УДК 512.546

И. В. Протасов (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ЧИСЛЕ СУСЛИНА ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ЛЕВОТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

For every infinite cardinal α, we construct a zero-dimensional totally bounded left topological group with the Suslin number α.

Для кожного нескінченного кардинала α побудовано нульвимірну цілком обмежену лівотопологічну групу з числом Сусліна α.

Число Суслина $c(X)$ топологического пространства X — это супремум мощностей дизъюнктных семейств непустых открытых подмножеств пространства X. Поскольку любая компактная топологическая группа допускает меру Хаара μ и $\mu(U)>0$ для любого непустого открытого подмножества группы, то $c(G)$ счетно для любой бесконечной компактной топологической группы G.

Топологическая группа G называется *вполне ограниченной*, если для любой окрестности единицы U найдется такое конечное подмножество K, что $G=KU$. Поскольку пополнение вполне ограниченной топологической группы является компактной топологической группой, то число Суслина любой бесконечной вполне ограниченной топологической группы счетно. Более общие комбинаторные результаты о числе Суслина топологических групп содержатся в обзоре [1].

Топология τ на группе G, в которой непрерывны все левые сдвиги $x \mapsto gx$, $g \in G$, называется *левоинвариантной*. Группа G, снабженная левоинвариантной топологией, называется *левотопологической*. Левотопологическая группа G называется *вполне ограниченной*, если для любой окрестности U единицы группы найдется такое конечное подмножество K, что $G=KU$. Любая бесконечная группа допускает нульмерную вполне ограниченную левоинвариантную топологию [2]. Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство называется *нульмерным*, если каждая его точка имеет базу из открыто-замкнутых окрестностей.

В настоящей статье для любого бесконечного кардинала α построены нульмерные вполне ограниченные левотопологические группы с числом Суслина α.

Теорема 1. *Пусть F — свободная группа в бесконечном алфавите X, $X = Y \bigcup Z$ — разбиение X на бесконечные части Y, Z. Тогда на группе F существует нульмерная левоинвариантная топология τ такая, что:*

i) *для любой окрестности U единицы e существует элемент $z \in Z$ такой, что $F = U \bigcup zU$;*

ii) *существует окрестность V единицы e такая, что семейство подмножеств $\{yV\colon y \in Y\}$ дизъюнктно.*

Доказательство. Для каждого непустого слова $w \in F$ обозначим через $\lambda(w)$ первую букву слова F. Для каждого подмножества $A \subseteq X$ положим $U(A) = \{w \in F(X)\colon \lambda(w) \in A \bigcup A^{-1}\} \bigcup \{e\}$. Зафиксируем фильтр φ на X такой, что $Z \in \varphi$ и $\bigcap \varphi = \varnothing$. Согласно теореме 2.1 из [3] семейство $\{U(A)\colon A \in \varphi\}$ является базой окрестностей единицы для некоторой левоинвариантной топологии τ на F. Поскольку каждое подмножество $U(A)$ открыто-замкнуто в топологии τ, то τ нульмерна. Пусть $U = U(A)$, $A \in \varphi$ — фиксированная окрестность единицы в топологии τ. Выберем элемент $z \in A \bigcap Z$. Возьмем произвольное непустое слово $w \in F$, $\lambda(w) = b$. Если $b \in A \bigcup A^{-1}$, то

$w \in U(A)$. Если $b \notin A \cup A^{-1}$, то $z^{-1}w \in U(A)$ и $w \in zU(A)$. Следовательно, $F = U(A) \cup zU(A)$ и справедливо утверждение i). Чтобы доказать утверждение ii), положим $V = U(Z)$.

Следствие. *Для любого бесконечного кардинала α на свободной группе F ранга α существует нульмерная вполне ограниченная левоинвариантная топология с числом Суслина α.*

Доказательство. Пусть X — множество свободных образующих группы F, $X = Y \cup Z$ — разбиение X на равномощные части. Согласно утверждению i) топология τ на группе F вполне ограничена. Из утверждения ii) следует $c(F) = \alpha$.

В [2] доказано, что каждая регулярная вполне ограниченная левоинвариантная топология на произвольной группе G может быть усилена до максимальной топологии с указанными свойствами, которая, к тому же, является нульмерной. Приведем явное описание этих максимальных топологий из статьи [2], необходимое в дальнейшем.

Пусть G — дискретная группа, βG — чех-стоунова компактификация группы G. Элементами компактного пространства βG являются все возможные ультрафильтры на G, а открытую базу топологии образуют подмножества вида $\overline{A}$, $A \subseteq G$, где $\overline{A} = \{q \in \beta G : A \in q\}$. Отождествим группу G с подмножеством всех главных ультрафильтров из βG и обозначим $G^* = \beta G \setminus G$.

Продолжим операцию умножения с группы G на βG. Произведение pq ультрафильтров p, $q \in \beta G$ определим так:

$$A \in pq \iff \{g \in G : g^{-1}A \in q\} \in p.$$

Умножение на βG ассоциативно и G^* — замкнутая подполугруппа полугруппы βG. Для каждого ультрафильтра $q \in \beta G$ правый сдвиг $x \mapsto xq$ является непрерывным отображением пространства βG. Таким образом, βG — компактная правотопологическая полугруппа. О ее свойствах и комбинаторных приложениях см. [4, 5].

Предположим, что группа G бесконечна, и возьмем произвольный идемпотент p подполугруппы $G^* \subset \beta G$. Для каждого подмножества $P \in p$ положим $\mathrm{cl}(P, p) = \{x \in G : P \in xp\}$. Тогда семейство $\{\mathrm{cl}(P, p) : P \in p\}$ является базой единицы некоторой нульмерной левоинвариантной топологии τ_p на G. Группа G, снабженная топологией τ_p, обозначается $G[p]$.

Если идемпотент p выбран из минимального идеала полугруппы βG, то топология τ_p максимальна в классе всех регулярных вполне ограниченных левоинвариантных топологий на группе G. Более того, любая максимальная топология в этом классе совпадает с топологией τ_p при подходящем выборе идемпотента p из минимального идеала полугруппы βG.

Теорема 2. *Пусть F — свободная группа в непустом алфавите X, p — идемпотент полугруппы $F^* \subset \beta G$. Тогда $c(F[p]) = |F|$.*

Доказательство. Если группа F счетна, теорема очевидна, поэтому будем считать, что F несчетна, $|F| = |X|$. Положим $Y = X \cup X^{-1} \cup \{*\}$ и рассмотрим Y как одноточечную компактификацию дискретного пространства $X \cup X^{-1}$. Пусть Y^{ω} — тихоновское произведение ω копий пространства Y. Отождествим Y^{ω} с множеством всех векторов вида $(y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, $y_i \in Y$. Обозначим через f вложение F в Y^{ω}, определенное правилом

$$f(z_0 z_1 \ldots z_n) = (z_0, z_1, \ldots, z_n, *, *, *, \ldots), \quad z_i \in X \cup X^{-1}.$$

Продолжим f до непрерывного отображения $f^{\omega}: \beta F \to Y^{\omega}$. Положим $q = f^{\beta}(p)$, $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $q_i \neq *$ для всех $i \in \omega$. Пусть $Q = \{q_0, q_1, \ldots\}$, P_0 — множество всех слов из F, начинающихся буквой q_0. Поскольку $q = f^{\beta}(p)$, то $P_0 \in p$. Возьмем произвольное слово $w = x_0 x_1 \ldots x_n \in \mathrm{cl}(P_0, p) \setminus P_0$. Обозначим через P_n множество всех слов из F с префиксом $q_0 q_1 \ldots q_n$. Заметим, что $P_n \in p$.

Так как $pp = p$, P_0, $P_n \in p$ и $w \in \mathrm{cl}(P_0, p)$, то найдется такое подмножество $P' \in p$, что $wP' \subseteq P_0$ и $P' \subseteq P_n$. Поскольку $x_0 \neq q_0$, то $\{x_{01}, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq Q \cup Q^{-1}$. Отсюда следует, что подмножество $\mathrm{cl}(P_0, p) \setminus P_0$ не более чем счетно. Возьмем подмножество $A \subset X$ всех букв таких, что ни одно слово из $\mathrm{cl}(P_0, p)$ не начинается буквой $A \cup A^{-1}$. Согласно доказанному выше, $|A| = |X|$. Тогда $\{a\,\mathrm{cl}(P_0, p) : a \in A\}$ — дизъюнктное семейство подмножеств группы $F[p]$ с непустой внутренностью. Следовательно, $c(F[p]) = |F|$.

Случай 2. $q_0 = *$. Разобьем $X = A_0 \cup A_1$ на два равномощных подмножества. Обозначим через P_i множество всех слов из F, начинающихся буквой из $A_i \cup A_i^{-1}$, $i \in \{0, 1\}$. Выберем $i \in \{0, 1\}$ так, что $P_i \in p$. Поскольку $q_0 = *$, то $\mathrm{cl}(P_i, p) = P_i$. Тогда $\{g\,\mathrm{cl}(P_i, p) : g \in P_j, j \in \{0, 1\}, j \neq i\}$ — дизъюнктная система подмножеств группы $F[p]$ с непустой внутренностью. Следовательно, $c(F[p]) = |F|$.

Случай 3. $q_0 \neq *$, $q_1 \neq *, \ldots, q_{n-1} \neq *$, $q_n = *$, $n > 0$. Обозначим через P множество всех слов из F с префиксом $q_0 q_1 \ldots q_{n-1}$. Так как $f^{\beta}(p) = q$, то $P \in p$. Пусть $w = x_0 x_1 \ldots x_m$, $m \geq 2n$, и $w \in \mathrm{cl}(P, p)$. Поскольку $q_n = *$, то существует подмножество $P' \in p$ такое, что n-префикс любого слова из wP' равен $x_0 x_1 \ldots x_n$. Следовательно, $w \in P$ и $\mathrm{cl}(P, p) \subseteq P \cup F_{2m}$, где F_{2m} — множество всех слов из F длины $\leq 2m$. Положим $A = P \cup F_{2m}$. Тогда $\{x q_0^{2m} A : x \in X\}$ — дизъюнктное семейство подмножеств из $F[p]$ с непустой внутренностью. Следовательно, $c(F[p]) = |F|$.

Следствие 1. *Любую регулярную вполне ограниченную левоинвариантную топологию на свободной группе F можно усилить до нульмерной вполне ограниченной левоинвариантной топологии с числом Суслина, равным $|F|$.*

Следствие 2. *Число Суслина любой максимальной недискретной левоинвариантной топологии τ на свободной группе F равно $|F|$.*

Доказательство. Ввиду [2] найдется такой идемпотент p полугруппы F^*, что $\{P \cup e : P \in p\}$ — база окрестностей единицы e группы (F, τ). Следовательно, топология τ ослабляется до топологии группы $F[p]$ и можно воспользоваться теоремой 2.

***Замечание* 1.** Справедливы ли теоремы 1, 2 для свободных абелевых групп? Ответ — нет, препятствием является аменабельность. Если бесконечная аменабельная (в частности, абелева) группа G снабжена вполне ограниченной левоинвариантной топологией τ, то число Суслина группы (G, τ) счетно. Действительно, если μ — банахова мера на G, то $\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого подмножества U группы (G, τ).

***Замечание* 2.** В [6] (теорема 5) доказано, что на любой бесконечной аменабельной группе можно ввести максимальную недискретную левоинвариантную топологию со счетным числом Суслина. Согласно следствию 2 эта теорема не распространяется на произвольные группы.

В заключение приведем несколько нерешенных вопросов.

Вопрос 1. Пусть G — вполне ограниченная левотопологическая группа, в которой непрерывна инверсия $x \mapsto x^{-1}$. Счетно ли число Суслина группы G ?

Вопрос 2. Счетно ли число Суслина любой компактной левотопологической группы ? Как известно [7], существуют однородные компактные пространства с несчетным числом Суслина. Однако не каждое однородное компактное пространство допускает структуру левотопологической группы. Простейший пример — сфера S^2. Обоснование: любое непрерывное отображение $S^2 \to S^2$ имеет неподвижную точку. Чтобы ответить отрицательно на вопрос 2, достаточно решить положительно следующий вопрос.

Вопрос 3. Верно ли, что любое нульмерное однородное компактное пространство допускает структуру левотопологической группы ?

1. *Tkačenko M.* Introduction to topological groups // Topology and Appl. – 1998. – **86**. – P. 179–231.
2. *Протасов И. В.* Максимальные топологии на группах // Сиб. мат. журн. –1998. – **39**, № 6. – С. 1368–1381.
3. *Протасов И. В.* Фильтры и топологии на полугруппах // Мат. студ. – 1994. – Вип. 3. – С. 15–27.
4. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in the Stone-Čech compactification // Theory and Applications. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1998. – 485 p.
5. *Protasov I.* Combinatorics of numbers // Math. Stud. (Monograph Ser.). – VNTL Publ., 1997. – **2**. – 70 p.
6. *Протасов И. В.* Неразложимые левотопологические группы // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 758–765.
7. *Maurice M. A.* Compact ordered spaces. – Math. Centre Tracts 6 (Math. Centrum, Amsterdam, 1964).

Получено 17.10.2001