УДК 517.9

Ю. М. Сидоренко (Львів. нац. ун-т)

БІНАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ І (2+1)-ВИМІРНІ ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ

We construct a class of nonlinear nonlocal mappings in the explicit form that generalize the Darboux classical transformations. By using as an example the well-known Devi – Stewardson (DS) models and the matrix Kadomtsev – Petviashvili equation (MKP), we demonstrate the effectiveness of the application of these transformations in (2+1)-dimensional theory of solitons. We obtain the explicit solutions of nonlinear evolutionary equations in the form of composition of linear waves.

Побудовано в явному вигляді клас нелінійних нелокальних відображень, що узагальнюють класичні перетворення Дарбу. На прикладі відомих нелінійних моделей Деві – Стюардсона (DS) і матричного рівняння Кадомцева – Петвіашвілі (МКР) проілюстровано ефективність застосувань цих перетворень в (2+1)-вимірній теорії солітонів. Явні розв'язки нелінійних еволюційних рівнянь отримано у вигляді нелінійної суперпозиції лінійних хвиль.

Вступ. Методам дослідження інтегровних моделей математичної і теоретичної фізики (теорії солітонів), а також побудові їх точних розв'язків присвячено велику кількість наукових публікацій (див., наприклад, [1 – 7]). У даній роботі отримано результати, що розвивають формально-алгебраїчний підхід [2, 3, 7] до проблеми інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, які допускають комутаторне зображення Лакса – Захарова – Шабата в матричній алгебрі диференціальних операторів.

Ці результати також можуть бути узагальнені на нелінійні моделі з нелокальними редукціями [8 – 24], які допускають інтегро-диференціальні комутаторні зображення.

1. Бінарні перетворення. Позначимо через $\mathcal{H}_{\mp} := \mathrm{Mat}_{N\times K}(\mathbf{R}\to\mathbf{C})$ лінійні простори достатньо гладких комплекснозначних $(N\times K)$-матричних функцій дійсної змінної $x\in\mathbf{R}$, для яких всі елементи є інтегровними з квадратом функціями на лівій (правій) півосі.

Означення 1. *Нелінійні нелокальні відображення пари функцій* $(\varphi,\psi)\in\mathcal{H}_{\mp}^2$, *параметризовані деякою сталою комплексною* $(K\times K)$*-матрицею* C, *що задаються відповідно таким чином*:

$$\mathcal{BD}_C : (\varphi,\psi)\to(\Phi,\Psi),$$

$$\Phi := \Phi[\varphi,\psi,C] = \varphi\left(C \pm \int\limits_{\mp\infty}^{x} \psi^{\top}\varphi\, ds\right)^{-1} := \varphi\Omega_{\mp}^{-1}[\varphi,\psi,C], \tag{1}$$

$$\Psi := \Psi[\varphi,\psi,C] = \psi\left(C^{\top} \pm \int\limits_{\mp\infty}^{x} \varphi^{\top}\psi\, ds\right)^{-1} := \psi\Omega_{\mp}^{-1}[\psi,\varphi,C^{\top}],$$

надалі називатимемо бінарними перетвореннями.

Очевидно, з (1) випливає $\Omega_{\mp}^{\top}[\varphi,\psi,C] = \Omega_{\mp}[\psi,\varphi,C^{\top}]$.

Теорема 1. *При* $|C| := \det C \neq 0$ *обернене бінарне перетворення* $\mathcal{BD}_C^{-1}$: $(\Phi,\Psi)\to(\varphi,\psi)$ *задається явними формулами*

$$\begin{aligned}\varphi &= -\Phi\Omega_{\mp}^{-1}[\Phi,\Psi,-C^{-1}],\\ \psi &= -\Phi\Omega_{\mp}^{-1}[\Psi,\Phi,-(C^{\top})^{-1}]\end{aligned} \tag{2}$$

для тих значень x, *при яких ці формули мають сенс.*

Доведення. Інтегруючи рівність

$$\Psi^\top\Phi = \Omega_\mp^{-1}[\varphi,\psi,C]\psi^\top\varphi\Omega_\mp^{-1}[\varphi,\psi,C] = -\frac{d}{dx}\Omega_\mp^{-1}[\varphi,\psi,C],$$

отримуємо

$$\int\limits_{\mp\infty}^{x}\Psi^\top\Phi ds = C^{-1}-\Omega_\mp^{-1}[\varphi,\psi,C] \Rightarrow \Omega_\mp[\varphi,\psi,C] = \left(C^{-1}\mp\int\limits_{\mp\infty}^{x}\Psi^\top\Phi ds\right)^{-1} =$$

$$= -\left(-C^{-1}\pm\int\limits_{\mp\infty}^{x}\Psi^\top\Phi ds\right)^{-1} = -\Omega_\mp^{-1}[\Phi,\Psi,-C^{-1}].$$

З (1) випливає

$$\varphi = \Phi\Omega_\mp[\varphi,\psi,C] = -\Phi\Omega_\mp^{-1}[\Phi,\Psi,-C^{-1}],$$

$$\psi = \Psi\Omega_\mp^\top[\varphi,\psi,C] = -\Psi\Omega_\mp^{-1}[\Psi,\Phi,-(C^\top)^{-1}].$$

Зауваження 1. Оскільки властивості перетворень (1) у просторах $\mathcal{H}_\mp$ ідентичні, далі, де не буде оговорено інше, ми обмежуємось випадком $\mathcal{H}_-$.

Наступні твердження містять важливі для подальших застосувань редукційні властивості відображень (1).

Теорема 2. 1. *Нехай сталі матриці* $\mathcal{T}\in\mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{C})$, C, $\mathcal{J}\in\mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbf{C})$ *задовольняють співвідношення*

$$\mathcal{T}=\mathcal{T}^\top,\qquad \mathcal{J}=\mathcal{J}^\top,\qquad C=\mathcal{J}C^\top\mathcal{J}^{-1}.$$

Тоді

$$\Psi[\varphi,\mathcal{T}\varphi\mathcal{J},C] = \mathcal{T}\Phi[\varphi,\mathcal{T}\varphi\mathcal{J},C]\mathcal{J}. \tag{3}$$

2. *Якщо* $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*:=\overline{\mathcal{T}}^\top$, $\mathcal{J}=\mathcal{J}^*$, $C=\overline{\mathcal{J}}C^*\overline{\mathcal{J}}^{-1}$, *то*

$$\Psi[\varphi,\mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J},C] = \mathcal{T}\overline{\Phi}[\varphi,\mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J},C]\mathcal{J}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Нехай сталі матриці* $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2\in\mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{C})$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2\in$ $\in\mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbf{C})$ *задовольняють співвідношення* $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2^\top=I$, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2^\top=I$. *Тоді справедливі такі імплікації*:

1) $C = \mathcal{J}_1C\mathcal{J}_1^{-1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Phi[\mathcal{T}_1\varphi\mathcal{J}_1,\mathcal{T}_2\psi\mathcal{J}_2,C] &= \mathcal{T}_1\Phi[\varphi,\psi,C]\mathcal{J}_1,\\ \Psi[\mathcal{T}_1\varphi\mathcal{J}_1,\mathcal{T}_2\psi\mathcal{J}_2,C] &= \mathcal{T}_2\Psi[\varphi,\psi,C]\mathcal{J}_2;\end{aligned} \tag{5}$$

2) $\overline{C} = \mathcal{J}_1C\mathcal{J}_1^{-1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Phi[\mathcal{T}_1\overline{\varphi}\mathcal{J}_1,\mathcal{T}_2\overline{\psi}\mathcal{J}_2,C] &= \mathcal{T}_1\overline{\Phi}[\varphi,\psi,C]\mathcal{J}_1,\\ \Psi[\mathcal{T}_1\overline{\varphi}\mathcal{J}_1,\mathcal{T}_2\overline{\psi}\mathcal{J}_2,C] &= \mathcal{T}_2\overline{\Psi}[\varphi,\psi,C]\mathcal{J}_2.\end{aligned} \tag{6}$$

Доведення. Оскільки доведення формул (3) – (6) проводиться аналогічно, обмежимось рівністю (4):

$$\mathcal{T}\overline{\Phi}[\varphi,\mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J},C]\mathcal{J} := \mathcal{T}\overline{\left\{\varphi\left(C+\int\limits_{-\infty}^{x}\mathcal{J}^\top\varphi^*\mathcal{T}^\top\varphi ds\right)^{-1}\right\}}\mathcal{J} =$$

$$= \mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J}\overline{\left(C\overline{\mathcal{J}} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{J}^{\top}\varphi^{*}\mathcal{T}^{\top}\varphi ds\,\overline{\mathcal{J}}\right)^{-1}}\mathcal{J} =$$

$$= \mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J}\overline{\left(\overline{\mathcal{J}}^{-1}C\overline{\mathcal{J}} + \int_{-\infty}^{x} \overline{\mathcal{J}}^{-1}\mathcal{J}^{\top}\varphi^{*}\mathcal{T}^{\top}\varphi\overline{\mathcal{J}} ds\right)^{-1}} =$$

$$= \mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J}\left(\mathcal{J}^{-1}\overline{C}\mathcal{J} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{J}^{-1}\mathcal{J}^{*}\varphi^{\top}\mathcal{T}^{*}\overline{\varphi}\mathcal{J} ds\right)^{-1} =$$

$$= \mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J}\left(C^{\top} + \int_{-\infty}^{x} \varphi^{\top}\mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J} ds\right)^{-1} := \Psi[\varphi, \mathcal{T}\overline{\varphi}\mathcal{J}, C].$$

Нехай L — формальний диференціальний оператор вигляду

$$L = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i, \quad \partial_\tau := \frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \mathcal{D}^i := \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad \alpha \in \mathbf{C},$$

з $(N\times N)$-матричними гладкими коефіцієнтами $u_i = u_i(x,\tau) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C})$, L^τ, L^* — транспонований і формально спряжений оператори:

$$L^\tau := -\alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathcal{D}^i u_i^{\top}, \quad L^* := \overline{L^\tau}.$$

Теорема 4. *Нехай* $\varphi(x,\tau)$, $\psi(x,\tau)$ *залежать від змінної* $\tau \in \mathbf{R}$ *як від параметра в силу системи*

$$\alpha\varphi_\tau(x,\tau) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x,\tau)\frac{\partial^i \varphi(x,\tau)}{\partial x^i}, \quad \varphi(x,0) = \varphi(x),$$

$$\alpha\psi_\tau(x,\tau) = -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\partial^i\left(u_i^{\top}\psi(x,\tau)\right)}{\partial x^i}, \quad \psi(x,0) = \psi(x)$$

(яку скорочено позначатимемо $L(\varphi) = 0$, $L^\tau(\psi) = 0$*).*

Тоді функції $F = \Phi C$, $G = \Psi C^{\top}$ *задовольняють систему* $\hat{L}(F) = 0$, $\hat{L}^\tau(G) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha F_\tau &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{u}_i(x,\tau)\frac{\partial^i F(x,\tau)}{\partial x^i}, \\ \alpha G_\tau &= -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\partial^i\left(\tilde{u}_i^{\top} G(x,\tau)\right)}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{7}$$

де коефіцієнти $\tilde{u}_i$ *диференціального оператора* $\hat{L} = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n}\tilde{u}_i\mathcal{D}^i$ *є диференціальними поліномами від* u_j, φ, ψ, Φ, Ψ, $j = \overline{0,n}$:

$$\tilde{u}_i(x,\tau) = \tilde{u}_i[u_j, \varphi, \psi, \Phi, \Psi], \quad i = \overline{0,n}.$$

Доведення теореми можна провести безпосередньо, виходячи з означення бінарних перетворень (1). У деяких конкретних випадках це зроблено в роботах [25, 26]. Загальний випадок довільних N, $n \in \mathbf{N}$ буде розглянуто в наступних пунктах.

Зауваження 2. Враховуючи, що при $|C| \neq 0$ існують явні формули (2) для оберненого бінарного відображення (1), а функції $\Phi(x,\tau)$, $\Psi(x,\tau)$ є розв'язками системи (7) ($\Phi(x,0)=\Phi(x)$, $\Psi(x,0)=\Psi(x)$ — початкові умови) згідно з теоремою 4, і підставляючи (2) в (7), отримуємо для функцій Φ, Ψ нелінійну еволюційну систему

$$\alpha\Phi_\tau = \sum_{i=0}^{n} \tilde{u}_i [u_j, \Phi, \Psi] \Phi^{(i)},$$
$$\alpha\Psi_\tau = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\tilde{u}_i^\top [u_j, \Phi, \Psi]\Psi\right)^{(i)}, \quad j = \overline{0,n}. \tag{8}$$

При цьому відображення $\mathcal{BD}_C^{-1}$ (2) відіграє роль лінеаризуючого перетворення Беклунда [1].

2. Матрична алгебра Лі – Вольтерри. Будемо розглядати природне узагальнення відомої скалярної (див. [2]) алгебри формальних символів (яку також часто називають алгеброю МДО — мікродиференціальних операторів). Нехай

$$\zeta = \left\{ A = \sum_{i=-\infty}^{N(A)} a_i \mathcal{D}^i : a_i = a_i(x) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{R} \to \mathbf{C});\ i, N(A) \in \mathbf{Z} \right\}$$

—лінійний простір над $\mathbf{C}$ формальних рядів Лорана за степенями символа $\mathcal{D} := \dfrac{\partial}{\partial x}$. Коефіцієнти a_i — гладкі $(N \times N)$-матричнозначні функції змінної x і, можливо, додаткових параметрів $(y, t, \ldots \in \mathbf{R})$. Асоціативне множення в ζ (композиція) індукується узагальненим правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} \mathcal{D}^j(f)\mathcal{D}^{n-j}, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \mathcal{D}^j(f) := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} = f^{(j)}, \quad j \in \mathbf{Z}_+,$$
$$\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j\,!}, \quad 0! := 1, \tag{9}$$

де $\mathcal{D}^n\mathcal{D}^m = \mathcal{D}^{n+m}$; $n, m \in \mathbf{Z}$; $f := f\mathcal{D}^0$ — оператор множення на функцію $f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \to \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{C}))$. Білінійна операція (комутатор) $[\cdot,\cdot] : \zeta^2 \to \zeta$: $[A, B] := AB - BA$ задає на ζ структуру алгебри Лі. Пару $(\zeta, [\ ])$ називатимемо алгеброю Лі – Вольтерри і позначатимемо надалі через ζ. Довільний елемент $a \in \zeta$ можна зобразити у вигляді

$$A := \sum_{i=-\infty}^{N(A)} a_i\mathcal{D}^i = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i\mathcal{D}^i + \sum_{i=0}^{N(A)} a_i\mathcal{D}^i := A_- + A_+ := A_{<0} + A_{\geq 0}, \tag{10}$$

$$A := \sum_{i=-\infty}^{0} a_i\mathcal{D}^i + \sum_{i=1}^{N(A)} a_i\mathcal{D}^i := A_{\leq 0} + A_{\geq 1}. \tag{11}$$

Рівності (10), (11) індукують розбиття алгебри ζ в лінійну суму підалгебр диференціальних і інтегральних (формальних) операторів $\zeta = \zeta_+ \dotplus \zeta_-$, а також підалгебр Лі строго диференціальних (без вільного члена) і інтегральних операторів $\zeta = \zeta_{>0} \dotplus \zeta_{<1}$. Порядком оператора $\mathrm{Ord}\,A$ називатимемо $N(A) \in \mathbf{Z}$.

Нехай φ, $\psi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \to \mathrm{Mat}_{N\times K}(\mathbf{C}))$, $K \in \mathbf{N}$. Під символом $\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top \in \zeta$ згідно з (9) при $n = -1$ розуміється формальний ряд

$$\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top} := \varphi\psi^{\top}\mathcal{D}^{-1} - \varphi\psi_x^{\top}\mathcal{D}^{-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\varphi\left(\psi^{(i)}\right)^{\top}\mathcal{D}^{-i-1}.$$

З означення транспонованого і спряженого символів

$$A^{\tau} := \sum_{i=-\infty}^{N(A)}(-1)^i\mathcal{D}^i a_i^{\top}, \quad A^{*} := \bar{A}^{\tau}$$

випливає

$$(\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top})^{\tau} = -\psi\mathcal{D}^{-1}\varphi^{\top}, \quad (\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top})^{*} = -\bar{\psi}\mathcal{D}^{-1}\varphi^{*}.$$

Теорема 5. *Підпростір* $\zeta_{<0}^{\upsilon} \subset \zeta$:

$$\zeta_{<0}^{\upsilon} = \left\{A^{\upsilon} = \sum_{i=1}^{N(A)} a_i\mathcal{D}^{-1}b_i\right\}, \quad N(A) \in \mathbf{N},$$

є алгеброю Лі.

Доведення. Для доведення досить показати, що

$$\left[\varphi_1\mathcal{D}^{-1}\psi_1^{\top}, \varphi_2\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top}\right] \in \zeta_{<0}^{\upsilon}, \text{ де } \varphi_i,\ \psi_i \in C^{(\infty)}\left(\mathbf{R} \to \mathrm{Mat}_{N\times K_i}(\mathbf{C})\right),\ i = \overline{1, 2},$$

що в свою чергу є наслідком рівності

$$\varphi_1\mathcal{D}^{-1}\psi_1^{\top}\varphi_2\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} \in \zeta_{<0}^{\upsilon}, \tag{12}$$

яку ми і доводимо далі.

Покажемо, що

$$\varphi_1\mathcal{D}^{-1}\psi_1^{\top}\varphi_2\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} = \varphi_1\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} - \varphi_1\mathcal{D}^{-1}\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)\psi_2^{\top}, \tag{13}$$

де $c \in \mathbf{R}$ — довільна точка. Використовуючи (9) при $n = -1$, отримуємо

$$\varphi_1\mathcal{D}^{-1}\psi_1^{\top}\varphi_2\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} = \varphi_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\psi_1^{\top}\varphi_2)^{(k)}\mathcal{D}^{-k-1}\right)\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top}, \tag{14}$$

з іншого боку,

$$\varphi_1\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} - \varphi_1\mathcal{D}^{-1}\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)\psi_2^{\top} =$$

$$= \varphi_1\left\{\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)^{(k)}\mathcal{D}^{-k-1}\psi_2^{\top}\right\} =$$

$$= -\varphi_1\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\int_c^x\psi_1^{\top}\varphi_2 ds\right)^{(k)}\mathcal{D}^{-k-1}\psi_2^{\top} =$$

$$= \varphi_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\psi_1^{\top}\varphi_2)^{(k)}\mathcal{D}^{-k-1}\right)\mathcal{D}^{-1}\psi_2^{\top}. \tag{15}$$

Порівнюючи праві частини рівностей (14), (15), отримуємо (13), звідки випливає (12).

Алгебра $\zeta_{<0}^{\upsilon}$ є формальним зображенням алгебри Лі операторів Вольтерри з виродженими ядрами.

Теорема 6. $(\forall A_- \in \zeta_-)(\forall N \in \mathbf{Z}_-)(\exists A^v \in \zeta_-^v):\ \mathrm{Ord}(A_- - A^v) < N.$

Ця теорема є безпосереднім узагальненням на матричний випадок відповідної теореми з роботи [27], і її доведення суттєво не відрізняється від наведеного там.

Зауваження 3. Очевидно, що лінійна сума ζ_-^v і підалгебри операторів нульового порядку ζ_0 (операторів множення на функцію) $\zeta_0 + \zeta_-^v := \zeta_{\le 0}^v$ є алгеброю Лі.

Повертаючись до бінарних перетворень (1):

$$\Phi = \varphi\Omega^{-1}[\varphi,\psi,C], \qquad \Psi = \psi\Omega^{-1}[\psi,\varphi,C^\top],$$

де $\Omega[\varphi,\psi,C]$ — будь-який із двох виразів $\Omega_\mp[\varphi,\psi,C]$, розглянемо такі оператори:

$$\zeta_-^v \ni \mathbf{K}_1 := \varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top, \qquad \mathbf{K}_2 := \Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top \in \zeta_-^v.$$

Теорема 7. $(I-\mathbf{K}_2)(I+\mathbf{K}_1) = (I+\mathbf{K}_1)(I-\mathbf{K}_2) = I,$

тобто

$$I+\mathbf{K}_1 = (I-\mathbf{K}_2)^{-1}. \tag{16}$$

Доведення. Маємо

$$(I-\mathbf{K}_2)(I+\mathbf{K}_1) = I-\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 =$$

$$= I-\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1-\Phi\left(\int_c^x \psi^\top\varphi ds\right)\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top + \Phi\mathcal{D}^{-1}\left(\int_c^x \psi^\top\varphi ds\right)\Psi^\top =$$

$$= I-\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1-\Phi\left(C \pm \int_{\mp\infty}^x \psi^\top\varphi ds\right)\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top + \Phi\mathcal{D}^{-1}\left(C \pm \int_{\mp\infty}^x \psi^\top\varphi ds\right)\Psi^\top =$$

$$= I-\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2 = I.$$

Теорема 8. *При одягаючому перетворенні (перетворенні подібності)*

$$L \to (I-\mathbf{K}_2)L(I-\mathbf{K}_2)^{-1} := \hat{L},$$

де $L = \alpha\partial_\tau - U_+ = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^n u_i\mathcal{D}^i$, *одягнений оператор* $\hat{L}_n$ *має вигляд*

$$\hat{L} = \alpha\partial_\tau - \hat{U}_+ + \hat{U}_- := \hat{L}_+ + \hat{U}_- := \hat{L}_+ + \hat{L}_-, \qquad \hat{U}_\pm \in \zeta_\pm,$$

а

$$\hat{U}_- = \left\{(\alpha\varphi_\tau - U_+(\varphi)) - \Phi\int_{-\infty}^x \psi^\top(\alpha\varphi_\tau - U_+(\varphi))ds\right\}\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top +$$

$$+ \Phi\mathcal{D}^{-1}\left\{(\alpha\psi_\tau + U_+^\tau(\psi))^\top - \int_{-\infty}^x (\alpha\psi_\tau + U_+^\tau(\psi))^\top\varphi ds\,\Psi^\top\right\}.$$

Доведення. З (16) випливає

$$\mathbf{W} = I - \Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top, \quad \mathbf{W}^{-1} = I + \varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top,$$

$$\mathbf{W}\partial_\tau\mathbf{W}^{-1} = \partial_\tau - \mathbf{W}_\tau\mathbf{W}^{-1} = \partial_\tau + (\Phi_\tau\mathcal{D}^{-1}\psi^\top + \varphi\mathcal{D}^{-1}\psi_\tau^\top)(I+\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi) =$$

$$= \partial_\tau + \varphi_\tau\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top + \Phi\mathcal{D}^{-1}\psi_\tau^\top - \Phi\int_{-\infty}^x \psi^\top\varphi_\tau ds\,\mathcal{D}^{-1}\Psi^\top - \Phi\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^x \psi_\tau^\top\varphi ds\,\Psi^\top. \tag{17}$$

В ланцюжку перетворень (17) використано також очевидні співвідношення

$$\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\psi^{\tau}\varphi ds = I - \Omega^{-1}C, \qquad \int_{-\infty}^{x}\psi^{\tau}\varphi ds\Psi^{\top} = \psi^{\top} - C^{\top}\Psi^{\top},$$

оскільки

$$\Omega^{-1} = \left(C + \int_{-\infty}^{x}\psi^{\tau}\varphi ds\right)^{-1}. \tag{18}$$

Далі одержуємо

$$\begin{aligned}(I-\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top})U_{+}(I+\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top}) &= U_{+} + (U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{+} + (U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-} - \\ &- (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+} - (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{-} - (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{+} - \\ &- (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-} := U_{+} + U_{+1} + (U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-} - \\ &- U_{+2} - (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{-} - U_{+3} - (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-},\end{aligned} \tag{19}$$

де через U_{+1}, U_{+2}, U_{+3} для зручності позначено диференціальні частини відповідних символів. Обчислимо послідовно, згідно з (9), всі доданки в (19). Маємо

$$\begin{aligned}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top} &:= U_{+1} + (U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j-1}C_i^j C_{i-j-1}^k u_i\varphi^{(j)}\Psi^{\top(i-j-k-1)}\mathcal{D}^k + U_{+}(\varphi)\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top},\end{aligned} \tag{20}$$

де $C_i^j := \binom{i}{j}$, $i, j \geq 0$.

Далі,

$$\begin{aligned}\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+} &:= U_{+2} + (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{-} = \\ &= \Phi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(\psi^{\top}u_i)^{(j)}\mathcal{D}^{i-j-1} + \Phi\mathcal{D}^{-1}(U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}.\end{aligned} \tag{21}$$

З формули (21) випливають важливі наслідки:

$$\psi^{\top}U_{+} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+} + (U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}. \tag{22}$$

Подіявши диференціальною рівністю (22) на функцію φ, отримаємо формулу Лагранжа для матричного диференціального виразу $U_{+} = \sum_{i=0}^{n}u_i\mathcal{D}^i$:

$$\begin{aligned}\psi^{\top}U_{+}(\varphi) - (U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}\varphi &= \frac{d}{dx}\left\{(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}(\varphi)\right\} = \\ &= \frac{d}{dx}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(\psi^{\top}u_i)^{(i)}\varphi^{(i-j-1)}\right\}.\end{aligned} \tag{23}$$

З (22), (23) випливає також потрібна для подальших обчислень формула

$$(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}(\varphi) + \int_{-\infty}^{x}(U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}\varphi ds = \int_{-\infty}^{x}\psi^{\top}U_{+}(\varphi)ds. \tag{24}$$

Продовжуємо процес:

$$\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top} := U_{+3} + (\Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{-} =$$
$$= \Phi\Big((\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top}\Big)_{+} + \Phi(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}(\varphi)\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top} +$$
$$+ \Phi(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{-}(\varphi)\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top} = U_{+3} + \Phi\Bigg[(\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}(\varphi) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{x}(U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}\varphi\, ds\Bigg]\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top} - \Phi\mathcal{D}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}(U_{+}^{\tau}(\psi))^{\top}\varphi\, ds\,\Psi^{\top}. \tag{25}$$

З урахуванням формули (24) другий доданок в (25) дорівнює

$$\Phi\int\limits_{-\infty}^{x}\psi^{\top}U_{+}(\varphi)ds\,\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top}, \tag{26}$$

а

$$U_{+3} := \Phi\Big((\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}U_{+})_{+}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top}\Big)_{+} = (U_{+2}\varphi\mathcal{D}^{-1}\Psi^{\top})_{+} =$$
$$= \Phi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j-2}\sum_{l=0}^{i-j-k-2}(-1)^{j}C_{i-j-1}^{k}C_{i-j-k-2}^{l}(\psi^{\top}u_{i})^{(j)}\varphi^{(k)}\Psi^{\top(l)}\mathcal{D}^{i-j-k-l-2}. \tag{27}$$

Таким чином, $\hat{U}_{+} = U_{+} + U_{+1} - U_{+2} - U_{+3}$ (див. (20), (21), (27)), де

$$\operatorname{Ord} U_{+1} = n-1 = \operatorname{Ord} U_{+2}, \qquad \operatorname{Ord} U_{+3} = n-2.$$

І нарешті, з (17), (19), враховуючи формули (20), (21), (25), (26), отримуємо твердження теореми 8.

Теорема 9. *Нехай* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\mp}$ *— розв'язки еволюційної системи* $L(\varphi) = L^{\tau}(\psi) = 0$. *Тоді оператор* $\mathbf{W} := I - \Phi\mathcal{D}^{-1}\psi^{\top}$ *при перетворенні подібності переводить диференціальний оператор* $L = \alpha\partial_{\tau} - U_{+}$ *в чисто диференціальний (без інтегральних доданків) оператор* $\hat{L} := \mathbf{W}L\mathbf{W}^{-1} = \alpha\partial_{\tau} - \hat{U}_{+}$ *того ж порядку.*

Доведення очевидно випливає з явного вигляду інтегральної складової $\hat{L}_{-}$.

3. Оператори перетворень. На відміну від загальних „інтегральних" символів з ζ_{-} дію елементів ζ_{-}^{υ} на функції легко визначити.

Нехай $\hat{\mathbf{K}}_1^{\mp}$, $\hat{\mathbf{K}}_2^{\pm}$ — інтегральні оператори Вольтерри з виродженими ядрами $K_1(x,s)$, $K_2(x,s)$ відповідно:

$$\Big(\hat{\mathbf{K}}_1^{\mp}f\Big)(x) := \pm\int\limits_{\mp\infty}^{x}K_1(x,s)f(s)ds, \qquad K_1(x,s) := \varphi(x)\Psi^{\top}(s),$$
$$\Big(\hat{\mathbf{K}}_2^{\mp}f\Big)(x) := \pm\int\limits_{\mp\infty}^{x}K_2(x,s)f(s)ds, \qquad K_2(x,s) := \Phi(x)\psi^{\top}(s). \tag{28}$$

У формулах (28) $\Phi := \varphi\Omega^{-1}$, $\Psi := \psi(\Omega^{\top})^{-1}$, $\Omega := \Omega_{-}[\varphi,\psi,C]$. (Випадок $\Omega = \Omega_{+}[\varphi,\psi,C]$ повністю аналогічний.)

Теорема 10. *Справедливі рівності*

$$\Big(I - \hat{\mathbf{K}}_2^{-}\Big)\Big(I + \hat{\mathbf{K}}_1^{-}\Big) = I, \tag{29}$$

$$\Big(I + \hat{\mathbf{K}}_2^{+}\Big)\Big(I - \hat{\mathbf{K}}_1^{+}\Big) = I. \tag{30}$$

Для композиції операторів Вольтерри має місце таке твердження.

Теорема 11. *Справедливі рівності*

$$\left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right)\left(I - \hat{\mathbf{K}}_1^+\right) = I - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) C \Psi^\top(s) \bullet ds, \tag{31}$$

$$\left(I - \hat{\mathbf{K}}_1^+\right)\left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right) = I - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \tilde{C}^{-1} \psi^\top(s) \bullet ds, \tag{32}$$

$$\left(I + \hat{\mathbf{K}}_2^+\right)\left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right) = I + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \tilde{C} \Psi^\top(s) \bullet ds, \tag{33}$$

$$\left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right)\left(I + \hat{\mathbf{K}}_2^+\right) = I + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) C^{-1} \psi^\top(s) \bullet ds, \tag{34}$$

тобто оператори Вольтерри $\hat{\mathbf{K}}_1^+$, $\hat{\mathbf{K}}_1^-$, $\hat{\mathbf{K}}_2^+$, $\hat{\mathbf{K}}_2^-$ *факторизують відповідні оператори Фредгольма з виродженими ядрами. В* (32), (33) $\tilde{C} := C + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top \varphi ds$.

Теорема 10 є аналогом теореми 7 для формальних символів. Доведення формул (29) – (34) проводиться безпосередньою перевіркою з використанням теореми Фубіні для зміни порядку в повторних інтегралах, означення функцій Φ, Ψ (1) і формул (18).

Зауваження 4. При доведенні теорем 7, 8, 10, а також формули (31) не вимагається ні невиродженості матриці C (як в (34)), ні існування інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top \varphi ds$ (як в (32), (33)).

Лема. *Нехай* $L = \alpha\partial_\tau - U_+ = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^n u_i \mathcal{D}^i$ *— еволюційний диференціальний оператор, функції* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_-$ *— достатньо гладкі розв'язки системи*

$$\alpha\varphi_\tau = U_+(\varphi),$$

$$\alpha\psi_\tau = -U_+^\tau(\psi).$$

Тоді функції $F = \Phi C$, $G = \Psi C^\top$ *задовольняють систему*

$$\hat{L}(F) = 0,$$

$$\hat{L}^\tau(G) = 0,$$

де

$$\hat{L} := \left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right) L \left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right) = \left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right) L \left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right)^{-1}, \tag{35}$$

$$\hat{L}^\tau := \left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right)^\tau L^\tau \left(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-\right)^\tau = \left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right)^\tau L^\tau \left(\left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^-\right)^{-1}\right)^\tau =$$

$$= \left(I + \mathbf{K}_1^-\right)^\tau L^\tau \left(\left(I + \mathbf{K}_1^-\right)^\tau\right)^{-1}. \tag{36}$$

Доведення. Очевидно, якщо $L(f) = 0$, то

$$\hat{L}(I - \hat{\mathbf{K}}_2^-)(f) = (I - \hat{\mathbf{K}}_2^-) L (I - \hat{\mathbf{K}}_2^-)^{-1} (I - \hat{\mathbf{K}}_2^-)(f) = 0,$$

тобто $F := (I - \hat{\mathbf{K}}_2^-)(f)$ — розв'язок рівняння $\hat{L}(F) = 0$.

При $f = \varphi$ отримуємо

$$F = \varphi - \varphi\left(C + \int_{-\infty}^{x} \psi^{\top}\varphi\, ds\right)^{-1} \int_{-\infty}^{x} \psi^{\top}\varphi\, ds = \Phi C.$$

Аналогічно

$$G = \left(I + \hat{\mathbf{K}}_1^{-}\right)^{\tau}(\psi) = \psi - \psi\left(C^{\top} + \int_{-\infty}^{x} \varphi^{\top}\psi\, ds\right)^{-1} \int_{-\infty}^{x} \varphi^{\top}\psi\, ds = \Psi C^{\top}$$

— розв'язок рівняння $\hat{L}^{\tau}(G) = 0$.

Зауваження 5. Щоб уникнути можливих неузгоджень в термінології, операцію формального транспонування операторів Вольтерри (28) визначаємо так:

$$\left[\hat{\mathbf{K}}^{\mp} f\right]^{\tau} \equiv \left[\int_{\mp\infty}^{x} K(x,s)\bullet ds\right]^{\tau} := -\int_{\mp\infty}^{x} K^{\top}(s,x)\bullet ds,$$

тобто

$$\left(\left[\hat{\mathbf{K}}_1^{\mp} f\right]^{\tau} f\right)(x) := \mp\int_{\mp\infty}^{x} \Psi(x)\varphi^{\top}(s) f(s)\, ds,$$

$$\left(\left[\hat{\mathbf{K}}_2^{\mp} f\right]^{\tau} f\right)(x) := \mp\int_{\mp\infty}^{x} \psi(x)\Phi^{\top}(s) f(s)\, ds.$$

Теорема 12. *В умовах попередньої леми перетворення подібності* (35) *переводить диференціальний оператор* L *у диференціальний оператор* $\hat{L} = \alpha\partial_y - \hat{U}_+,\ \hat{U}_+ = \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i \mathcal{D}^i,\ \hat{u}_n = u_n$.

Теорема 12 є аналогом теореми 9 для формальних символів. Таким чином, теореми 8, 9 і попередня лема не тільки доводять теорему 4 в загальному випадку, але і дозволяють знайти оператор $\hat{L}$ (а отже, і систему (8)) в явному вигляді.

Зауваження 6. Рівності (31) – (34) показують, що оператори Вольтерри (28) є розв'язками задачі факторизації відповідного оператора Фредгольма. Наприклад, позначивши через $B(x,s)$ ядро інтегрального оператора $\hat{\mathbf{B}}$, де $(\hat{\mathbf{B}} f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\bar{C}^{-1}\psi^{\top}(s) f(s)\, ds$, з рівності (32) для ядер отримуємо

$$K_1(x,s) - B(x,s) - \int_{-\infty}^{s} B(x,z) K_1(z,s)\, dz = 0,$$

тобто основне інтегральне рівняння задачі факторизації [4 – 7] (рівняння типу Гельфанда – Левітана – Марченка).

Згідно з лемою, якщо функції $f,\ g$ є розв'язками системи $L(f) = L^{\tau}(g) = 0$, то функції

$$F := f - \Phi\int_{-\infty}^{x} \psi^{\top} f\, ds, \quad G := g - \Psi\int_{-\infty}^{x} \varphi^{\top} g\, ds$$

є розв'язками системи $\hat{L}(F) = \hat{L}^{\tau}(G) = 0$.

Означення 2. *Відображення*

$$f \to F, \quad g \to G, \quad L \to \hat{L} = \mathbf{W} L \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{W} = I - \hat{\mathbf{K}}_2^{-} \tag{37}$$

називається бінарним перетворенням типу Беклунда – Дарбу (*БД*) (*згідно з термінологією, прийнятою в* [3]), *або одягаючим перетворенням Захарова – Шабата* [2, 4, 5, 7].

Наступні твердження демонструють редукційні властивості перетворень (37), які є безпосередніми наслідками теорем 2, 3 і доводяться аналогічно.

Теорема 13. *Нехай* φ, ψ — *фіксовані розв'язки, а* f, g — *довільні розв'язки системи*

$$L(f) = L^{\tau}(g) = 0,$$

які задовольняють редукції:

1) $g = \mathcal{T} f \mathcal{J}$, *а матриці* C, $\mathcal{T}$, $\mathcal{J}$ *задовольняють умови твердження* 1 *теореми* 2; *тоді функції* F, G *пов'язані аналогічними співвідношеннями*

$$G = \mathcal{T} F \mathcal{J};$$

2) *якщо* $g = \mathcal{T} \bar{f} \mathcal{J}$, а C, $\mathcal{T}$, $\mathcal{J}$ *задовольняють умови твердження* 2 *теореми* 2, *то*

$$G = \mathcal{T} \overline{F} \mathcal{J}.$$

Теорема 14. *Нехай*:

1) $f = \mathcal{T}_1 f \mathcal{J}_1$, $g = \mathcal{T}_2 g \mathcal{J}_2$, *де матриці* C, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ *задовольняють умови твердження* 1 *теореми* 3; *тоді функції* F, G *задовольняють редукції*

$$F = \mathcal{T}_1 F \mathcal{J}_1, \quad G = \mathcal{T}_2 G \mathcal{J}_2;$$

2) *якщо* $f = \mathcal{T}_1 \bar{f} \mathcal{J}_1$, $g = \mathcal{T}_2 \bar{g} \mathcal{J}_2$, *де матриці* C, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ *задовольняють умови твердження* 2 *теореми* 3, *то функції* F, G *задовольняють редукції*

$$F = \mathcal{T}_1 \overline{F} \mathcal{J}_1, \quad G = \mathcal{T}_2 \overline{G} \mathcal{J}_2.$$

4. Нелінійні моделі, інтегровні методом оберненої задачі розсіяння (МОЗР). ***4.1. Метод побудови точних розв'язків.*** Абсолютна більшість відомих на цей час нелінійних динамічних систем (за незначними винятками), для дослідження яких, хоча б у принципі, можна застосувати апарат інтегральних рівнянь Гельфанда – Левітана – Марченка [4 – 6] або його модифікації (локальна і нелокальна задача Рімана і $\bar{\partial}$-проблема [28]), допускають так зване зображення Лакса – Захарова – Шабата [4, 5, 7]

$$[L, M] := LM - ML = 0, \tag{38}$$

де L, M — диференціальні оператори вигляду

$$\alpha\partial_y - U := \alpha\frac{\partial}{\partial_y} - \sum_{i=0}^{n} u_i(x, y, t)\mathcal{D}^i,$$

$$\beta\partial_t - V := \beta\frac{\partial}{\partial_t} - \sum_{i=0}^{m} v_i(x, y, t)\mathcal{D}^i.$$

Операторне рівняння (38) є умовою сумісності лінійної (переозначеної) системи рівнянь

$$\begin{matrix} \alpha f_y = U(f) \\ \beta f_t = V(f) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha g_y = -U^{\tau}(g), \\ \beta g_t = -V^{\tau}(g), \end{matrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \tag{39}$$

і рівносильне деякій замкненій нелінійній (у загальному випадку) системі диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\mathcal{F}\left[u_i^{(k)}, v_j^{(l)}, u_{it}, v_{jy}\right] = 0, \quad i, l = \overline{0, n}, \quad j, k = \overline{0, m}, \tag{40}$$

яку і прийнято називати інтегровною МОЗР. У випадку α, $\beta \neq 0$ система називається (2+1)-вимірною, при $\alpha \vee \beta = 0$ — (1+1)-вимірною, при $\alpha = \beta = 0$ — скінченновимірною. При наявності вичерпних результатів стосовно прямої і оберненої задач теорії розсіяння для одного з операторів комутуючої пари L, M [4, 6] (що далеко не так на сьогоднішній час в загальному випадку, особливо при наявності у операторів L, M складних редукцій) рівняння (40) можна дослідити майже з тією повнотою, що і методом Фур'є в лінійному випадку. Ми пропонуємо метод побудови широких класів точних розв'язків загальної системи (40), що залежать від довільної кількості функціональних параметрів, явно не використовуючи тонких моментів постановки і дослідження відповідної оберненої задачі.

Нехай $\varphi(x; y, t) := \varphi \in \mathcal{H}_-$, $\psi(x; y, t) := \psi \in \mathcal{H}_-$ залежать від параметрів y, t в силу системи (39), тобто є розв'язками рівнянь

$$\alpha\varphi_y = U(\varphi), \qquad \alpha\psi_y = -U^{\tau}(\psi), \qquad \beta\varphi_t = V(\varphi), \qquad \beta\psi_t = -V^{\tau}(\psi).$$

Тоді згідно з теоремою 12 функції F, G, отримані при бінарному перетворенні типу Беклунда – Дарбу (37), є розв'язками лінійної системи рівнянь

$$\hat{L}(F) = \hat{L}^{\tau}(G) = \hat{M}(F) = \hat{M}^{\tau}(G) = 0,$$

де одягнені оператори $\hat{L}$, $\hat{M}$ мають вигляд

$$\hat{L} = \mathbf{W} L \mathbf{W}^{-1} = \alpha\partial_y - \sum_{i=0}^{n} \tilde{u}_i(x, y, t)\mathcal{D}^i,$$

$$\hat{M} = \mathbf{W} M \mathbf{W}^{-1} = \beta\partial_t - \sum_{i=0}^{m} \tilde{v}_i(x, y, t)\mathcal{D}^i,$$

$\mathbf{W} = I - \int_{-\infty}^{x} \Phi(x; y, t)\psi(s, y, t) \bullet ds$ — одягаючий оператор Захарова – Шабата [6, 8] (оператор перетворення Беклунда – Дарбу ($\mathcal{BD}$)). Коефіцієнти

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i[u_k, \varphi, \psi, \Phi, \Psi], \qquad \tilde{v}_j = \tilde{v}_j[v_l, \varphi, \psi, \Phi, \Psi], \quad i, k = \overline{0, n}, \quad j, l = \overline{0, m},$$

є диференціальними поліномами відносно аргументів, що стоять у дужках, і обчислюються явно за формулами теореми 8.

Основне твердження. *Нехай* $[L, M] = 0$, *тобто функції* u_i, v_j *задовольняють досліджувану систему нелінійних рівнянь* (40). *Тоді функції* $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_j$ *є розв'язками тієї ж системи*:

$$\mathcal{F}\left[\tilde{u}_i^{(k)}, \tilde{v}_j^{(l)}, \tilde{u}_{it}, \tilde{v}_{jy}\right] = 0, \quad i, l = \overline{0, n}, \quad j, k = \overline{0, m}.$$

Доведення очевидне:

$$\mathcal{F}\left[u_i^{(k)}, v_j^{(l)}, u_{it}, v_{jy}\right] = 0 \iff [L, M] = 0 \iff$$

$$\iff [\hat{L}, \hat{M}] := \mathbf{W}[L, M]\mathbf{W}^{-1} = 0 \iff \mathcal{F}\left[\tilde{u}_i^{(k)}, \tilde{v}_j^{(l)}, \tilde{u}_{it}, \tilde{v}_{jy}\right] = 0.$$

***4.2. Основні приклади**. 4.2.1. Матричне рівняння Кадомцева – Петвіашвілі (КР).* Розглянемо оператори

$$L = \alpha\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2u, \qquad M = \beta\partial_t - \mathcal{D}^3 - 3u\mathcal{D} - \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}\alpha\int_{-\infty}^{x} u_y\, dx, \tag{41}$$

де $u = u(x, y, t)$ — $(N\times N)$-матрична, гладка, швидко спадна при $x \to -\infty$ комплекснозначна функція. Умова комутативності операторів (41) рівносильна матричному узагальненню рівняння КР (МКР) [29]:

$$\beta u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + \frac{3}{2}u_x u + \frac{3}{4}\alpha^2 \int_{-\infty}^{x} u_{yy}dx - \frac{3}{2}\alpha\left[u, \int_{-\infty}^{x} u_y dx\right], \qquad (42)$$

яке при $N = 1$ збігається з класичним рівнянням КР [30]

$$\left(\beta u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} - 3uu_x\right)_x = \frac{3}{4}\alpha^2 u_{yy}.$$

При бінарному відображенні (37) згідно з формулами теореми 8

$$u \to \tilde{u} = u + (\Phi\psi^\top)_x = u + (\varphi\Psi^\top)_x = u + \varphi\Omega^{-1}\psi^\top =$$
$$= u + \left(\varphi\left(C + \int_{-\infty}^{x}\psi^\top\varphi\, d\tau\right)^{-1}\psi^\top\right)_x. \qquad (43)$$

Вводячи позначення $\varphi_{i\cdot}$, $\psi_{j\cdot}$ для i- та j-го рядків $(N\times K)$-матричних функцій φ, ψ, маємо

$$\tilde{u}_{ij} = u_{ij} + (\varphi_{i\cdot}\Omega^{-1}\psi_{j\cdot}^\top)_x = u_{ij} - \left(\frac{\begin{vmatrix}\Omega & \psi_{j\cdot}^\top\\ \varphi_{i\cdot} & 0\end{vmatrix}}{|\Omega|}\right)_x, \quad i, j = \overline{1, N}, \qquad (44)$$

$$\Phi_{ij} = \left(\varphi\Omega^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{K+j}\frac{\begin{vmatrix}\Omega_{(j)}\\ \varphi_{i\cdot}\end{vmatrix}}{|\Omega|},$$
$$\Psi_{ij} = \left(\psi\Omega^{\top^{-1}}\right)_{ij} = (-1)^{K+j}\frac{\begin{vmatrix}\Omega^\top_{(j)}\\ \psi_{i\cdot}\end{vmatrix}}{|\Omega|}, \qquad (45)$$
$$i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, K},$$

де $\Omega_{(j)}$ отримується з Ω викресленням j-го рядка. При виведенні формул у правих частинах рівностей (44), (45) ми скористались відомою алгебраїчною рівністю для обрамленого визначника

$$\det\begin{pmatrix}\Omega & \psi_{j\cdot}^\top\\ \varphi_{i\cdot} & \alpha\end{pmatrix} := \begin{vmatrix}\Omega & \psi_{j\cdot}^\top\\ \varphi_{i\cdot} & \alpha\end{vmatrix} = \alpha\det\Omega - \varphi_{i\cdot}\Omega^C\psi_{j\cdot}^\top,$$

де Ω^C — матриця кофакторів (алгебраїчних доповнень).

При редукції $\psi = \overline{\varphi}$ отримуємо

$$\psi = \overline{\varphi} \Rightarrow \alpha \in i\mathbf{R}, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad L^* = L(u^* = u), \quad M^* = -M$$

і згідно з твердженням 2 теореми 13 $\hat{L}^* = \hat{L}$, $\hat{M}^* = -\hat{M}$ при $C^* = C$, тобто $\tilde{u}^* = \tilde{u}$, що видно і з явної формули

$$\tilde{u}_{ij} = u_{ij} + \left(\varphi_{i\cdot} \left(C + \int_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi ds \right)^{-1} \overline{\varphi}_{j\cdot}^{\top} \right)_x \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_{ij} = \overline{\tilde{u}}_{ji}. \tag{46}$$

В ермітовому випадку $u^* = u$ рівняння МКР (42) розпадається на взаємодіючу систему N^2 рівнянь типу КР для дійсних функцій $v_{ij}^{+} = u_{ij} + u_{ji}$, $v_{ij}^{-} = i(u_{ij} - u_{ji})$. Формула (46) надає можливість будувати широкий клас точних розв'язків рівняння (42), виходячи, наприклад, з тривіального. Оскільки $u \equiv 0$ задовольняє (42), то згідно з основним твердженням п. 4.1 $\tilde{u}$ — теж розв'язок (42), компоненти якого обчислюються за формулою

$$\tilde{u}_{ij} = -\left(\begin{vmatrix} \Omega & \overline{\varphi}_{j\cdot}^{\top} \\ \varphi_{i\cdot} & 0 \end{vmatrix} |\Omega|^{-1} \right)_x, \qquad i, j = \overline{1, N},$$

де φ — довільний розв'язок з $\mathcal{H}_-$ лінійної системи

$$\begin{aligned} \alpha\varphi_y &= \varphi_{xx}, \qquad \alpha \in i\mathbf{R}, \\ \beta\varphi_t &= \varphi_{xxx}, \qquad \beta \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{47}$$

При $N = 1$ розв'язок (47) переходить у розв'язок скалярного рівняння КР-II $(\alpha \in i\mathbf{R})$ [4, 7, 27], який залежить від K функціональних параметрів $\varphi = \varphi_{1\cdot} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$, $\varphi_j := \varphi_{1j}$, $j = \overline{1, K}$:

$$\tilde{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |\Omega|.$$

4.2.2. Рівняння Деві – Стюардсона (DS). У цьому пункті ми застосовуємо запропонований апарат бінарних перетворень типу Беклунда – Дарбу (37) для інтегрування $(2+1)$-вимірних узагальнень відомого нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) [31, 32]

$$iq_t = q_{xx} + \mu |q|^2 q, \quad q = q(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}), \quad \mu \in \mathbf{R}. \tag{48}$$

Серед великої кількості інтегровних багатовимірних узагальнень моделі (48) [6, 8, 33 – 36] найбільш відомі так звані системи Деві – Стюардсона [37] і їх модифікації. Хоча, як з'ясувалось в останні роки, ці моделі виникали в більш ранніх роботах (див. [38 – 41]), ніж [37], і по праву могли б називатись системами Бенні – Роскеса.

Розглянемо (2×2)-матричні диференціальні оператори L, M вигляду [42]

$$L = \alpha\partial_y - \sigma_3\mathcal{D} - [\sigma_3, \omega], \quad M = \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2\omega_x, \tag{49}$$

де

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} := \operatorname{diag}(1, -1),$$

$$\omega = P + S = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} := \operatorname{off}(q, r) + \operatorname{diag}(s_1, s_2). \tag{50}$$

У формулі (50) введено скорочення, які часто використовуються для спрощення викладок.

Умовою сумісності лінійної системи

$$L(f) = M(f) = 0, \tag{51}$$

як і транспонованої

$$L^{\tau}(g) = M^{\tau}(g) = 0, \tag{52}$$

є операторне зображення Лакса – Захарова – Шабата (38) $[L, M] = 0$ системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \beta P_t &= \alpha\sigma_3 P_{xy} + 2[S_x, P], \\ S_x - \alpha\sigma_3 S_y + 2P^2 &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

При додаткових обмеженнях вигляду

$$r = \mu\bar{q}, \quad \beta \in i\mathbf{R}, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad s_1 = \bar{s}_1, \quad s_2 = \bar{s}_2, \tag{54}$$

де $\mathbf{R} \ni \mu$ — постійна зв'язку, система (53) редукується до вигляду

$$\begin{aligned} \beta q_t &= \alpha q_{xy} + 2(s_1 - s_2)_x q, \\ s_{1x} - \alpha s_{1y} &= -2\mu|q|^2, \\ s_{2x} + \alpha s_{2y} &= -2\mu|q|^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Вводячи нову функцію $s := (s_1 - s_2)_x$, як диференціальний наслідок системи (55) отримуємо першу з моделей Деві – Стюардсона (DS-I):

$$\begin{aligned} \beta q_t &= \alpha q_{xy} + 2sq, \\ s_{xx} - \alpha^2 s_{yy} + 4\alpha\mu|q|^2_{xy} &= 0. \end{aligned} \tag{56}$$

При бінарному відображенні (37) оператори L, M (49) переходять у подібні

$$\hat{L} = \alpha\partial_y - \sigma_3\mathcal{D} - [\sigma_3, \tilde{\omega}], \qquad \hat{M} = \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2\tilde{\omega}_x,$$

де

$$\tilde{\omega} = \omega + \varphi\Psi^{\top} = \omega + \varphi\Omega^{-1}\psi^{\top} = \omega + \varphi\left(C + \int\limits_{-\infty}^{x}\psi^{\top}\varphi\, d\tau\right)^{-1}\psi^{\top} \tag{57}$$

(пор. з (43)), а φ, ψ — $(2\times K)$-матричні розв'язки систем (51), (52) відповідно.

Твердження 1. *Розв'язки f, g системи* (51), (52) *допускають редукцію*

$$g = \sigma(\mu)\bar{f}, \qquad \sigma(\mu) := \operatorname{diag}(\mu, 1), \tag{58}$$

тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти операторів L, M (49) *задовольняють обмеження* (54).

Зауважимо, що при $\mu = 1$ $L^* = -L$, $M^* = M$.

Наслідок. *Нехай φ, ψ — фіксовані, f, g — довільні розв'язки систем* (51), (52), *що задовольняють редукції* (58). *Тоді згідно з твердженням* 2 *теореми* 13 *і основним твердженням п.* 4.1 *функції*

$$\tilde{q} = q + \varphi_{1\cdot}\left(C + \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi^*\sigma(\mu)\varphi\, d\tau\right)^{-1}\varphi^*_{2\cdot} = q - \frac{\begin{vmatrix}\Omega & \varphi^*_{2\cdot} \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix}}{|\Omega|},$$

$$\tilde{s}_1 = s_1 + \mu\varphi_{1\cdot}\Omega^{-1}\varphi^*_{1\cdot} = s_1 - \mu|\Omega|^{-1}\begin{vmatrix}\Omega & \varphi^*_{1\cdot} \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix},$$

$$\bar{s}_2 = s_2 + \varphi_{2\cdot}\Omega^{-1}\varphi_{2\cdot}^* = s_2 - |\Omega|^{-1}\begin{vmatrix}\Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 0\end{vmatrix}$$

є розв'язками системи (55) *тоді і тільки тоді, коли* C — *ермітова* ($C = C^*$).

Таким чином, виходячи з тривіального розв'язку $s_1(x, y, t) = s_2(x, y, t) = q(x, y, t) \equiv 0$ системи (55), отримуємо широкий клас точних розв'язків нелінійної моделі DS-I (56):

$$\bar{q}(x, y, t) = |\Omega|^{-1}\begin{vmatrix}\Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix},$$

$$\bar{s} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{|\Omega|^{-1}\left(\begin{vmatrix}\Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 0\end{vmatrix} - \mu\begin{vmatrix}\Omega & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix}\right)\right\}, \tag{59}$$

де $\varphi_{1\cdot}(x, y, t) := \varphi_1(\alpha x + y, t)$, $\varphi_{2\cdot}(x, y, t) := \varphi_2(\alpha x - y, t)$ — K-компонентні векторні (вектор-рядки) розв'язки скалярного рівняння Шредінгера (незбуреної системи (51))

$$\beta\varphi_{1t} = \varphi_{1xx}, \quad \beta\varphi_{2t} = \varphi_{2xx}, \quad \beta \in i\mathbf{R}. \tag{60}$$

Крім обмежень (54) система (53) допускає обмеження вигляду

$$r = \mu\bar{q}, \quad \alpha \in i\mathbf{R}, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad s_2 = \bar{s}_1. \tag{61}$$

При цьому редукована нелінійна система (56) називається моделлю Деві – Стюардсона другого типу (DS-II). Зауважимо, що для DS-I відповідний L-оператор Лакса є оператором гіперболічного типу, а у випадку DS-II — еліптичного.

Твердження 2. *Розв'язки* f, g *систем* (51), (52) *допускають редукції*

$$f = \sigma(\mu)\bar{f}, \quad g = \sigma^{\top}(\mu)\bar{g}, \quad \sigma(\mu) = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ \sqrt{\mu} & 0\end{pmatrix}, \quad \mu > 0, \tag{62}$$

тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти операторів L, M (49) *задовольняють обмеження* (61).

Доведення твердження 2 (як і твердження 1) проводиться безпосередньою перевіркою.

Зауважимо, що функції f, g, які задовольняють редукції (62), зображаються у вигляді

$$f = \begin{pmatrix}f_{1\cdot} \\ \sqrt{\mu}\,\bar{f}_{1\cdot}\end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix}g_{1\cdot} \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}}\bar{g}_{1\cdot}\end{pmatrix}. \tag{63}$$

Наслідок. *Нехай* φ, ψ — *фіксовані, а* f, g — *довільні розв'язки системи* (51), (52), *що задовольняють редукції* (62). *Тоді згідно з основним твердженням п.* 4.1 *і твердженням 2 теореми* 14 *функції* (*див.* (57))

$$\hat{q} = q + \varphi_{1\cdot}\left(C + \int_{-\infty}^{x}\psi^{\top}\varphi\, d\tau\right)^{-1}\psi_{2\cdot}^{\top} =$$

$$= q + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\varphi_{1\cdot}\left(C + 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{x}\psi_{1\cdot}^{\top}\varphi_{1\cdot}\, d\tau\right)^{-1}\overline{\psi}_1^{\top} = q + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\varphi_{1\cdot}\Omega^{-1}\overline{\psi}_{1\cdot}^{\top}, \tag{64}$$

$$\bar{s} = s + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{1\cdot}\Omega^{-1}\psi_{1\cdot}^{\top} - \overline{\varphi}_{1\cdot}\Omega^{-1}\overline{\psi}_{1\cdot}^{\top}\right)$$

є розв'язками нелінійної моделі DS-II ((56) *при* $\alpha \in i\mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\mu > 0$) *тоді і тільки тоді, коли* C — *дійсна матриця,* $C = \overline{C}$.

У формулі (64) враховано редукції (63):

$$\Omega = C + \int_{-\infty}^{x} \psi^{\top}\varphi\, d\tau = C + \int_{-\infty}^{x}\left(\psi_{1\cdot}^{\top}, \frac{1}{\sqrt{\mu}}\overline{\psi}_{1\cdot}^{\top}\right)\begin{pmatrix}\varphi_{1\cdot} \\ \sqrt{\mu}\,\overline{\varphi}_{1\cdot}\end{pmatrix} d\tau =$$

$$= C + \int_{-\infty}^{x}\left(\psi_{1\cdot}^{\top}\varphi_{1\cdot} + \overline{\psi}_{1\cdot}^{\top}\overline{\varphi}_{1\cdot}\right)d\tau = C + 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{x}\psi_{1\cdot}^{\top}\varphi_{1\cdot}\, d\tau.$$

Найпростіший клас точних розв'язків моделі DS-II отримаємо з формул (64), поклавши $q = s_1 = s_2 \equiv 0$:

$$\begin{gathered}\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\begin{vmatrix}\Omega & \psi_{1\cdot}^{*} \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix}|\Omega|^{-1}, \\ \bar{s} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\begin{vmatrix}\Omega & \psi_{1\cdot}^{*} \\ \overline{\varphi}_{1\cdot} & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\Omega & \psi_{1\cdot}^{\top} \\ \varphi_{1\cdot} & 0\end{vmatrix}\right)|\Omega|^{-1}\right\},\end{gathered} \tag{65}$$

де $\varphi_{1\cdot}(x, y, t) := \varphi_1(\alpha x + y, t)$, $\psi_{1\cdot}(x, y, t) := \psi_1(\alpha x + y, t)$ — K-компонентні розв'язки лінійної системи

$$\begin{aligned}\beta\varphi_{1t} &= \varphi_{1xx}, \\ \beta\psi_{1t} &= -\psi_{1xx},\end{aligned} \qquad \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in i\mathbf{R}. \tag{66}$$

Таким чином, з формул (59), (60) і (65), (66) видно, що розв'язки нелінійних моделей DS-I, DS-II явно будуються у вигляді нелінійної суперпозиції лінійних хвиль. У науковій літературі по теорії солітонів моделі DS-I, DS-II зустрічаються також в дещо відмінній від (56) формі запису. Це пов'язано або з вибором еволюційного оператора Лакса M в іншій формі (див. [4, 5, 43 – 45]), або з переходом до незалежних змінних світового конуса $z_1 = x - y$, $z_2 = x + y$ [6, 46, 47]. Так, якщо замінити оператор M (49) на оператор $\tilde{M}$ вигляду [42]

$$\tilde{M} = \beta\partial_t - \sigma_3\mathcal{D}^2 - 2\sigma_3 P\mathcal{D} - \sigma_3 P_x - \alpha P_y - \mathrm{diag}(s_1, s_2),$$

то аналог системи рівнянь (53) запишеться таким чином:

$$\begin{gathered}\beta P_t = \frac{1}{2}\sigma_3\left(P_{xx} + \alpha^2 P_{yy}\right) + [S, P], \\ \alpha\sigma_3 S_y - S_x = 2\left[\alpha(P^2)_y - \sigma_3(P^2)_x\right],\end{gathered} \tag{67}$$

де $S = \mathrm{diag}\,(s_1, s_2)$.

Вводячи функцію $s := s_1 - s_2$, після редукції $r = \mu\bar{q}$ отримуємо диференціальний наслідок системи (67)

$$\begin{gathered}\beta q_t = \frac{1}{2}\left(q_{xx} + \alpha^2 q_{yy}\right) + sq, \\ \alpha^2 s_{yy} - s_{xx} = 4\mu\left(\alpha^2|q|_{yy}^2 + |q|_{xx}^2\right),\end{gathered} \tag{68}$$

який також називається моделлю DS-I (при $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in i\mathbf{R}$) або DS-II (при $\alpha \in i\mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$). Аналоги розв'язків (59), (60) для DS-I (68) записуються, очевидно, так:

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \Omega & \varphi_2^* \\ \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} |\Omega|^{-1}, \tag{69}$$

де $\varphi_1 = \varphi_1(\alpha x + y, t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\alpha x - y, t)$ — K-компонентні розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \beta\varphi_{1t} &= \varphi_{1xx}, \\ \beta\varphi_{2t} &= -\varphi_{2xx}, \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \beta \in i\mathbf{R},$$

$\Omega = C + \mu \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_1^* \varphi_1 \, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_2^* \varphi_2 \, d\tau$ — ермітова матриця.

Зауваження 7. У найпростішому випадку при $K = 1$ потенціал $\Omega := c + \int_{-\infty}^{x} \psi^{\top} \varphi \, dx$ (57) є скалярною функцією:

$$\Omega = c + \int\limits_{-\infty}^{x} (\psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2) dx, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Враховуючи редукційні обмеження (54) і (61), для обох систем Деві – Стюардсона отримуємо $\overline{\Omega} = \Omega$. Відповідні розв'язки (при $K = 1$), отримані іншими методами (як нелокальні симетрійні редукції), можна також знайти в роботах [42] (DS-II) і [45] (DS-I). Зауважимо також, що розв'язки рівняння DS вигляду (69) не охоплюють точних розв'язків, отриманих МОЗР у роботах [6, 46]. Щоб їх отримати методом цієї роботи, необхідно модифікувати означення бінарних перетворень (1) на випадок функцій двох змінних, що буде продемонстровано в іншій статті.

5. Висновки. У роботі запропоновано алгебраїчний метод інтегрування широкого класу нелінійних динамічних систем, які допускають диференціальне зображення Лакса як в скалярній, так і в матричній алгебрі. В основі даного підходу лежать бінарні перетворення і індуковані ними спеціальні інтегральні оператори Вольтерри (оператори перетворень), що діють інваріантно в матричній алгебрі диференціальних виразів. Нелінійні інтегровні системи розмірності $(1+1)$ і $(2+1)$, які можуть бути проінтегровані запропонованим методом, виникають як локальні k-редукції Гельфанда – Дікого в скалярній [2, 8, 24, 27, 48, 49] і матричній [29, 50] ієрархіях Кадомцева – Петвіашвілі. Ще одним напрямком застосування отриманих у роботі результатів є можливість побудови широкого класу явних розв'язків для $(1+1)$- і $(2+1)$-вимірних інтегровних систем, які є симетрійними редукціями ієрархії KP і введені в [9 – 14, 19]. Ці редукції є нелокальними узагальненнями k-редукцій Гельфанда – Дікого і містять велику кількість цікавих з теоретичної і прикладної точок зору нелінійних моделей. Отримані в цьому напрямку результати можна знайти в роботах [8, 16 – 18, 21, 23, 24].

Інший клас інтегральних операторів перетворень знайдено в [22]. Ці оператори дозволяють інтегрувати нелінійні моделі, які є локальними [29, 48, 50, 51] і нелокальними [19, 20, 22, 45] редукціями в неканонічних скалярних і матричних інтегровних ієрархіях (модифікованих ієрархіях Кадомцева – Петвіашвілі (mKP)). Одна з найпростіших нелокальних редукцій — багатокомпонентна модифікована нелінійна модель Шредінгера — проінтегрована в роботі [22].

1. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
2. *Dickey L. A.* Soliton equations and Hamiltonian systems // Adv. Math. Phys. – 1991. – **12**. – 310 p.
3. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1991. – 120 p.
4. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
5. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
6. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
7. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 43 – 53.
8. *Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 78 – 97.
9. *Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W.* (1+1)-Dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – **157**. – P. 17 – 21.
10. *Sidorenko Yu., Strampp W.* Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – **7**. – P. L-37 – L-43.
11. *Cheng Yi.* Constrained of the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1992. – **33**. – P. 3774.
12. *Sidorenko Yu.* KP-hierarchy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems // Укр. мат. журн. – 1993. – **25**, № 1. – С. 91 – 104.
13. *Sidorenko Yu., Strampp W.* Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev–Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, № 4. – P. 1429 – 1446.
14. *Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W.* Hamiltonian structures of the Melnicov system and its reductions // Inverse Problems. – 1993. – **9**. – P. 737 – 747.
15. *Oevel W., Strampp W.* Constrained KP-hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Communs Math. Phys. – 1993. – **157**. – P. 51 – 81.
16. *Cheng Yi., Zhang Y. J.* Solutions of the vector k-constrainted KP-hierarchy // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 11.
17. *Митропольський Ю. О., Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Допов. НАН України. – 1999. – № 8. – С. 19 – 23.
18. *Сидоренко Ю. М.* Метод інтегрування рівнянь Лакса з нелокальними редукціями // Там же. – № 9. – С. 33 – 36.
19. *Kundu A., Strampp W., Oevel W.* Gauge transformations of constrained KP flows: new integrable hierarchies // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 6. – P. 2972 – 2984.
20. *Sidorenko Yu. M.* On the reductions in noncanonical hierarchy of integrable systems // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2001. – **36**. – P. 262 – 268.
21. *Berkela Yu.* The exact solutions of matrix generalizations of some integrable systems // Ibid. – 2002. – **43**, Pt 1. – P. 296 – 301.
22. *Sidorenko Yu.* Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions // Ibid. – P. 352 – 357.
23. *Berkela Yu. Yu., Sidorenko Yu. M.* The exact solutions of some multicomponent integrable models // Math. Stud. – 2002. – **17**, № 1. – P. 57 – 67.
24. *Oevel W.* Darboux theorems and Wronskian formulas for integrable systems. I: Constrained KP flows // Physica A. – 1993. – **195**. – P. 533 – 576.
25. *Сидоренко Ю. М.* Нелокальні редукції в системах, інтегровних методом оберненої задачі // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их прил. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 199 – 202.
26. *Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М., Беркела Ю. Ю.* Новий клас C-інтегровних систем. Пряма лінеаризація нелінійних моделей // Там же. – С. 189 – 192.
27. *Сидоренко Ю. М.* Про узагальнення τ-функції для ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математика і механіка. – 1998. – С. 40 – 49.
28. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Многомерные интегрируемые нелинейные системы и методы построения их решений // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика (Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.Т.133). – Л.: Наука, 1984. – **6**. – С. 77 – 91.
29. *Сидоренко Ю. М.* Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі і нелінійні інтегровні системи // Нелінійні коливання. – 1999. – № 2. – С. 28 – 36.

30. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 4. – С. 753 – 756.
31. *Захаров В. Е.* Кинетическое уравнение для солитонов // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1971. – **60**, № 3. – С. 993 – 1000.
32. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // Там же. – 1971. – **61**, № 1. – С. 118 – 134.
33. *Kates R. E., Kaup D. J.* Two-dimensional nonlinear Schrödinger equations and their properties // Physica D. – 1994. – **75**. – P. 458 – 470.
34. *Zakharov V. E.* Integrable systems in multidimentional spaces // Lect. Notes Phys. – 1983. – **153**. – P. 190 – 216.
35. *Fokas A. S.* On the simplest integrable equation in 2 + 1 // Inverse Problems. – 1994. – **10**. – P. L-19 – L-22.
36. *Mikhailov A. V., Yamilov R. I.* On integrable two-dimensional generalizations of nonlinear Schrodinger-type equations // Phys. Lett. A. – 1997. – **230**. – P. 295 – 300.
37. *Davey A., Stewartson K.* On three dimensional pachets of surface waves // Proc. Royal Soc. London A. – 1974. – **338**. – P. 101 – 110.
38. *Benney D. J.* Long nonlinear waves in fluid flows // J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.). – 1966. – **45**. – P. 52 – 63.
39. *Benney D. J., Roskes G. J.* Wave instabilities // Stud. Appl. Math. – 1969. – **48**. – P. 377 – 385.
40. *Benney D. J., Newell A. C.* The propagation of nonlinear wave envelopes // J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.). – 1967. – **46**. – P. 133 – 139.
41. *Benney D. J.* Some properties of long waves // Stud. Appl. Math. – 1973. – **52**. – P. 45 – 69.
42. *Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса та інтегровані редукції в системі Деві – Стюардсона // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 252 – 263.
43. *Ablowitz M. J., Haberman R.* Nonlinear evolution equations — two and three dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1975. – **35(18)**. – P. 1185 – 1189.
44. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* The inverse scattering transform for multidimensional 2+1 problems // Nonlinear Phenomena / Ed. K. B. Wolf (Lect. Notes Phys.). – Berlin: Springer, 1984. – № 189.
45. *Сидоренко Ю. М.* Симетрійна редукція моделі Деві – Стюардсона як метод побудови точних розв'язків // Допов. НАН України. – 1999. – № 7. – С. 35 – 38.
46. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ. – 1982. – **16**, вып. 1. – С. 80 – 82.
47. *Nimmo J. J. C.* Darboux transformations for a two-dimensional Zakharov – Shabat / AKNS spectral problem // Inverse Problems. – 1992. – **8**. – P. 219 – 243.
48. *Konopelchenko B., Oevel W.* An r-matrix approach to nonstandard classes of integrable equation // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1993. – **29**. – P. 581 – 666.
49. *Oevel W., Rogers C.* Gauge transformations and reciprocal links in 2 + 1 dimensions // Rev. Math. Phys. – 1993. – **5**, № 2. – P. 299 – 330.
50. *Konopelchenko B., Oevel W.* Matrix Sato theory and integrable equations in 2 + 1 dimensions // Proc. 7th Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS'91), Baia Verde, Italy, 19 – 29 June 1991. – 11 p.
51. *Беркела Ю. Ю., Сидоренко Ю. М.* Нелінійна модель типу Ішиморі як редукція неканонічної ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мат.-мех. – 2001. – Вип. 59. – С. 74 – 84.

Одержано 23.07.98,
після доопрацювання — 28.02. 2002