УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИ ПРОИЗВОДНЫХ

We propose an asymptotic method for the integration of one type of systems of linear differential equations with a small parameter at a part of derivatives.

Запропоновано асимптотичний метод інтегрування одного виду систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних.

Будем рассматривать систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$u' = A(x)u + A_1(x)v, \tag{1}$$

$$\varepsilon v' = \big(B(x) + \varepsilon B_1(x)\big)v + \varepsilon B_2(x)u, \tag{2}$$

где $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^2$, A, A_1, B_1, B_2 — голоморфные при

$$|x| \le \rho \tag{3}$$

матрицы, $B(x)$ — матрица уравнения Эйри [1]:

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

ε — малый положительный параметр. Не умаляя общности системы можно предполагать, что следы матриц $A(x)$ и $B_1(x)$ — тождественные нули

$$\operatorname{tr} A(x) = \operatorname{tr} B_1(x) \equiv 0 \tag{5}$$

для x из области (3).

Построим преобразование, приводящее систему (1), (2) к простейшему виду

$$u' = C(\varepsilon)v, \tag{6}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \tag{7}$$

где

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0} \varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0} \varepsilon^n D_n, \tag{8}$$

C_n, D_n — постоянные матрицы специального вида

$$C_n = (c_n \quad 0), \; D_n = \begin{pmatrix} 0 \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Это преобразование ищем с помощью замены (u, v) системы (1), (2) на (u, v) системы (6), (7) с матрицей замены

$$\Phi(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum\limits_{n=1} \varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum\limits_{n=1} \varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

С учетом изложенного для матрицы $\Phi = \Phi(x, \varepsilon)$ получаем матричное уравнение

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A & \varepsilon A_1 \\ \varepsilon B_2 & B + \varepsilon B_1 \end{pmatrix} \Phi. \tag{11}$$

Из (10), (11) получаем систему уравнений для матрицы Φ:

$$U' + \sum_{n=1} \varepsilon^n (U_n' + V_{n1} D(\varepsilon)) = AU + \sum_{n=1} \varepsilon^n (AU_n + A_1 U_{n1}), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1} \varepsilon^n V_{n1}' + UC(\varepsilon) + \sum_{n=1} \varepsilon^n U_n C(\varepsilon) + \sum_{n=1} \varepsilon^{n-1} V_{n1} B =$$

$$= \sum_{n=1} \varepsilon^n (AV_{n1} + A_1 V_n) + A_1 V, \tag{13}$$

$$\sum_{n=1} \varepsilon^n U_{n1}' + VD(\varepsilon) + \sum_{n=1} \varepsilon^n V_n D(\varepsilon) =$$

$$= B_2 U + \sum_{n=1} \varepsilon^n (B_2 U_n + B_1 U_{n1}) + \sum_{n=1} \varepsilon^{n-1} BU_{n1}, \tag{14}$$

$$\varepsilon V' + \sum_{n=1} \varepsilon^{n+1} (V_n' + U_{n1} C(\varepsilon)) + \sum_{n=1} \varepsilon^n V_n B + VB =$$

$$= \sum_{n=1} \varepsilon^{n+1} (B_2 V_{n1} + B_1 V_n) + \sum_{n=1} \varepsilon^n BV_n + \varepsilon B_1 V + BV. \tag{15}$$

Приравнивая коэффициенты при нулевой степени ε, из (8), (12) – (15) находим уравнения

$$U' = AU, \quad UC_0 + V_{11} B = A_1 V, \tag{16}$$

$$VD_0 = B_2 U + BU_{11}, \quad VB = BV. \tag{17}$$

Из первого и последнего уравнений (16), (17) получаем

$$U(x) = \Omega_0^x(A), \quad V(x) = \alpha_0(x) I + \beta_0(x) B(x), \tag{18}$$

где $\Omega_0^x(A)$ — матрицант первого уравнения (16), $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$ — произвольные голоморфные в области (3) функции, I — единичная матрица.

Для определения функций $\alpha_0(x)$ и $\beta_0(x)$ мы используем, следуя идее [1], систему уравнений, получаемую из (8), (12) – (15) приравниванием в ней коэффициентов при первой степени параметра ε:

$$U_1' + V_{11} D_0 = AU_1 + A_1 U_{11}, \tag{19}$$

$$V_{11}' + UC_1 + U_1 C_0 + V_{21} B = AV_{11} + A_1 V_1, \tag{20}$$

$$U_{11}' + VD_1 + V_1 D_0 = B_2 U_1 + B_1 U_{11} + BU_{21}, \tag{21}$$

$$V' + V_1 B = BV_1 + B_1 V. \tag{22}$$

А именно, подставляя выражение (18) в уравнение (22), получаем

$$\alpha_0'(x) I + \beta_0'(x) B(x) + \beta_0(x) B'(x) + V_1 B(x) =$$

$$= B(x) V_1 + B_1(x)(\alpha_0(x) I + \beta_0(x) B(x)). \tag{23}$$

Для разрешимости уравнения (23), согласно лемме 29.2 [1], необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\operatorname{tr} V'(x) = \operatorname{tr}\left(B_1(x)V(x)\right) \equiv 0. \tag{24}$$

Это приводит, с учетом (5), к системе уравнений для функций $\alpha_0(x)$ и $\beta_0(x)$ вида

$$2\alpha_0' = b_1(x)\beta_0, \qquad 2x\beta_0' + \beta_0 = b_1(x)\alpha_0, \tag{25}$$

где

$$b_1(x) = \operatorname{tr}\left(B_1(x)B(x)\right). \tag{26}$$

Согласно теории регулярных особых точек линейных дифференциальных уравнений [1, 2], система (25) имеет ненулевые голоморфные в области (3) решения, которые зависят от значения $\alpha_0(0)$. Положим

$$\alpha_0(0) = 1$$

и определим однозначно нужное нам решение системы уравнений (25), (26):

$$\alpha_0 = \alpha_0(x), \qquad \beta_0 = \beta_0(x). \tag{27}$$

Подставляя теперь значения (18), (27) в оставшиеся два уравнения системы (16), (17), для определения матриц C_0, D_0, $V_{11}(x)$ и $U_{11}(x)$ получаем вполне определенные уравнения

$$U(x)C_0 + V_{11}B(x) = A_1(x)V(x), \tag{28}$$

$$V(x)D_0 = B(x)U_{11} + B_2(x)U(x). \tag{29}$$

Из (28) после умножения его справа на $B(x)$ имеем уравнение

$$U(x)C_0B(x) + xV_{11} = A_1(x)V(x)B(x). \tag{30}$$

При $x = 0$ из (30) получаем уравнение для определения матрицы C_0

$$C_0B(0) = A_1(0)V(0)B(0), \tag{31}$$

из которого следует, что если записать соответствующие матрицы в (31) покоординатно

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} \end{pmatrix}, \quad A_1(0)V(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{pmatrix},$$

то значения

$$c_{11} = a_{11}, \ \ldots \ , c_{p1} = a_{p1},$$

$$c_{12} = 0, \ \ldots \ , c_{p2} = 0$$

всегда удовлетворяют уравнению (31). Таким образом, выбрав C_0 в виде

$$C_0 = (c_0 \quad 0), \qquad c_0 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

для определения матрицы V_{11} получаем вполне определенное уравнение вида

$$xV_{11} = F(x), \tag{33}$$

где $F(x)$ — известная матрица. Поскольку, согласно выбору C_0,

$$F(0) = 0,$$

то

$$F(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tx)dt = x\int_0^1 F'(tx)dt, \tag{34}$$

где через F' обозначена производная функции $F(x)$ по x: $F' = dF/dx$.

С учетом (33), (34) для V_{11} находим значение

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'(tx)dt, \tag{35}$$

которое определяет голоморфное в области (3) решение уравнения (33).

Из (29) после умножения его слева на $B(x)$ имеем уравнение

$$B(x)V(x)D_0 = xU_{11} + B(x)B_2(x)U(x). \tag{36}$$

При $x = 0$ из (36) получаем уравнение для определения матрицы D_0

$$B(0)V(0)D_0 = B(0)B_2(0)U(0), \tag{37}$$

из которого следует, что если записать соответствующие матрицы в (37) покоординатно

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & \dots & d_{2p} \end{pmatrix}, \quad B_2(0)U(0) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \end{pmatrix},$$

то значения

$$d_{21} = b_{21}, \dots, d_{2p} = b_{2p},$$

$$d_{11} = 0, \dots, d_{1p} = 0$$

всегда удовлетворяют уравнению (37). Таким образом, выбрав D_0 в виде

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_0 \end{pmatrix}, \quad d_0 = (b_{21} \dots b_{2p}), \tag{38}$$

для определения матрицы U_{11} получаем вполне определенное уравнение вида

$$xU_{11} = G(x), \tag{39}$$

где $G(x)$ — известная матрица. Поскольку, согласно выбору D_0,

$$G(0) = 0,$$

то

$$G(x) = x\int_0^1 G'(tx)dt. \tag{40}$$

С учетом (40) для U_{11} находим значение

$$U_{11}(x) = \int_0^1 G'(tx)dt, \tag{41}$$

которое определяет голоморфное в области (3) решение уравнения (39). Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденные из уравнений (30) и (36) матрицы C_0, D_0, $V_{11}(x)$ и $U_{11}(x)$ являются решениями уравнений (28) и (29). Таким образом, найдены первые слагаемые разложений (8), (10).

Для нахождения вторых слагаемых этих разложений мы имеем систему уравнений (19) – (22). Из уравнения (19) этой системы, потребовав дополнительно выполнения условия

$$U_1(0) = 0,$$

находим матрицу $U_1(x)$ в виде

$$U_1(x) = \int_0^x \Omega_\tau^x(A)[A_1(t)U_{11}(t) - V_{11}(t)D_0]\,dt.$$

Рассмотрим уравнение (22). С учетом условий (24) уравнение (22) принимает вид

$$V_1 B(x) = B(x)V_1 + F_1(x), \tag{42}$$

где $F_1(x)$ — известная матрица, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{tr} F_1(x) = \operatorname{tr}\left(F_1(x)B(x)\right) \equiv 0. \tag{43}$$

Из (43) следует, что $F_1(x)$ имеет вид матрицы

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ -xg_1(x) & -f_1(x) \end{pmatrix}, \tag{44}$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — известные голоморфные в области (3) функции.

С учетом (44) общее решение уравнения (42) определяется формулой

$$V_1(x) = \alpha_1(x)I + \beta_1(x)B(x) + W_1(x), \qquad W_1(x) = \begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ — произвольные голоморфные в области (3) функции.

Как и в случае с определением функций $\alpha_0(x)$ и $\beta_0(x)$, для определения $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ следует записать систему уравнений, получаемую из (8), (12) – (15) приравниванием в ней коэффициентов при второй степени параметра ε

$$U_2' + (V_{11}D_1 + V_{21}D_0) = AU_2 + A_1U_{21},$$

$$V_{21}' + UC_2 + (U_2C_0 + U_1C_1) + V_{31}B = AV_{21} + A_1V_2,$$

$$U_{21}' + VD_2 + (V_2D_0 + V_1D_1) = (B_2U_2 + B_1U_{21}) + BU_{31},$$

$$V_1' + U_{11}C_0 + V_2B = BV_2 + (B_2V_{11} + B_1V_1),$$

и рассмотреть последнее из этих уравнений, содержащее производную от $V_1(x)$.

Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$V_1' + V_2B(x) = B(x)V_2 + B_1(x)V_1 + F_2(x), \tag{46}$$

где $F_2(x)$ — известная матрица

$$F_2(x) = B_2(x)V_{11}(x) - U_{11}(x)C_0.$$

Условия разрешимости уравнения (46) таковы:

$$\operatorname{tr} V_1'(x) \equiv \operatorname{tr}\left(B_1(x)V_1(x)\right) + \operatorname{tr} F_2(x), \tag{47}$$

$$\operatorname{tr}\left(V_1'(x)B(x)\right) \equiv \operatorname{tr}\left(B_1(x)V_1(x)B(x)\right) + \operatorname{tr}\left(F_2(x)B(x)\right). \tag{48}$$

Из (47), (48) с учетом формул (5), (45) имеем уравнения для $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ и $\beta_1 = \beta_1(x)$

$$2\alpha_1' = b_1(x)\beta_1 + f_1(x), \tag{49}$$

$$2x\beta_1' + \beta_1 = b_1(x)\alpha_1 + g_1(x), \tag{50}$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — известные голоморфные в области (3) функции.

Из [1] известно, что система (49), (50) имеет голоморфные в области (3) решения, которые зависят от значения $\alpha_1(0)$. Положим

$$\alpha_1(0) = 0$$

и однозначно определим нужное нам решение системы уравнений (49), (50)

$$\alpha_1 = \alpha_1(x), \quad \beta_1 = \beta_1(x). \tag{51}$$

Подставив (51) в (45), мы однозначно определим решение уравнения (22), голоморфное в области (3). Для решения оставшихся уравнений системы (19) – (22) подставим в них найденные значения для матриц $U(x)$, $U_1(x)$, $V_{11}(x)$, C_0, $V_1(x)$, $V(x)$, $U_{11}(x)$ и получим уравнения

$$U(x)C_1 + V_{21}B(x) = F_1(x), \tag{52}$$

$$V(x)D_1 = B(x)U_{21} + G_1(x), \tag{53}$$

где $F_1(x)$ и $G_1(x)$ — известные матрицы, голоморфные в области (3).

Уравнения (52), (53) имеют вид уравнений (28), (29) и поэтому решаются тем же методом, что и уравнения (28), (29). Это позволяет однозначно определить матрицы C_1 и D_1 аналогичного матрицам C_0 и D_0 вида

$$C_1 = (c_1 \quad 0), \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 \end{pmatrix},$$

а также однозначно определить матрицы $V_{21} = V_{21}(x)$ и $U_{21} = U_{21}(x)$ аналогичного матрицам $V_{11}(x)$ и $U_{11}(x)$ вида и голоморфные в области (3). Тем самым мы завершаем построение вторых слагаемых разложений (8), (10).

Для построения последующих слагаемых разложений (8), (10) применим метод полной математической индукции. С этой целью запишем уравнения, получаемые из (8), (12) – (15) приравниванием коэффициентов при n-й ($n \geq 2$) степени параметра ε:

$$U_n' + \sum_{k=1}^{n} V_{k1}D_{n-k} = AU_n + A_1U_{n1}, \tag{54}$$

$$V_{n1}' + UC_n + \sum_{k=1}^{n} U_kC_{n-k} + V_{(n+1)1}B = AV_{n1} + A_1V_n, \tag{55}$$

$$U_{n1}' + VD_n + \sum_{k=1}^{n} V_kD_{n-k} = B_2U_n + B_1U_{n1} + BU_{(n+1)1}, \tag{56}$$

$$V_{n-1}' + \sum_{k=1}^{n-1} U_{k1}C_{n-(k+1)} + V_nB = BV_n + B_2V_{(n-1)1} + B_1U_{n-1}. \tag{57}$$

Как видно из предыдущего, при применении математической индукции мы на нулевом ее шаге определили матрицы U, V, C_0, D_0 и U_{11}, V_{11}, на первом ее шаге — матрицы U_1, V_1, C_1, D_1 и U_{21}, V_{21}. Поэтому, предполагая математическую индукцию осуществимой до $(n-1)$-го шага включительно, считаем определенными на $(n-1)$-м ее шаге матрицы U_{n-1}, V_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1} и U_{n1}, V_{n1}, при этом V_{n-1} определено из условий разрешимости уравнения (57).

Из уравнения (54) однозначно определяем U_n в виде

$$U_n(x) = \int_0^x \Omega_t^x(A)\left[A_1(t)U_{n1}(t) - \sum_{k=1}^{n} V_{k1}(t)D_{n-k}\right]dt.$$

Из уравнения (57) определяем V_n в виде

$$V_n(x) = \alpha_n(x)I + \beta_n(x)B(x) + W_n(x), \tag{58}$$

где $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ — произвольные скалярные, $W_n(x)$ — известные матричные функции, голоморфные в области (3).

Для нахождения $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ следует рассмотреть систему, получаемую из (54) – (57) заменой в ней индекса n на $n+1$. Последнее уравнение рассматриваемой системы имеет вид

$$\alpha_n'(x)I + \beta_n'(x)B(x) + \beta_n(x)B'(x) + \sum_{k=1}^{n} U_{k1}(x)C_{n-k} + V_{n+1}B(x) =$$

$$= B(x)V_{n+1} + B_2(x)V_{n1}(x) + B_1(x)[\alpha_n(x)I + \beta_n(x)B(x) + W_n(x)]. \tag{59}$$

Условия разрешимости уравнения (59) определяют дифференциальные уравнения для отыскания функций $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$

$$2\alpha_n' = b_1(x)\beta_n + f_n(x), \tag{60}$$

$$2x\beta_n' + \beta_n = b_1(x)\alpha_n + g_n(x), \tag{61}$$

где $f_n(x)$ и $g_n(x)$ — известные функции

$$f_n(x) = \operatorname{tr}\left[B_2(x)V_{n1}(x) + B_1(x)W_n(x) - \sum_{k=1}^{n} U_{k1}(x)C_{n-k}\right],$$

$$g_n(x) = \operatorname{tr}\left[B_2(x)V_{n1}(x)B(x) + B_1(x)W_n(x)B(x) - \sum_{k=1}^{n} U_{k1}(x)C_{n-k}B(x)\right],$$

голоморфные в области (3). Полагая дополнительно

$$\alpha_n(0) = 0,$$

определяем из (60), (61) однозначно функции $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ как голоморфные в области (3) решения системы (60), (61).

Подставляя найденные значения $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ в формулу (58), мы однозначно определяем голоморфное в области (3) решение уравнения (57).

Рассмотрим оставшиеся два уравнения системы (54) – (57). Подставим в (55), (56) определенные выше выражения для матриц $U_n(x)$ и $V_n(x)$. В результате уравнения (55), (56) примут вид уравнений

$$U(x)C_n + V_{(n+1)1}B(x) = F_n(x), \tag{62}$$

$$V(x)D_n = B(x)U_{(n+1)1} + G_n(x), \tag{63}$$

где $F_n(x)$ и $G_n(x)$ — известные матрицы, голоморфные в области (3).

Уравнения (62), (63) имеют вид уравнений (28), (29) и решаются аналогичным образом. Это дает нам однозначные значения для C_n и D_n вида (32) и (38)

$$C_n = (c_n \quad 0), \quad D_n = \begin{pmatrix} 0 \\ d_n \end{pmatrix}$$

и значения для матриц $U_{(n+1)1}(x)$ и $V_{(n+1)1}(x)$ вида (35) и (41).

Таким образом, найдены решения уравнений (54) – (57) и матрицы C_n и D_n. Этим самым обоснован предложенный выше метод построения всех слагаемых разложений (8), (10), голоморфных в области (3).

Рассмотрим матрицу (10) при $\varepsilon = 0$. Она имеет вид матрицы

$$\Phi_0(x) = \Phi(x, 0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix},$$

где

$$U(x) = \Omega_0^x(A), \qquad V(x) = \alpha_0(x)I + \beta_0(x)B(x). \tag{64}$$

Из условий (5) следует, что

$$\det U(x) \equiv 1.$$

Из (64) имеем

$$\det V(x) = \Delta(x) = \alpha_0^2(x) - x\beta_0^2(x),$$

поэтому

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = 2\alpha_0(x)\alpha_0'(x) - 2x\beta_0(x)\beta_0'(x) - \beta_0^2(x),$$

что с учетом уравнений (25) ведет к тождеству

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} \equiv 0.$$

Но тогда

$$\Delta(x) \equiv \Delta(0) = 1.$$

Таким образом, имеем

$$\det \Phi_0(x) \equiv 1$$

для всех x из области (3).

Рассмотрим уравнение (6). Согласно (9) в покоординатной записи (6) имеет вид системы

$$u_j' = c_j(\varepsilon)\upsilon_1, \qquad j = \overline{1, p}, \tag{65}$$

где

$$c_j(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_{jn}, \qquad j = \overline{1, p}. \tag{66}$$

Пусть r — наименьшая степень ε в разложении (66) такая, что

$$c_{jr} \neq 0$$

для некоторого $p \geq j \geq 1$. Не нарушая общности можем считать, что

$$c_{1r} \neq 0. \tag{67}$$

Тогда из (65), (67) и изложенного выше следует

$$u_1' = c_1(\varepsilon)v_1, \quad u_j' = \gamma_j(\varepsilon)c_1(\varepsilon)v_1 \tag{68}$$

для $j = \overline{2, p}$, где через $\gamma_j(\varepsilon)$ обозначен формальный ряд

$$\gamma_j(\varepsilon) = \frac{c_j(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_{jn}, \quad j = \overline{2, p},$$

γ_{jn} — постоянные. Из (68) следует, что замена

$$u_1 = w_1, \quad u_j = \gamma_j(\varepsilon)u_1 + w_j, \quad j = \overline{2, p}, \tag{69}$$

преобразует систему уравнений (68) к виду

$$w_1' = c_1(\varepsilon)v_1, \quad w_j' = 0, \quad j = \overline{2, p}.$$

Очевидно, что матрица замены для (69)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_p & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = V_0 + \varepsilon V_1 + \ldots \tag{70}$$

удовлетворяет условию

$$\det V(\varepsilon) = 1.$$

Суперпозиция замен с матрицами (10) и (70) очевидно преобразует исходную систему уравнений (1), (2) к системе вида

$$w_1' = c_1(\varepsilon)v_1, \quad w_j' = 0, \quad j = \overline{2, p}, \tag{71}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_1(\varepsilon)w, \tag{72}$$

где $v = (v_1, v_2)$ — двумерный вектор,

$$D_1(\varepsilon) = D(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Итогом изложенного является следующая теорема.

Теорема. *Пусть правая часть системы уравнений* (1), (2) *голоморфна в области* (3). *Тогда существуют формальные ряды* (8), (10), *коэффициенты которых голоморфны в области* (3), *такие, что*

$$\det \Phi(x, 0) \equiv 1$$

и формальное преобразование с матрицей замены вида (10) *приводит систему* (1), (2) *к системе* (71), (72).

Эта теорема естественно дополняет теорию асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, известную из работ [1, 3 – 6].

Вопрос сходимости формальных рядов (8), (10) представляется нам довольно сложным. Однако, можно высказать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Формальные ряды* (8), (10) *являются асимптотическими разложениями матриц* $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$ *и* $\Phi(x, \varepsilon)$, *бесконечно дифференцируемых по* x, ε *в области*

$$|x| \le \rho, \quad |\varepsilon| \le \varepsilon_0$$

вещественных переменных x, ε *при достаточно малом* $\varepsilon_0 > 0$, *такими, что замена переменных с матрицей* $\Phi(x, \varepsilon)$ *преобразовывает систему уравнений* (1), (2) *к виду* (6), (7) *с матрицами* $C(\varepsilon)$ *и* $D(\varepsilon)$.

Рассмотрим систему уравнений (71), (72). Из (71) находим

$$w_1 = w_1^0 + C_1(\varepsilon)\int_0^x V_1(t)\,dt, \quad w_j = w_j^0, \quad j = \overline{2, p}, \tag{73}$$

где w_j^0 — произвольные постоянные, $j = \overline{1, p}$. Подставляя (73) в (72), получаем систему уравнений для $v = (v_1, v_2)$, которая приводится к одному уравнению второго порядка

$$\varepsilon^2 v_1'' = x v_1 + \varepsilon c_0 + 3\varepsilon\alpha \int_0^x v_1(t)\,dt, \tag{74}$$

где

$$c_0 = d_1(\varepsilon) w_0, \quad d_1(\varepsilon) = (d_{11}(\varepsilon), \ldots, d_{1p}(\varepsilon)), \quad \alpha = \alpha(\varepsilon) = \frac{1}{3} d_{11}(\varepsilon) c_1(\varepsilon).$$

Найдем частное решение уравнения (74), положив

$$v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 0. \tag{75}$$

Беря $v_1(x)$ в виде степенного ряда

$$v_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n, \tag{76}$$

для коэффициентов этого ряда получаем уравнения

$$\varepsilon^2 v_2 = \varepsilon c_0, \quad v_2 = \lambda c_0, \quad \lambda = \frac{1}{3}, \tag{77}$$

$$\varepsilon^2 (n+2)(n+1) v_{n+2} = \left(1 + \frac{3\varepsilon\alpha}{n}\right) v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{78}$$

Из (78) имеем

$$v_{n+2} = \frac{(n + 3\varepsilon\alpha)\lambda^2}{(n+2)(n+1)n} v_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{79}$$

С учетом значений (75), (77) из (79) получаем, что ненулевые коэффициенты ряда (76) определяются соотношением

$$v_{3k+2} = \frac{3(k + \varepsilon\alpha)\lambda^2}{(3k+2)(3k+1)3k} v_{3(k-1)+2}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{80}$$

Но тогда имеем

$$v_5 = \frac{3(1+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{5 \cdot 4 \cdot 3} v_2 = \frac{3(1+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{5!}(2\lambda c_0),$$

$$v_{3k+2} = \frac{3^k (1+\varepsilon\alpha)\ldots(k+\varepsilon\alpha)\lambda^{2k}}{(3k+2)!}(2\lambda c_0), \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{81}$$

Согласно (76), (77), (80), (81) для решения (76) уравнения (74) имеем выражение

$$v_1(x) = 2\lambda x^2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda^2 x^3)^k \Gamma_k(\varepsilon\alpha)}{(3k+2)!} \right], \tag{82}$$

где через $\Gamma_k(\mu)$ обозначено произведение

$$\Gamma_k(\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\ldots(k+\mu).$$

Рассмотрим теперь однородное уравнение вида (74)

$$\varepsilon^2 v_1'' = x v_1 + 3\varepsilon\alpha \int_0^x v_1(t)\,dt. \tag{83}$$

Найдем 2 линейно независимых решения уравнения (83). Первое из них определим в виде ряда

$$v_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n, \tag{84}$$

следовательно, начальные условия определим

$$v_1(0) = 1, \quad v_1'(0) = 0. \tag{85}$$

Подставляя (84) в (83), для коэффициентов v_n ряда (84) получаем уравнение

$$v_2 = 0 \tag{86}$$

и рекуррентное соотношение (79). С учетом (85), (86) ненулевые коэффициенты ряда (84) определяются соотношением

$$v_{3k} = \frac{3(k-2/3+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{3k(3k-1)(3k-2)} v_{3(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Но тогда имеем

$$v_3 = \frac{3(1-2/3+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{3!},$$

$$v_{3k} = \frac{3^k(1-2/3+\varepsilon\alpha)\ldots(k-2/3+\varepsilon\alpha)\lambda^{2k}}{(3k)!}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{87}$$

Согласно (87) решение (84) уравнения (83) имеет вид

$$v_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda^2 x^3)^k \Gamma_k(-2/3+\varepsilon\alpha)}{(3k)!}. \tag{88}$$

Второе из линейно независимых решений уравнения (83) определим в виде

$$v_1(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n, \tag{89}$$

следовательно, положим начальные условия

$$v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 1.$$

Подставляя (89) в (83), для коэффициентов v_n ряда (89) получаем уравнения (79), (86). С учетом значений (85), (86) из (79) получаем, что ненулевые коэффициенты ряда (89) определяются соотношениями

$$v_{3k+1} = \frac{3(k-1/3+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{(3k+1)3k(3k-1)} v_{3(k-1)+1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Но тогда имеем

$$v_4 = \frac{3(1-1/3+\varepsilon\alpha)\lambda^2}{4!},$$

$$v_{3k+1} = \frac{3^k(1-1/3+\varepsilon\alpha)\ldots(k-1/3+\varepsilon\alpha)\lambda^{2k}}{(3k+1)!}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{90}$$

Согласно (90) для решения (84) имеем выражение

$$v_1(x) = x\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda^2 x^3)^k \Gamma_k(-1/3+\varepsilon\alpha)}{(3k+1)!}\right]. \tag{91}$$

Из решений (82), (88) и (91) уравнений (74), (83) можно записать общее решение уравнения (73), а используя формулы (73), и общее решение системы уравнений (71), (72) в общем случае.

В завершение отметим следующее.

Во-первых, к уравнению (83) можно применить результаты работы [7] и дать более полный анализ решений.

Во-вторых, очевидны обобщения приведенных выше результатов на случай системы более общего, чем (1), (2), вида, а именно, на случай системы

$$u' = A(x,\varepsilon)u + A_1(x,\varepsilon)v, \tag{92}$$

$$\varepsilon v' = \varepsilon B_1(x,\varepsilon)u + B(x,\varepsilon)v, \tag{93}$$

где A, A_1, B и B_1 — матрицы, голоморфные по x, ε в области

$$|x| \leq \rho, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

и такие, что при $|x| \leq \rho$ матрица $B(x,0)$ голоморфно подобна матрице

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ xa(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad a(x) \neq 0.$$

Регуляризирующее преобразование известного вида [1] легко приводит рассматриваемую систему (92), (93) к системе (92), (93) с матрицей (4)

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

К последней системе очевидным образом применим изложенный выше метод преобразования.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
3. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 250 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
6. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.
7. *Langer R. E.* The solutions of the differential equation $v''' + \lambda^2 zv' + 3\mu\lambda^2 v = 0$ // Duke Math. J. – 1955. – **22**. – P. 525 – 542.

Получено 12.07.2002