j-1} du \le c_{36} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \left(\frac{h}{d}\right)^{2j-m},$$

в частности, для случая $1 \le j \le m/2$ имеем

$$\mathfrak{T}_1 \le c_{37} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m}.$$

Оценим $\mathfrak{T}_2$. Если $m/2 < j \le m-1$, то

$$\mathfrak{T}_2 \le c_{38} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \int_{d/h}^{2} u^{m-2j-1} du \le c_{38} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \left(\frac{h}{d}\right)^{2j-m}.$$

Если $1 \le j < m/2$, то

$$\mathfrak{T}_1 \le c_{39} \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m},$$

Если $j = m/2$, то

$$\mathfrak{T}_2 = c_{34} \int_{d/h}^{2} \frac{\overline{\omega}_m(u, f)}{u^{m+1}} du.$$

Таким образом,

$$\left|[x_0, x_1, \ldots, x_j; f]\right| \le (c_{36} + c_{38}) \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \left(\frac{h}{d}\right)^{2j-m} + c_{35}\|f\|, \qquad (33)$$

если $m/2 < j \le m-1$;

$$\left|[x_0, x_1, \ldots, x_j; f]\right| \le (c_{37} + c_{39}) \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} + c_{35}\|f\|, \qquad (34)$$

если $1 \le j \le m/2$;

$$\left|[x_0, x_1, \ldots, x_j; f]\right| \le c_{40} \int_h^2 \frac{\overline{\omega}_m(u, f)}{u^{m+1}}\, du + c_{35}\|f\|, \qquad (35)$$

если $j = m/2$.

15°. Рассмотрим многочлен Лагранжа $L = L_{m-1}(x, f, [x_{m-1}, x_0])$ степени $\le m-1$, интерполирующий функцию $f = f(x)$ в m равноотстоящих точках x_j, $j = \overline{0, m-1}$.

Обозначим $\tilde{L}(t) = L(\cos t)$. Докажем оценки

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)}, t_*)\right| \le c_{41}\left(\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)}) + h^k\|f\|\right), \quad m \text{ — нечетное;} \qquad (36)$$

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)}, t_*)\right| \le c_{42}\left(h^k \int_h^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u^{k+1}}\, du + h^k\|f\|\right), \quad m \text{ — четное.} \qquad (37)$$

Представим многочлен Лагранжа L по формуле Ньютона (см., например, [4, с. 10])

$$L(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^{m-1} [x_0, x_1, \ldots, x_j; f](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1}).$$

Тогда

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)}, t_*)\right| \le \sum_{j=0}^{m-1} \left|[x_0, x_1, \ldots, x_j; f]\, \Delta_h^k(\tilde{P}_j^{(r)}, t_*)\right|.$$

В случае нечетных m имеем

$$\sum_{j=1}^{m-1} = \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} + \sum_{j=\frac{m+1}{2}}^{m-1} =: \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2.$$

Из (31) и (33) следует

$$\mathfrak{I}_2 \le c_{31} h^k \sum_{j=\frac{m+1}{2}}^{m-1} \left(\frac{d}{h}\right)^{2j-m} \left((c_{36} + c_{38}) \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} \left(\frac{h}{d}\right)^{2j-m} + c_{35}\|f\|\right) \le$$

$$\le c_{31} \frac{m}{2} \left((c_{36} + c_{38}) \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^r} + c_{35} h^k \|f\|\right),$$

а из (32) и (34) следует

$$\mathfrak{I}_1 \le c_{32} h^k \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left((c_{37} + c_{39}) \frac{\overline{\omega}_m(h, f)}{h^m} + c_{35}\|f\|\right) \le$$

$$\le c_{32}\frac{m}{2}\left((c_{37}+c_{39})\frac{\overline{\omega}_m(h,f)}{h^r}+c_{35}h^k\|f\|\right).$$

Таким образом,

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right| \le c_{43}\left(\frac{\overline{\omega}_m(h,f)}{h^r}+h^k\|f\|\right),\quad m\text{ — нечетное.}\tag{38}$$

Для четных m имеем

$$\sum_{j=1}^{m-1} = \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} + \sum_{j=\frac{m}{2}+1}^{m-1} + |[x_0,x_1,\ldots,x_{m/2};f]|\left|\Delta_h^k\left(\tilde{P}_{m/2}^{(r)},t_0\right)\right| =:$$

$$=: \mathfrak{I}_3+\mathfrak{I}_4+\mathfrak{I}_5.$$

Из (32) и (34) получаем

$$\mathfrak{I}_3 \le c_{32}\frac{m}{2}\left((c_{37}+c_{39})\frac{\overline{\omega}_m(h,f)}{h^r}+c_{35}h^k\|f\|\right),$$

из (31) и (33) следует

$$\mathfrak{I}_4 \le c_{31}\frac{m}{2}\left((c_{36}+c_{38})\frac{\overline{\omega}_m(h,f)}{h^r}+c_{35}h^k\|f\|\right),$$

а из (32) и (35) имеем

$$\mathfrak{I}_5 \le c_{32}h^k\left(c_{40}\int_h^2\frac{\overline{\omega}_m(u,f)}{u^{m+1}}\,du+c_{35}\|f\|\right).$$

Поскольку

$$\overline{\omega}_m(h,f) < 2mh^m\int_h^2\frac{\overline{\omega}_m(u,f)}{u^{m+1}}\,du,$$

то

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right| \le c_{44}\left(h^k\int_h^2\frac{\overline{\omega}_m(u,f)}{u^{m+1}}\,du+h^k\|f\|\right),\quad m\text{ — четное.}\tag{39}$$

Вследствие леммы 18.4 из [4]

$$\overline{\omega}_{m-p,p}(\tau,f^{(p)}) \le c_{45}t^{r-p}\,\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)}),\quad p=\overline{0,r-1},\quad \tau\ge 0.\tag{40}$$

Таким образом, оценки (36) и (37) следуют из неравенства (40), примененного к случаю $p=0$ и, соответственно, оценок (38) и (39).

16°. Пусть $r\ne 0$. Рассмотрим r нечетное. Докажем оценку

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{f}^{(r)}-\tilde{L}^{(r)},t_*)\right| \le c_{46}\,\overline{\omega}_{k,r}(h,f^{(r)}).\tag{41}$$

Поскольку $x=\cos t$, то

$$\tilde{f}^{(r)}(t)-\tilde{L}^{(r)}(t) \le \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}}\left(f^{(j)}(x)-L^{(j)}(x)\right)T_j +$$

$$+\sum_{j=\frac{r+1}{2}}^{r}\left(f^{(j)}(x)-L^{(j)}(x)\right)\left(1-x^2\right)^{j-r/2}T_j,\tag{42}$$

где $T_j = T_j(t)$ — фиксированные тригонометрические полиномы порядка $\le j$, не зависящие от f.

Если $1 - x_0 \ge h^2$, то справедливость оценки легко показать, пользуясь определением $\overline{\omega}_{k,r}(f^{(r)}, t)$ и леммой 4.2′ из [4].

В случае $1 - x_0 < h^2$ рассмотрим многочлен

$$\hat{\mathfrak{L}} := \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{1}{\nu!}(x-x_1)^{\nu} f^{(\nu)}(x_1) + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{x_1}^{x}(x-u)^{r-1} L_{k-r}^{*}(u, f^{(r)})\,du,$$

где $L_{k-r}^{*}(x, f^{(r)}) := L_{k-r}^{*}(x, f^{(r)}, y_0, \ldots, y_{k-1})$ — многочлен Лагранжа степени $\le k-1$, интерполирующий $f^{(r)} = f^{(r)}(x)$ в точках $y_i := x_1 - \dfrac{imd}{k-1}$, $i = \overline{0, k-1}$. Заметим, что

$$f(x) - L(x) = f(x) - \hat{\mathfrak{L}}(x) - L(x, f - \hat{\mathfrak{L}}).$$

Воспользовавшись леммой 4.2 из [4], получим

$$|f^{(r)}(x) - L_{k-1}^{*}(x, f^{(r)})| \le c_{47}\frac{\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})}{(1-x)^{r/2}}.$$

Тогда

$$\left|f^{(j)}(x) - \hat{\mathfrak{L}}^{(j)}(x)\right| =$$

$$= \frac{1}{(r-j-1)!}\left|\int\limits_{x_1}^{x}(x-u)^{r-j-1}\left(f^{(r)}(u) - L_{k-1}^{*}(f^{(r)}, u)\right)du\right| \le$$

$$\le c_{48}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\left|\int\limits_{x_1}^{x}\frac{(x-u)^{r-j-1}}{(1-u)^{r/2}}\,du\right| \le$$

$$\le c_{49}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\begin{cases}(1-x_1)^{r/2-j}, & j \le \dfrac{r-1}{2};\\ (1-x)^{r/2-j}, & j \ge \dfrac{r+1}{2}.\end{cases} \tag{43}$$

В частности,

$$|f(x) - \hat{\mathfrak{L}}(x)| \le c_{50}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\,h^r.$$

Вследствие неравенства (1.48) из [4] имеем

$$L^{(j)}(x, f - \hat{\mathfrak{L}}) \le c_{51}h^{-2j}\|f - \hat{\mathfrak{L}}\|_{[x_m, x_1]} \le c_{52}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\,h^{r-2j}. \tag{44}$$

Учитывая неравенство

$$|f^{(j)}(x) - L^{(j)}(x)| \le \left|f^{(j)}(x) - \hat{\mathfrak{L}}^{(j)}(x)\right| + \left|L^{(j)}(x, f - \hat{\mathfrak{L}})\right|,$$

из (42)–(44) для $t \in \left[t_* - \dfrac{mh}{2}, t_* + \dfrac{mh}{2}\right]$ получаем

$$\left|\tilde{f}^{(r)}(t) - \tilde{L}^{(r)}(t)\right| \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \left| \left(c_{49}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})(1-x_1)^{r/2-j} + c_{52}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\, h^{r-2j} \right) T_j \right| +$$

$$+ \sum_{j=\frac{r+1}{2}}^{r} \left| \left(c_{49}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})(1-x)^{r/2-j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c_{52}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)})\, h^{r-2j} \right)(1-x)^{j-r/2} T_j \right| \leq c_{46}\,\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)}).$$

Таким образом, для нечетных r справедлива оценка (41).

17°. Поскольку

$$\left|\Delta_h^k\left(\tilde{f}^{(r)}, t_*\right)\right| \leq \left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)}, t_*)\right| + \left|\Delta_h^k\left(\tilde{f}^{(r)} - L^{(r)}, t_*\right)\right|,$$

то из (36), (37) и (41) следуют оценки

$$\left|\Delta_h^k\left(\tilde{f}^{(r)}, t_*\right)\right| \leq c_{53}\left(\overline{\omega}_{k,r}(h, f^{(r)}) + h^k \|f\|\right), \tag{45}$$

если k — четное, r — нечетное;

$$\left|\Delta_h^k\left(\tilde{f}^{(r)}, t_*\right)\right| \leq c_{54}\left(h^k \int_h^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u, f^{(r)})}{u^{k+1}}\, du + h^k \|f\| \right), \tag{46}$$

если k — нечетное, r — нечетное.

Отсюда следуют оценки (2) и (3) в теореме 2.

18°. Рассмотрим r — четное. Согласно теореме 3.5 и неравенству 2.25 из [4] имеем

$$\omega_k\left(\tau, \tilde{f}^{(r)}\right) \leq c_{55} \int_0^{\tau} \frac{\omega_{k+r}\left(u, \tilde{f}^{(r-1)}\right)}{u^2}\, du. \tag{47}$$

Поскольку $r-1$ — нечетное, то для $\omega_{k+1}\left(u, \tilde{f}^{(r-1)}\right)$ справедливы оценки (2) и (3), которые можно записать в виде

$$\omega_{k+1}\left(\tau, \tilde{f}^{(r-1)}\right) \leq c_2\left(\overline{\omega}_{k+1,r-1}(\tau, f^{(r-1)}) + \tau^{k+1} \|f\|\right), \tag{48}$$

если k — нечетное;

$$\omega_{k+1}\left(\tau, \tilde{f}^{(r-1)}\right) \leq c_2\left(\tau^{k+1} \int_{\tau}^{2} \frac{\overline{\omega}_{k+1,r-1}(u, f^{(r-1)})}{u^{k+2}}\, du + \tau^{k+1} \|f\| \right), \tag{49}$$

если k — четное.

Учитывая неравенство (40) для $p = r-1$, имеем

$$\overline{\omega}_{k+1,r-1}(\tau, f^{(r-1)}) \leq c_{45}\,\tau\,\overline{\omega}_{k,r}\left(\tau, f^{(r)}\right).$$

Отсюда и из (47)–(49) следуют оценки (4) и (5) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

1. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of Smoothness. – New York etc.: Springer, 1987. – 270 p.
2. *Шах Л. Г.* Об эквивалентности некоторых конструкций k-х модулей непрерывности // Ряды Фурье: Теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 154–160.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
4. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

Получено 06.07.94