УДК 513.88

О. Я. Мильо, О. Г. Сторож (Львів. нац. ун-т)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНИЙ ОПЕРАТОР ТИПУ ШТУРМА — ЛІУВІЛЛЯ НА ПІВОСІ З ДВОТОЧКОВО-ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

We prove that the Sturm–Liouville type differential boundary operator on a semiaxis with two-point integral boundary conditions acting in the Hilbert space $L_2(0,\infty)$ is closed and densely defined. We construct an adjoint operator. We also establish criteria of maximal dissipativity and maximal accretivity of the operator considered.

Доведено замкненість та щільну визначеність вказаного у заголовку оператора, який діє в гільбертовому просторі $L_2(0,\infty)$. Побудовано спряжений оператор. Встановлено критерії максимальної дисипативності і максимальної акретивності досліджуваного оператора.

Диференціальні та диференціально-граничні оператори з різного роду некласичними крайовими умовами, а також відповідні теоретико-функціональні моделі досліджувались багатьма математиками (див. [1] і наведену там бібліографію). Одна з таких моделей запропонована в працях авторів [2–4], результати яких застосовано нижче при дослідженні оператора, зазначеного в заголовку.

У статті використовуються такі позначення: $D(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення і ядро лінійного оператора T; T^* — оператор, спряжений з T; $\mathcal{B}(X,Y)$ — сукупність лінійних неперервних операторів $A: X\to Y$ таких, що $D(A)=X$; $C(X)$ — клас замкнених щільно визначених операторів $A: X\to X$; $A\,|\,E$ — звуження відображення A на множину E; 1_X — тотожне перетворення простору X. Якщо $A: X\to Y_i$, $i=1,\ldots,n$, — лінійні оператори, то запис $A = A_1\oplus\ldots\oplus A_n$ означає, що $Ax=(A_1x,\ldots,A_nx)$.

За вихідний об'єкт приймається мінімальний оператор L_0, породжений в гільбертовому просторі $H=L_2(0,\infty)$ зі скалярним добутком $(y|z) = \int_0^\infty y(x)\overline{z(x)}\,dx$, диференціальним виразом $l[y]=-y''+p(x)y$, де $p(x)$ — неперервна, обмежена, рівномірно додатна на $[0,\infty)$ функція. Введемо в розгляд соболєвські простори $H^i \overset{\mathrm{df}}{=} W_2^i(0,\infty)$, $H_0^i \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{0}{W}{}_2^i(0,\infty)$, $i=1,2$. H^1 трактуємо як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\forall u,v\in H^1 \qquad (u|v)_e = \int_0^\infty \left(u'(x)\overline{v'(x)} + p(x)u(x)\overline{v(x)}\right)dx.$$

Відомо [5–7], що L_0 є додатно визначеним оператором з індексом дефекту $(1,1)$, $D(L_0)=H_0^2$, $D(L_0^*)=H^2$, а $H_e \overset{\mathrm{df}}{=} \left(H_0^1, (\cdot|\cdot)_e\right)$ — енергетичний простір оператора L_0.

1. Сформулюємо у вигляді лем декілька тверджень, в справедливості яких легко переконатися безпосередньою перевіркою. Для цього позначимо через $\{\omega_1(x),\omega_2(x)\}$ фундаментальну систему розв'язків рівняння $l[y]=0$ таку, що $\omega_1(0)=1$, $\omega_1\in H$, $\omega_2(0)=0$, $\omega_2'(0)=1$, і покладемо

$$\forall c\in(0,\infty) \qquad \psi_c(x) = \begin{cases} \omega_1(c)\omega_2(x), & x\le c;\\ \omega_2(c)\omega_1(x), & x\ge c, \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall y \in H^1 \quad \mathcal{P}y = y - y(0)\omega_1. \tag{2}$$

Лема 1. 1. $\psi_c \in H_e$, ψ_c' *абсолютно неперервна на* $(0, c)$ *та на* (c, ∞), $\psi_c'(c-0) - \psi_c'(c+0) = 1$.

2. $l[\psi_c] = \delta_c$, *де* $\forall y \in H_e \quad \delta_c(y) = \overline{y(c)}$.

3. $\forall y \in H_e \quad (y|\psi_c)_e = y(c)$.

Лема 2. $\mathcal{P}$ *є ортопроектором* $H^1 \to H_e$, *який анулюється на* $\ker L_0^*$, *зокрема для будь-якого* $y \in H^1$

$$(\mathcal{P}y|\psi_c)_e = (y|\psi_c)_e, \quad (\mathcal{P}y)(c) = y(c) - y(0)\omega_1(c).$$

Позначимо через $\mathrm{sp}\{\psi_c\}$ підпростір, породжений функцією ψ_c (див. (1)), через $l_{\text{кл}}[y]$ вираз $-y'' + p(x)y$, у якому всі похідні беруться в класичному сенсі, і визначимо оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0) : y(c) = 0\}, \quad L_{\min} \subset L_0,$$

$D(L_{\max}) = \{y \in H^1 : y'$ абсолютно неперервна на $(0, c)$ та на (c, ∞), $l_{\text{кл}}[y] \in$ $\in H\}$,

$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max}y = l[y].$$

Легко бачити, що

$$D(L_{\max}) = D(L_0^*) \dot{+} \mathrm{sp}\{\psi_c\}, \tag{3}$$

$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max}y = L_0^*\big(y + [y'(c+0) - y'(c-0)]\psi_c\big). \tag{4}$$

Це випливає з леми 1 і співвідношення між класичною та узагальненою похідними кусково абсолютно неперервної функції (див. [8]).

Перепишемо (3), (4) у зручному для нас вигляді. З цією метою для будь-якого $\Lambda \in \mathcal{B}(H_e, \mathfrak{h})$, де $\mathfrak{h}$ — гільбертів простір, визначимо оператор $\Lambda^0 \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}, H_e)$ виходячи з умови

$$\forall u \in H_e, \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad (\Lambda u|h)_{\mathfrak{h}} = (u|\Lambda^0 h)_e,$$

а для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}(H^1, \mathfrak{h})$ покладемо $\Lambda^0 \overset{\text{df}}{=} (\Lambda|H_e)^0$. Далі, позначимо через $\Gamma_i : D(L_0^*) \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, оператори, визначені рівностями $\Gamma_1 y = y'(0)$, $\Gamma_2 y = y(0)$, а через $\Psi : H^1 \to \mathbb{C}$ оператор, визначений рівністю $\Psi y = y(c)$.

Нарешті, введемо у розгляд оператори $\Gamma_i^{(\Psi)}$, $\Gamma_i^{[\Psi]} : D(L_{\max}) \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3, 4$, такі, що

$$\Gamma_3^{(\Psi)}y = y'(c+0) - y'(c-0), \quad \Gamma_4^{(\Psi)}y = \Psi\mathcal{P}y \quad (\text{див. } (2)),$$

$$\Gamma_1^{(\Psi)}y = \Gamma_1(y + \Psi^0\Gamma_3^{(\Psi)}y), \quad \Gamma_2^{(\Psi)}y = \Gamma_2(y + \Psi^0\Gamma_3^{(\Psi)}y),$$

$$\Gamma_1^{[\Psi]}y = y'(0), \quad \Gamma_2^{[\Psi]}y = y(0), \quad \Gamma_3^{[\Psi]}y = \Gamma_3^{(\Psi)}y, \quad \Gamma_4^{[\Psi]}y = \Psi y.$$

З леми 2 випливає, що для будь-якого $a \in \mathbb{C}$ $\Psi_a^0 = a\psi_c$, так що

$$D(L_{\max}) = D(L_0^*) + R(\Psi^0), \tag{5}$$

$$\forall y \in D(L_{\max}) \quad L_{\max}y = L_0^*(y + \Psi^0\Gamma_3^{(\Psi)}y). \tag{6}$$

Лема 3. 1. $L_{\min}$, $L_{\max} \in C(H)$ і $L_{\min}^* = L_{\max}$.

2. $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1^{[\Psi]} \oplus \Gamma_3^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]} \oplus \Gamma_4^{[\Psi]})$ — *простір граничних значень (ПГЗ) оператора* $L_{\min}$.

У справедливості цього твердження неважко переконатися безпосередньою перевіркою. Можна також використати теорему 1 з [2], виходячи з якої і з того, що $(\mathbb{C}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — ПГЗ оператора L_0, та беручи до уваги (5), (6), приходимо до висновку, що $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3^{(\Psi)}, \Gamma_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_4^{(\Psi)})$ — ПГЗ оператора $L_{\min}$. Тому для завершення доведення досить скористатися тим, що, як легко бачити,

$$\Gamma_1^{[\Psi]} = \Gamma_1^{(\Psi)} - \omega_1(c)\Gamma_3^{(\Psi)}, \qquad \Gamma_2^{[\Psi]} = \Gamma_2^{(\Psi)},$$
$$\Gamma_3^{[\Psi]} = \Gamma_3^{(\Psi)}, \qquad \Gamma_4^{[\Psi]} = \Gamma_4^{(\Psi)} + \omega_1(c)\Gamma_2^{(\Psi)}. \tag{7}$$

Зазначимо, що поняття ПГЗ введено в [9] (див. також [5]).

2. Опишемо тепер основний об'єкт нашого дослідження. Нехай $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^2$, $\bar{A} = (\bar{\alpha}_{ij})_{i,j=1}^2$ — (невироджені) матриці, елементами яких є комплексні числа, причому

$$AJ\bar{A}^* = J, \tag{8}$$

де

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$u_i(y) = \alpha_{i1}y'(0) + \alpha_{i2}y(0),$$

$$\bar{u}_i(z) = \bar{\alpha}_{i1}z'(0) + \bar{\alpha}_{i2}z(0) \quad (i = 1, 2;\ y, z \in D(L_{\max})), \quad \text{а} \quad \varphi \in H.$$

Нехай

$$D(T) = \{y \in D(L_{\max}) : u_1(y) = y(c) + (y|\varphi),\ u_2(y) = y'(c+0) - y'(c-0)\},$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = l_{\text{кл}}[y] + u_2(y)\varphi,$$

або, що еквівалентно,

$$D(T) = \{y \in H : y + u_2(y)\psi_c \in H^2,\ u_1(y) = y(c) + (y|\varphi)\},$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = l[y + u_2(y)\psi_c] + u_2(y)\varphi.$$

Теорема 1. $T \in C(H)$,

$$D(T^*) = \{z \in H : z + \bar{u}_2(z)\psi_c \in H^2,\ \bar{u}_1(z) = z(c) + (z|\varphi)\}, \tag{10}$$

$$\forall z \in D(T^*) \quad T^*z = l[z + \bar{u}_2(z)\psi_c] + \bar{u}_2(z)\varphi. \tag{11}$$

Доведення. Нехай

$$U_i = \alpha_{i1}\Gamma_1 + \alpha_{i2}\Gamma_2, \qquad \bar{U}_i = \bar{\alpha}_{i1}\Gamma_1 + \bar{\alpha}_{i2}\Gamma_2,$$

$$U_i^{[\Psi]} = \alpha_{i1}\Gamma_1^{[\Psi]} + \alpha_{i2}\Gamma_2^{[\Psi]}, \qquad \bar{U}_i^{[\Psi]} = \bar{\alpha}_{i1}\Gamma_1^{[\Psi]} + \bar{\alpha}_{i2}\Gamma_2^{[\Psi]}, \quad i = 1, 2.$$

Зрозуміло, що

$$D(T) = \{y \in D(L_{\max}) : U_1^{[\Psi]}y - \Gamma_4^{[\Psi]}y = \Phi y,\ U_2^{[\Psi]}y = \Gamma_3^{[\Psi]}y\}, \tag{12}$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = L_{\max}y + \Phi^*U_2^{[\Psi]}y, \tag{13}$$

де $\Phi y = (y|\varphi)$. Звідси випливає, що T споріднений з парою $(L_{\max}, L_{\min})$ в сенсі [10], а тому $T \in C(H)$. Далі, нехай

$$D(\tilde{T}) = \{ z \in D(L_{\max}) \colon \tilde{U}_1^{[\Psi]}z - \Gamma_4^{[\Psi]}z = \Phi z,\ \tilde{U}_2^{[\Psi]}z = \Gamma_3^{[\Psi]}z \}, \tag{14}$$

$$\forall z \in D(\tilde{T}) \qquad \tilde{T}z = L_{\max}z + \Phi^* U_2^{[\Psi]}z. \tag{15}$$

Виходячи з (12), (13) і міркуючи так, як при доведенні теореми 2 з [2] (використовуючи, однак, лему 3 замість теореми 1 із згаданої праці), переконуємося, що $T^* = \tilde{T}$. Таким чином, справедливість теореми випливає з еквівалентності співвідношень (10), (11) та (14), (15).

3. Нагадаємо, що лінійний оператор $T \colon H \to H$ називається дисипативним (акретивним), якщо $\forall y \in D(T)$ $\operatorname{Im}(Ty|y) \geq 0$ $(\operatorname{Re}(Ty|y) \geq 0)$, і максимально дисипативним (максимально акретивним), якщо, крім цього, він не має в H дисипативних (акретивних) розширень.

Теорема 2. *Оператор T максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли $AJA^* \leq J$, де J визначено згідно з* (9).

Доведення. Покладемо

$$U = U_1 \oplus U_2, \qquad \tilde{U} = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2,$$

$$U^{[\Psi]} = U_1^{[\Psi]} \oplus U_2^{[\Psi]}, \qquad \tilde{U}^{[\Psi]} = \tilde{U}_1^{[\Psi]} \oplus \tilde{U}_2^{[\Psi]}.$$

З (8) випливає, що $U = -iUL_0^* U' J \tilde{U}$ (див. [11]), а отже,

$$U^{[\Psi]} = -iUL_0^* U' J \tilde{U}^{[\Psi]}, \tag{16}$$

де оператор U' визначається виходячи з умови

$$\forall y \in D(L_0^*), \qquad \forall h \in \mathbb{C}^2 \qquad (Uy\,|\,h)_{\mathbb{C}^2} = \big(y\,|\,U'h\big) + \big(L_0^* y\,|\,L_0^* U'h\big).$$

Беручи до уваги (16) та теорему 1 і міркуючи так, як при доведенні лем 1 та 2 з [3], переконуємось у тому, що

$$\forall z \in D(T^*) \qquad 2\operatorname{Im}(T^*z\,|\,z) = \big(-iUL_0^* U'h\,|\,h\big)_{\mathbb{C}^2} - (Jh\,|\,h)_{\mathbb{C}^2},$$

де $h = J\tilde{U}^{[\Psi]}z$, і

$$\Big\{ h = J\tilde{U}^{[\Psi]}z \colon z \in D(T^*) \Big\} = \mathbb{C}^2.$$

Таким чином, $-T^*$ є дисипативним тоді і тільки тоді, коли $-iUL_0^* U' \leq J$. Для завершення доведення досить повторити міркування, використані в [3] при доведенні теореми 3.

Зауваження 1. Дещо інший підхід до встановлення умов дисипативності скінченновимірних збурень диференціальних операторів з некласичними крайовими умовами запропоновано в [12].

4. Перш ніж переходити до встановлення умов максимальної акретивності оператора T, покладемо

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + \alpha_{11}\omega_1'(0) \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \alpha_{21}\omega_1'(0) \end{pmatrix}$$

і зазначимо, що $(\mathbb{C}, \Gamma_1 - \omega_1(0)\Gamma_2, \Gamma_2)$ є позитивним ПГЗ оператора L_0, який відповідає його розширенню за Фрідріхсом $L_F = L_0^* \,|\, \ker\Gamma_2$ (детальніше див. [5, 6, 13]).

Далі, нехай $\chi = \psi_c + L_F^{-1}\varphi$,

$$b_1 \overset{\mathrm{df}}{=} (\omega|\chi)_e = \omega_1(c) + (\omega_1|\varphi), \quad b_2 \overset{\mathrm{df}}{=} (\chi|\chi)_e = \chi(c) + (\chi|\varphi),$$

$$\forall h_1, h_2 \in \mathbb{C} \quad F(h_1, h_2) = b_1\bar{a}_{11}h_1 + (1 + b_1\bar{a}_{21})h_2,$$

$$\mathcal{Y} = -(\hat{A}\mathfrak{X}\hat{A}^* + \mathfrak{X}^*), \quad \mathcal{F} = \frac{F^*F}{b_2}.$$

Теорема 3. *Оператор* T *максимально акретивний (максимально невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{F} + \operatorname{Re}\mathcal{Y} \ge 0$ *(відповідно* $\mathcal{F} + \mathcal{Y} \ge 0$*).*

Доведення. Для будь-якого $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2$ покладемо

$$D_h = \{z \in D(L_{\max}) : z + h_1\chi \in H^2, z'(0) - \omega_1'(0)z(0) = \\ = -(\bar{a}_{12}h_1 + \bar{a}_{22}h_2, z(c) + (z|\varphi)) = -h_2\}.$$

Виявляється, що $D(T^*) = \bigcup_{h \in \mathbb{C}^2} D_h$ і для будь-якого $z \in D_h$

$$\hat{u}_2(z) = h_1, \quad (T^*z|z) = (L_F\hat{\mathcal{P}}z|\hat{\mathcal{P}}z) + ((\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)h|h)_{\mathbb{C}^2},$$

де

$$\hat{\mathcal{P}}z = z + \hat{u}_2(z)\chi - z(0)\omega_1, \quad \mathcal{Y}_1 = -(\hat{A}\mathfrak{X}\hat{A}^* + \mathfrak{X}),$$

$$\mathcal{Y}_2 = 2\operatorname{Re}\begin{pmatrix} b_1\bar{a}_{11} & b_1\bar{a}_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Крім цього,

$$\hat{\mathcal{P}}D_h = \{u \in D(L_F) : u'(0) = -(\bar{a}_{12}h_1 + \bar{a}_{22}h_2) + \bar{b}_1h_1, u(c) + (u|\varphi) = -(F + F_0)h\},$$

де

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{C}^2 \quad F_0h = -b_2h_1, \quad \text{а} \quad \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \frac{(F + F_0)^*(F + F_0)}{b_2} = \mathcal{Y} + \mathcal{F}.$$

Доведення цих фактів істотно не відрізняється від доведень лем 1–4 з [4] (потрібно тільки замінити $\Psi\mathcal{P}$ та $\tilde{\mathcal{U}}_i^{[\Psi]}$ відповідно на Ψ та $\tilde{\mathcal{U}}_i^{[\Psi]}$ і врахувати (7); слід також мати на увазі, що в розглядуваній ситуації $\forall h \in \mathbb{C}$ $b_1h = \mathrm{X}Z \cdot h$, де $Z \cdot h = h\omega_1$, а $b_2h = (\mathrm{X}\mathrm{X}^0)h$).

Міркуючи далі так, як при доведенні теореми 1 згаданої праці, переконуємося, що оператор T^*, а отже й T, є (максимально) акретивним тоді і тільки тоді, коли

$$\forall h \in \mathbb{C}^2 \quad \inf_{z \in D_h}(L_F\hat{\mathcal{P}}z|\hat{\mathcal{P}}z) + \operatorname{Re}((\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)h|h)_{\mathbb{C}^2} = ((\mathcal{F} + \operatorname{Re}\mathcal{Y})h|h)_{\mathbb{C}^2} \ge 0.$$

Твердження щодо максимальної невід'ємності оператора T доводиться аналогічно.

Зауваження 2. Результати цієї статті переносяться на ширші класи операторів. Конкретніше, нехай $\chi_1, \chi_2 \in H^1$, причому χ_1', χ_2' абсолютно неперервні в околі нуля, а u_1, u_2 такі, як вище. Визначимо оператор T за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{ y \in H : y + u_2(y)\chi_2 \in H^2 : u_1(y) = (y|\chi_1)_e \}, \tag{17}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = l[y + u_2(y)\chi_2]. \tag{18}$$

Неважко довести, що $T \in C(H)$, і побудувати спряжений оператор T^*. У припущенні (яке не призводить до втрати загальності), що $\chi_1 = \chi_2$, можна, використовуючи схему досліджень, запропоновану в [3] (див. також [11]), встановити умову максимальної дисипативності оператора T. Виходячи з результатів, викладених в [4], і беручи до уваги співвідношення типу (7), неважко описати всі максимально акретивні оператори вигляду (17), (18) (щоправда, у випадку, коли $\chi_1 = \chi_2$ або коли одна з цих функцій є нульовою).

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1299 – 1313.
2. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Про умови взаємної спряженості одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора // Мат. студ.: Праці Львів. мат. т-ва. – 1995. – Вип. 4. – С. 67 – 74.
3. *Mylyo O. Ya., Storozh O. G.* Selfadjointness and maximal dissipativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positively defined operator // Mat. Stud. – 1997. – **7**, № 1. – P. 97 – 102.
4. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Умови максимальної акретивності та максимальної невід'ємності одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 1. – С. 90 – 100.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
6. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
9. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41 – 48.
10. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1972. – **16**. – С. 165 – 186.
11. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
12. *Кочубей А. Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 3. – С. 425 – 434.
13. *Кочубей А. Н.* Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168 – 171.

Одержано 10.04.2001