УДК 517.5

А. А. Сарана (Житомир. пед. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ КОНТУРНО-ТЕЛЕСНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ТОНКО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ *

We prove some local contour-solid theorems for finely holomorphic functions defined on sets of the complex plane that are finely open with nonpolar components.

Доведено деякі локальні контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій, заданих на тонко відкритих з неполярним доповненням множинах комплексної площини.

1. Введение. В работах [1, 2] установлены контурно-телесные теоремы соответственно для тонко гипогармонических и тонко голоморфных функций в тонко открытых множествах комплексной плоскости C, являющиеся аналогами результатов работ [3, 4]. В работе [5] были доказаны контурно-телесные теоремы для мероморфных функций в открытых множествах комплексной плоскости C, усиливающие результаты работы [4] за счет учета нулей, полюсов и неоднолистности функций возле нулей и полюсов. В настоящей работе устанавливаются контурно-телесные теоремы для тонко голоморфных функций в тонко открытых с неполярным дополнением множествах комплексной плоскости C, аналогичные некоторым результатам, содержащимся в теоремах работы [5]. При этом в случае, когда дополнение тонко открытого множества неполярно, оценки локальных теорем работы [2] усиливаются за счет учета поведения тонко голоморфных функций возле своих нулей. При получении результатов используются методы, разработанные в [3 – 5].

2. Основные условия и обозначения. Для множества E, содержащегося в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$, используем следующие обозначения (см. [1]): $CE := \overline{C} \setminus E$, $b(E)$ — база множества E в $\overline{C}$, $\tilde{E} := E \cup b(E)$ — тонкое замыкание множества E в $\overline{C}$, $\overline{\partial}_f E$ — тонкая граница множества E в $\overline{C}$, $\partial_f E := C \cap \overline{\partial}_f E$, $(E)_i := \tilde{E} \setminus b(E)$ — множество всех тонко изолированных точек множества E, $(E)_l := E \setminus (E)_i$.

Для любого тонко открытого множества G выполнены соотношения $(G)_i = \varnothing$, $b(G) = \tilde{G}$ [6, с. 29].

Для тонко открытого множества $D \subset \overline{C}$ с неполярным дополнением CD при $w \in \overline{C}$, $\zeta \in C$, $w \neq \zeta$, существует тонкая функция Грина $g_D(w, \zeta)$ [7] (данное в [7] определение тонкой функции Грина для $D \subset C$ легко переносится на рассматриваемый случай).

Пусть $D \subset \overline{C}$ — тонко открытое множество. Функция $\varphi : D \to C$ называется *тонко голоморфной*, если каждая точка $z \in D$ имеет тонкую окрестность $V \subset D$, компактную в $\overline{C}$ (в стандартной топологии) и такую, что сужение функции φ на множество V принадлежит равномерному замыканию алгебры сужений на множество V функций, голоморфных в открытых окрестностях множества V (см. [8]; в [2] это определение дано неточно).

Функция φ, определенная в открытом множестве $D \subset \overline{C}$, является тонко голоморфной тогда и только тогда, когда она голоморфна в D [8, с. 126].

Более детально тонко голоморфные функции рассмотрены в работах [8 – 10], а также частично в работе [2].

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $\mu : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для каждой из кото-

* Выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-00089).

рых множество $I_\mu := \{x : \mu(x) > 0\}$ связно и сужение функции $\log\mu(x)$ на I_μ вогнуто относительно $\log x$. Пусть $\mathfrak{M}^\bullet$ — класс всех $\mu \in \mathfrak{M}$, для которых множество I_μ не пусто. Для $\mu \in \mathfrak{M}^\bullet$ через x_μ^- и x_μ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка I_μ. Очевидно, $0 \le x_\mu^- \le x_\mu^+ \le +\infty$. Существуют пределы

$$\mu_0 := \lim_{x\to 0}\frac{\log\mu(x)}{\log x}, \qquad \mu_\infty := \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\mu(x)}{\log x}$$

и выполняются соотношения

$$\mu_0 \ge \mu_\infty, \qquad \mu_0 > -\infty, \qquad \mu_\infty < +\infty, \tag{1}$$

а если $x_\mu^- > 0$ (аналогично $x_\mu^+ < +\infty$), то положим $\mu_0 = +\infty$ (соответственно $\mu_\infty = -\infty$). Для $\mu \equiv 0$ за μ_0 и μ_∞ можно принять произвольные конечные числа, удовлетворяющие условиям (1). При $\mu_0 < +\infty$ определим целое m_0 условиями $m_0 - 1 < \mu_0 \le m_0$, а при $\mu_\infty > -\infty$ — целое m_∞ условиями $m_\infty \le \mu_\infty < m_\infty + 1$.

Классы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^\bullet$ рассмотрены в [4]. Когда $\mu(\cdot)$ пробегает класс $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}^\bullet$, функция $\log\mu(\cdot)$ пробегает соответственно класс L или $L^\bullet$ из работ [1, 3].

Пусть G — тонко открытое множество в C и $a \in C\setminus G$. Для функции $f: G \to C$ введем величины

$$f_{a,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to a,\, z\in G}}\dfrac{\log|f(z)|}{|\log|z-a||} & \text{при} \quad a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{при} \quad a \notin \partial_f G. \end{cases}$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to\infty,\, z\in G}}\dfrac{\log|f(z)|}{\log|z|} & \text{при} \quad \infty \in \vec{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при} \quad \infty \notin \vec{\partial}_f G. \end{cases}$$

3. Локальные контурно-телесные результаты. Использовав локальные результаты для тонко голоморфных и тонко гипогармонических функций из работ [1, 2], получим усиления локальных контурно-телесных теорем для тонко голоморфных функций.

Если f — тонко голоморфная в тонко открытой области $G \subset C$ функция, то обозначим через $k(f, z)$ кратность ее значения $f(z)$ в точке $z \in G$.

Возможным неопределенным выражениям условимся приписывать следующие значения: $\infty\cdot 0 = 0$, $-\infty + \infty = -\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $a \in C$ — фиксированная точка, $G \subset C\setminus\{a\}$ — тонко открытое множество, тонкая граница которого не является полярным множеством. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}$, $f: (\tilde{G}\setminus\{a\}) \cap C \to C$ — тонко непрерывная функция, ограниченная*[1] *на каждой ограниченной части множества G, отделимой от точки a, тонко голоморфная в G и удовлетворяющая условию*

$$|f(z)| \le \mu(|z-a|) \qquad \forall z \in (\partial_f G)\setminus\{a\}. \tag{2}$$

---

[1] В теореме 1 работы [2] это условие ограниченности функции f пропущено по недосмотру, но в более общей теореме 2 работы [2] оно содержится.

Обозначим $z_1 := a$, $z_2 := \infty$. *Предположим, что при каждом* $s = 1, 2$ *(независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты* G_j *множества* G, *для которой* $z_s \in b(G_j)$, *выполняется неравенство*

$$f_{z_s, G_j} < +\infty, \tag{3}$$

а если $z_s \notin b(CG_j)$, *то предположим дополнительно, что при* $z_s = a$

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o\left(|\zeta - a|^{m_0 - 1}\right), \quad \zeta \to a, \tag{4}$$

а при $z_s = \infty$

$$\mu_\infty > -\infty, \quad f(\zeta) = o\left(|\zeta|^{m_\infty + 1}\right), \quad \zeta \to \infty. \tag{5}$$

Пусть $W_0 := \{ w \in G : f(w) = 0 \}$. *Предположим, что для каждой точки* $w \in W_0$ *существует (обычная) окрестность* $V(w)$ *такая, что функция* $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k(f,w)}}$ *ограничена в* $(V(w) \cap G) \setminus \{w\}$.

Тогда

$$|f(\zeta)| \le \mu(|\zeta - a|) \exp\left[-\sum_{w: w \in W_0} k(f, w) g_G(w, \zeta) \right] \quad \forall \zeta \in G. \tag{6}$$

Для рассматриваемых G, a, f, μ при $s = 1, 2$ введем величины $\sigma^s = \sigma^s(G, a, f, \mu)$, определяемые следующими условиями. Если $\mu \equiv 0$, то считаем $\sigma^1 = \sigma^2 = 0$, а если $\mu \in \mathfrak{M}^*$, то положим

$$\sigma^1 := \begin{cases} \left(\dfrac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot - a|)} \right)_{a,G} & \text{при} \quad x_\mu^- = 0; \\ 0 & \text{при} \quad x_\mu^- > 0, \end{cases}$$

$$\sigma^2 := \begin{cases} \left(\dfrac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot|)} \right)_{\infty,G} & \text{при} \quad x_\mu^+ = +\infty; \\ 0 & \text{при} \quad x_\mu^+ < +\infty. \end{cases}$$

Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ очевидны следующие соотношения: если $\mu_0 \ne +\infty$, то $\sigma^1 = f_{a,G} + \mu_0$, а если $\mu_\infty \ne -\infty$, то $\sigma^2 = f_{\infty,G} - \mu_\infty$.

Теорема 1 является частным случаем следующего более сильного утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $a \in C$ *— фиксированная точка,* $G \subset C \setminus \{a\}$ *— тонко открытое множество, тонкая граница которого не является полярным множеством,* Q *— множество, которое содержится в* CG, *содержит точки* $z_1 := a$ *и* $z_2 := \infty$, *но не содержит никаких неполярных компактов. Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}$, $f : G \to C$ *— тонко голоморфная в* G *функция, ограниченная на каждой части множества* G, *отделимой от точек* $z_1 = a$ *и* $z_2 = \infty$, *и удовлетворяющая условию*

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z, \zeta \in G} |f(\zeta)| \le \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus Q. \tag{7}$$

Предположим, что при каждом $s = 1, 2$ *(независимо друг от друга) для каж-*

дой тонко связной компоненты G_j *множества* G, *для которой* $z_s \in b(G_j)$, *выполняется неравенство* (3), *а если* $z_s \notin b(CG_j)$, *то предположим дополнительно, что при* $z_s = a$ *выполняется* (4), *а при* $z_s = \infty$ — (5).

Пусть $W_0 = \{ w \in G : f(w) = 0 \}$. *Предположим, что для каждой точки* $w \in \in W_0$ *существует (обычная) окрестность* $V(w)$ *такая, что функция* $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k(f,w)}}$ *ограничена в* $(V(w) \cap G) \setminus \{w\}$.

Тогда для каждой тонко связной компоненты G_j *или* $f(\zeta) = 0$ *в* G_j, *или при каждом* $s = 1, 2$, *при котором* $\sigma^s = -\infty$, $z_s \in b(CG_j)$, $g_G(z_s, \zeta) = 0$ $\forall \zeta \in \in G_j$ *и*

$$|f(\zeta)| \le \mu(|\zeta - a|)\exp\left[-\sum_{w: w \in W_0} k(f,w) g_G(w,\zeta) + \sum_{s: z_s \notin b(CG_j)} \sigma^s g_G(z_s,\zeta)\right] \quad \forall \zeta \in G_j. \tag{8}$$

Поведение тонко голоморфных функций возле своих нулей характеризуется следующим свойством [8] (п. 4.3).

Утверждение 1. *Тонко голоморфная функция* f, *определенная в тонкой области* D *и отличная от постоянной, может иметь не более счетного числа нулей. Каждый нуль* d *тонко голоморфной функции в тонкой области* D *имеет конечный порядок* $n(d)$, *определяемый любым из следующих эквивалентных условий:*

1) $f^{(k)}(d) = 0$ *для* $k < n$ *и* $f^{(n)}(d) \ne 0$;

2) *существует тонко голоморфная в* D *функция* g *такая, что* $g(d) \ne 0$ *и* $f(z) = g(z)(z-d)^n$ $\forall z \in D$.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольные $q > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$ такие, что

$$\mu(x) \le q x^{\nu} \quad \forall x > 0. \tag{9}$$

Это возможно, так как $\mu \in \mathfrak{M}$.

К множествам G, Q, функции f и мажоранте qx^{ν} применим теорему 2 работы [2]. В результате получим оценку

$$|f(\zeta)| \le q|\zeta - a|^{\nu} \quad \forall \zeta \in G. \tag{10}$$

Введем функцию

$$u(\zeta) := \log|f(\zeta)| + \sum_{w \in W} k(f,w) g_G(w,\zeta),$$

где W — произвольное конечное подмножество множества W_0. Функция $u(\zeta)$ тонко гипогармонична в G, а во всех точках $z \in b(\partial_f G) \setminus \{a\}$ выполняется условие

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z, \zeta \in G} u(\zeta) \le \log\left(q|z-a|^{\nu}\right). \tag{11}$$

Пусть D — произвольная ограниченная часть множества G. Из оценки (10) следует, что функция $u(\zeta)$ ограничена сверху на каждой части множества $D \subset G$, отделимой от множества W.

Пусть $w_i \in W$. На множестве $G \setminus \{w_i\}$ имеем

$$u(\zeta) = \log\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - w_i)^{k(f,w_i)}}\right| + k(f,w_i)\left(\log|\zeta - w_i| + g_G(w_i,\zeta)\right) + \sum_{w \in W\setminus\{w_i\}} k(f,w) g_G(w,\zeta).$$

Из определения и свойств тонкой функции Грина следует, что сумма $\log|\zeta - w_i| + g_G(w_i,\zeta)$ ограничена сверху на множестве D. Учитывая условия теоремы, получаем, что функция $u(\zeta)$ ограничена сверху возле точки w_i.

Следовательно, функция $u(\zeta)$ ограничена сверху на множестве D.

Из условия (11) следует выполнение условия (2) с точкой $z_1 = a$ теоремы 2 работы [1] относительно функций $\lambda(x) := \log(qx^{\nu})$, $u(\zeta)$ и множеств G, Q. Из условий (3), (5) настоящей теоремы и конечности множества W следует выполнение для функции $u(\zeta)$ условия (1) с точкой $z_2 = \infty$ теоремы 2 работы [1]. Учитывая ограниченность сверху функции $u(\zeta)$ на произвольной ограниченной части D множества G, получаем, что для функций $u(\zeta)$, $\lambda(x) = \log(qx^{\nu})$ и множеств G, Q справедлива теорема 2 работы [1]. При этом исключительный случай указанной теоремы невозможен, так как множество $\partial_f G$ не полярно. Поэтому выполняется соотношение

$$u(\zeta) \le \log\left(q|\zeta - a|^{\nu}\right) \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{12}$$

Зафиксируем произвольную точку $\zeta_0 \in G$. Обозначим через $G(\zeta_0)$ тонко связную компоненту множества G, содержащую ζ_0.

Вначале примем, что $\mu \in \mathfrak{M}^{\bullet}$. Если $x_{\mu}^{-} < |\zeta_0 - a| < x_{\mu}^{+}$, то можно выбрать $q > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$ такие, что выполняется (9) и $\mu(|\zeta_0 - a|) = q|\zeta_0 - a|^{\nu}$. Отсюда и из (12) следует оценка

$$u(\zeta_0) \le \log \mu(|\zeta_0 - a|). \tag{13}$$

Если же $|\zeta_0 - a| \notin \left(x_{\mu}^{-}, x_{\mu}^{+}\right)$, то за счет выбора $q > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$ можно добиться того, что число $q|\zeta_0 - a|^{\nu}$ станет меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, а условие (9) сохранится. Поэтому из выполнения (12) в G следует $u(\zeta_0) = -\infty$, и для всех $\zeta \in G$, для которых $|\zeta - a| \notin \left(x_{\mu}^{-}, x_{\mu}^{+}\right)$, $u(\zeta) = -\infty$. Отсюда и из (13) получаем

$$|f(\zeta)| \exp\left[\sum_{w \in W} k(f,w) g_G(w,\zeta)\right] \le \mu(|\zeta - a|) \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{14}$$

Если же $\mu \equiv 0$, то для любых $q > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$ выполняется (9), откуда следует соотношение (13) для любого $\zeta_0 \in G$, а также (14) (для указанного μ).

Следовательно, доказано, что при условиях теоремы 2 всегда имеет место оценка (14). Из (14) с учетом определений следуют оценки $-\infty \le \sigma^1 \le 0$, $-\infty \le \sigma^2 \le 0$.

Возьмем два числа τ_1, τ_2 такие, что при каждом из значений $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) или $\tau_s = \sigma^s = 0$, или $\tau_s \in (\sigma^s, 0]$. Зафиксируем произвольные $\sigma > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$, для которых выполняется (9). Согласно доказанному выше

$$u(\zeta) \le \log\left(\sigma|\zeta - a|^{\nu}\right) \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{15}$$

Обозначим

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) := u(\zeta) - \log\left(\sigma|\zeta-a|^{\nu}\right) - \tau_1 g_G(a,\zeta) - \tau_2 g_G(\infty,\zeta).$$

Функция $V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta)$ тонко гипогармонична в G и ограничена сверху на любой ограниченной части множества G, отделимой от точки a. Кроме того, во всех точках $z \in b(\partial_f G)\setminus\{a\}$ имеем

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta\to z,\,\zeta\in G} V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le 0.$$

Обозначим (как в работе [1])

$$u_G^a := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to a,\,z\in G}} \dfrac{u(z)}{|\log|z-a||} & \text{при} \quad a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{при} \quad a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$u_G^\infty := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{z\to \infty,\,z\in G}} \dfrac{u(z)}{\log|z|} & \text{при} \quad \infty \in \overline{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при} \quad \infty \notin \overline{\partial}_f G. \end{cases}$$

Для каждого $w \in W$ и каждого $\delta > 0$ существует конечная постоянная m такая, что при всех $|\zeta - w| > \delta$ $(\zeta \in G)$ выполняется $g_G(w,\zeta) \le m$. Отсюда с учетом конечности множества W получаем $u_G^a \le f_{a,G}$, $u_G^\infty \le f_{\infty,G}$.

Существуют конечные постоянные c_1, c_2 такие, что при $|\zeta - a| \ge 1$ выполняются неравенства $g_G(a,\zeta) \le c_1$, $g_G(\infty,\zeta) \le c_2 + \log|\zeta - a|$. Поэтому с учетом (15) имеем следующее.

Если $\tau_2 = 0$, то

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le -\tau_1 c_1 \quad \forall\, \zeta \in G: |\zeta - a| \ge 1.$$

Если же $\tau_2 \in (\sigma^2, 0)$, то при $|\zeta - a| \ge 1$ справедливо

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le u(\zeta) - \log\left(\sigma|\zeta-a|^{\nu}\right) - \tau_1 c_1 - \tau_2\left(\log|\zeta-a| + c_2\right) \le O(1), \quad \zeta \to \infty,$$

так как или $u_G^\infty = f_{\infty,G} = -\infty$ и $u(\zeta) < (\nu + \tau_2)\log|\zeta - a|$ при всех достаточно больших $|\zeta|$ (таких, что $\zeta \in G$), или $u_G^\infty \ne -\infty$, $\mu_\infty \ne -\infty$ и при всех достаточно больших $|\zeta|$ на основании (1) имеет место

$$u(\zeta) - (\nu+\tau_2)\log|\zeta-a| < \left(u_G^\infty - \nu - \sigma^2\right)\log|\zeta-a| \le \left(f_{\infty,G} - \nu - \sigma^2\right)\log|\zeta-a| =$$
$$= (\mu_\infty - \nu)\log|\zeta-a| \le 0.$$

Следовательно, функция $V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху при всех $\zeta \in G$: $|\zeta - a| \ge 1$.

Существуют конечные постоянные c_3, c_4 такие, что при $0 < |\zeta - a| \le 1$ $g_G(\infty,\zeta) \le c_3$, $g_G(a,\zeta) \le c_4 - \log|\zeta - a|$. Поэтому по аналогии с доказанным выше имеем следующее.

Если $\tau_1 = 0$, то

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le -\tau_2 c_3 \quad \forall\, \zeta \in G: |\zeta - a| \in (0,1].$$

Если же $\tau_1 \in (\sigma^1, 0)$, то при $0 < |\zeta - a| \le 1$ справедливо

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le u(\zeta) - \log\left(\sigma|\zeta-a|^{\nu}\right) - \tau_1(-\log|\zeta-a| + c_4) - \tau_2 c_3 \le O(1), \quad \zeta \to 0,$$

так как или $u_G^a = f_{a,G} = -\infty$ и $u(\zeta) < (\nu-\tau_1)\log|\zeta-a|$ при всех достаточно малых $|\zeta-a|$, или $u_G^a \ne -\infty$, $\mu_0 \ne +\infty$ и при всех достаточно малых $|\zeta-a|$

$$u(\zeta) - (\nu-\tau_1)\log|\zeta-a| < \left(-u_G^a - \nu + \sigma^1\right)\log|\zeta-a| \le$$

$$\le \left(-f_{a,G} - \nu + \sigma^1\right)\log|\zeta-a| = (\mu_0 - \nu)\log|\zeta-a| \le 0.$$

Таким образом, функция $V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху также при всех $0 < |\zeta-a| \le 1$.

Следовательно, функция $V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху в G и поэтому на основании принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] получаем

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le 0 \quad \forall\, \zeta \in G,$$

т. е.

$$u(\zeta) \le \log\left(\sigma|\zeta-a|^{\nu}\right) + \tau_1 g_G(a,\zeta) + \tau_2 g_G(\infty,\zeta) \quad \forall\, \zeta \in G.$$

Устремляя τ_s к σ^s для $s = 1, 2$, при граничном переходе получаем

$$u(\zeta) \le \log\left(\sigma|\zeta-a|^{\nu}\right) + \sigma^1 g_G(a,\zeta) + \sigma^2 g_G(\infty,\zeta) \quad \forall\, \zeta \in G \tag{16}$$

(здесь если $g_G(a,\zeta) = 0$, то $\sigma^1 g_G(a,\zeta) = 0$ (даже при $\sigma^1 = -\infty$), а если $g_G(\infty,\zeta) = 0$, то $\sigma^2 g_G(\infty,\zeta) = 0$ (даже при $\sigma^2 = -\infty$)).

Если при некотором $\zeta_0 \in G$ выполняется условие

$$\sigma^1 g_G(a,\zeta_0) + \sigma^2 g_G(\infty,\zeta_0) = -\infty \tag{17}$$

(равносильное тому, что при каком-то $s = 1, 2$ верно $\sigma^s = -\infty$ и $z_s \notin b(CG(\zeta_0))$), то имеем

$$u(\zeta) = -\infty \quad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0).$$

Отсюда, учитывая определение функции $u(\zeta)$, получаем

$$f(\zeta) = 0 \quad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0).$$

Если же условие (17) не выполняется, то при каждом $s = 1, 2$, при котором $\sigma^s = -\infty$, должно быть $z_s \in b(CG(\zeta_0))$ и $g_G(z_s,\zeta) = 0$ в $G(\zeta_0)$.

Пусть $\mu \in \mathfrak{M}^*$ и $\zeta_0 \in G$. Если же $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $\sigma > 0$, $\nu \in \mathfrak{R}$ такие, что выполняется (9) и

$$\mu\left(|\zeta_0 - a|\right) = \sigma|\zeta_0 - a|^{\nu}.$$

Отсюда и из (16) следует неравенство

$$|f(\zeta_0)| \le \mu\left(|\zeta_0 - a|\right)\exp\left[-\sum_{w\in W} k(f,w)\, g_G(w,\zeta_0) + \sum_{s:\, z_s \notin b(CG(\zeta_0))} \sigma^s g_G(z_s,\zeta_0)\right] \quad \forall\, \zeta_0 \in G. \tag{18}$$

Если же $|\zeta_0 - a| \notin (x_\mu^-, x_\mu^+)$, то, как показано выше, $f(\zeta_0) = 0$.

Таким образом, вследствие произвольности выбора множества $W \subset W_0$ из (18) следует справедливость оценки (8) для любого $\zeta \in G$.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

1. *Тамразов П. М., Сарана А. А.* Контурно-телесные свойства тонко гипогармонических функций // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1114 – 1125.
2. *Тамразов П. М., Сарана А. А.* Контурно-телесные свойства тонко голоморфных функций // Там же. – 1998. – **50**, № 5. – С. 712 – 723.
3. *Тамразов П. М.* Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций // Там же. – 1988. – **40**, № 2. – С. 210 – 219.
4. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. – 1986. – **50**, № 4. – С. 835 – 848.
5. *Алиев Т. Г., Тамразов П. М.* Мероморфные функции в контурно-телесной задаче с учетом нулей и неоднолистности. – Киев, 1985. – 12 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.46).
6. *Fuglede B.* Finely harmonic functions // Lect. Notes Math. – 1972. – № 289. – 188 p.
7. *Fuglede B.* Sur la fonction de Green pour un domaine fin // Ann. Inst. Fourier. – 1975. – **25**, № 3-4. – P. 201 – 206.
8. *Fuglede B.* Finely holomorphic functions. A survey // Rev. roum. math. pures et appl. – 1988. – **33**. – P. 283 – 295.
9. *Fuglede B.* Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. – 1976. – **2**. – P. 113 – 127.
10. *Fuglede B.* Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid. – 1986. – **11**. – P. 111 – 136.

Получено 10.10.2000