УДК 517.937

В. А. Літовченко (Чернівец. нац. ун-т)

ЦІЛКОВИТА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ У ПРОСТОРАХ ТИПУ S ДЛЯ РІВНЯНЬ, ПАРАБОЛІЧНИХ ЗА ПЕТРОВСЬКИМ

We establish the correct solvability (in both ways) in S-type spaces of a Cauchy problem for the equations parabolic according to Petrovs'kyi with coefficients that depend on time. We also prove the property of stabilization to zero of solution of the given problem in the sense of topology of these spaces.

Встановлено коректну розв'язність (в обидва боки) у просторах типу S задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часу, а також доведено властивість стабілізації до нуля розв'язку даної задачі у сенсі топології цих просторів.

Вступ. Питання про розв'язність задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь розглядалося багатьма авторами у випадку звичайних початкових функцій, у класах узагальнених функцій скінченного порядку вивчалося Ю. Н. Дрожжіновим, С. Д. Ейдельманом, Ю. М. Галицьким, Б. І. Зав'яловим та іншими. В. В. Городецькому [1] вдалося з'ясувати, що ця задача є коректно розв'язною уже у просторах узагальнених функцій нескінченного порядку (ультрарозподілів Жевре).

Зрозуміло, що з певним розширенням класів початкових функцій, загалом, відбувається втрата певних „хороших" властивостей розв'язків цієї задачі (зокрема, тих, які є визначальними для її фундаментального розв'язку). Тому природними є задачі на відшукання таких підкласів початкових функцій, які б забезпечували не лише існування та єдиність розв'язку задачі Коші, а і наявність потрібних властивостей у цього розв'язку.

У даній роботі вивчається питання про знаходження усіх початкових даних задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часу, при яких вона є коректно розв'язною, причому її розв'язок має ті ж властивості гладкості і ту ж поведінку при наближенні просторової змінної до нескінченності, що і фундаментальний розв'язок. Також доводиться властивість стабілізації до нуля розв'язку даної задачі у сенсі топології просторів типу S.

1. Простори типу S. Нехай $\mathbb{R}^2$ — двовимірний евклідів простір, $x = (x_1; x_2)$, $y = (y_1; y_2)$ — його елементи, $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = (x, y)^{1/2}$, a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}^2$. Для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,\Big|\, \exists A > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^2\ \exists c_k > 0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+^2\ \forall x \in \mathbb{R}^2:$$

$$\left|x^q D_x^{|k|}\varphi(x)\right| \le c_k A^{|q|} q^{\alpha q}\Big\},$$

$$S^\beta = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,\Big|\, \exists B > 0\ \forall q \in \mathbb{Z}_+^2\ \exists c_q > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^2\ \forall x \in \mathbb{R}^2:$$

$$\left|x^q D_x^{|k|}\varphi(x)\right| \le c_q B^{|k|} k^{\beta k}\Big\},$$

$$S_\alpha^\beta = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,\Big|\, \exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^2\ \forall x \in \mathbb{R}^2:$$

$$\left|x^q D_x^{|k|}\varphi(x)\right| \le c A^{|q|} B^{|k|} k^{\beta k} q^{\alpha q}\Big\}$$

(тут і далі $|n| = n_1 + n_2$, $n \in \mathbb{Z}_+^2$, a $n^{\gamma n} = n_1^{\gamma n_1} n_2^{\gamma n_2}$, $\gamma > 0$).

Відмітимо, що $S_\alpha^\beta = S_\alpha \bigcap S^\beta$. Ці простори було побудовано І. М. Гельфандом і Г. Є. Шиловим [2] і названо ними просторами типу S, де S — відомий простір Л. Шварца [3].

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і складаються з тих і тільки тих $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, які задовольняють нерівність

$$\left| D_x^{|k|}\varphi(x) \right| \leq cA^{|k|}k^{\beta k}e^{-\delta\|x\|^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

з деякими додатними сталими c, A і δ, які залежать тільки від функції φ, а $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \varphi$ у просторі S_α^β (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{S_\alpha^\beta} \varphi$), де $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_\alpha^\beta$ тоді і тільки тоді, коли [2]:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2: D_x^{|k|}\varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} D_x^{|k|}\varphi(x)$ рівномірно по x на довільному компакті $K \subset \mathbb{R}^2$;

2) $\exists c > 0 \quad \exists A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall \{k; q\} \in \mathbb{Z}_+^2 \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2: \ \left| x^q D_x^{|k|}\varphi_\nu(x) \right| \leq \leq cA^{|q|}B^{|k|}k^{\beta k}q^{\alpha q}$.

Далі, нехай $b \in \mathbb{N}$, $\alpha = (2b)^{-1}$, $\beta \geq 1 - (2b)^{-1}$, $\Phi \in \{S_\alpha; S_\alpha^\beta\}$, $P(t, x) = \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t)x^k$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}_+^2$, а $a_k(\cdot)$ — визначені на $(0; +\infty)$, обмежені за модулем, комплекснозначні функції такі, що

$$\exists \rho > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2: \quad \operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} a_k(t)(ix)^k \leq -\rho\|x\|^{2b}, \quad i^2 = -1. \tag{1}$$

Справедливі такі допоміжні твердження.

Лема 1.

$$\forall \rho_1 \in (0; \rho) \quad \exists \delta^* > 0 \quad \exists d \geq 1 \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \|x\| > d:$$

$$\operatorname{Re} P(t, ix) + \rho_1\|x\|^{2b} \leq -\delta^*\|x\|^{2b}.$$

Доведення. Дійсно, згідно з умовою (1)

$$\operatorname{Re} P(t, ix) + \rho_1\|x\|^{2b} \leq -\left(\rho - \rho_1 - \sum_{|k|<2b}\left(\sup_{t>0}\{|a_k(t)|\}\frac{1}{\|x\|^{2b-|k|}}\right)\right)\|x\|^{2b} \leq$$

$$\leq -\left(\rho - \rho_1 - \frac{1}{\|x\|}\sum_{|k|<2b}\sup_{t>0}\{|a_k(t)|\}\right)\|x\|^{2b}, \quad \|x\| \geq 1, \quad t > 0.$$

Звідси, поклавши

$$d = \max\left\{1; \frac{1}{\rho - \rho_1}\sum_{|k|<2b}\sup_{t>0}\{|a_k(t)|\}\right\},$$

отримаємо твердження леми 1.

Лема 2. *Для кожного фіксованого* $\delta > 0$ *функція*

$$\theta_\delta(x) = \exp\left\{\int_0^\delta P(\tau, ix)d\tau\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

належить простору $S_{(2b)^{-1}}^{1-(2b)^{-1}}$.

Доведення. Оскільки функція θ_δ, $\delta > 0$, є нескінченно диференційовною, то для доведення леми досить показати, що

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \exists c > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2:$$

$$\left|D_x^{|k|}\theta_\delta(x)\right| \le cA^{|k|}k^{k(1-(2b)^{-1})}e^{-\delta_1\|x\|^{2b}}.$$

Виходячи з відомої формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_x^{k_1}f(\varphi(x)) = \sum_{p_1}^{k_1}\frac{k_1!}{q_1!\,j_1!\ldots h_1!}\frac{d^{p_1}f(\varphi)}{d\varphi^{p_1}}\left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^{q_1}\left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^{j_1}\ldots\left(\frac{d^{L_1}\varphi(x)}{L_1!dx^{L_1}}\right)^{h_1},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad k_1 \in \mathbb{Z}_+$$

(тут знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $k_1 = q_1 + 2j_1 + \ldots + L_1h_1$, а число $p_1 = q_1 + j_1 + \ldots + h_1$), одержуємо

$$\forall\{k_1; k_2\} \subset \mathbb{Z}_+ : \left|D_{x_1,x_2}^{k_1+k_2}\theta_\delta(x)\right| \le \sum_{p_1}^{k_1}\frac{k_1!}{q_1!\,j_1!\ldots h_1!}\sum_{j=0}^{k_2}C_{k_2}^j\left|D_{x_2}^j\hat{P}(\delta, ix)\right|\left|D_{x_2}^{k_2-j}\theta_\delta(x)\right|,$$

$$\delta > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

де C_m^n — коефіцієнт бінома, а

$$\hat{P}(\delta, ix) \equiv \left(\int_0^\delta \frac{\partial P(\tau, ix)d\tau}{1!\partial x_1}\right)^{q_1}\left(\int_0^\delta \frac{\partial^2 P(\tau, ix)d\tau}{2!\partial x_1^2}\right)^{j_1}\ldots\left(\int_0^\delta \frac{\partial^{L_1}P(\tau, ix)d\tau}{L_1!\partial x_1^{L_1}}\right)^{h_1}.$$

Скориставшись ще раз формулою Фаа де Бруно, знайдемо

$$\forall l \in \mathbb{Z}_+ : \left|D_{x_2}^l\theta_\delta(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{p_2}^{l}\frac{l!}{q_2!\,j_2!\ldots h_2!}|\theta_\delta(x)|\left(\int_0^\delta\left|\frac{\partial P(\tau, ix)}{1!\partial x_2}\right|d\tau\right)^{q_2}\ldots\left(\int_0^\delta\left|\frac{\partial^{L_2}P(\tau, ix)}{L_2!\partial x_2^{L_2}}\right|d\tau\right)^{h_2},$$

$$\delta > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

де $p_2 = q_2 + j_2 + \ldots + h_2$, а $l = q_2 + 2j_2 + \ldots + L_2h_2$.

Далі,

$$\int_0^\delta\left|\frac{\partial^\nu P(\tau, ix)}{\nu!\partial x_2^\nu}\right|d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{\nu!}\sum_{|r|\le 2b}\int_0^\delta|a_r(\tau)|d\tau|x_1|^{r_1}\left(\begin{cases}\dfrac{r_2!}{(r_2-\nu)!}|x_2|^{r_2-\nu}, & r_2 \ge \nu,\\ 0, & r_2 < \nu\end{cases}\right) \le$$

$$\leq \ \delta 2^{2b} \Upsilon \left(\begin{cases} \left(\begin{cases} \| x \|^{2b-\nu}, & \| x \| > d, \\ d^{2b-\nu}, & \| x \| \leq d \end{cases} \right), & 2b \geq \nu, \\ 0, & 2b < \nu \end{cases} \right) \tag{3}$$

для $\delta > 0$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}^2$, $d \geq 1$ і $\Upsilon \equiv \sum_{|r| \leq 2b} \sup_{t > 0} \{ |a_r(t)| \}$.

Звідси, врахувавши твердження леми 1, а також нерівності

$$\frac{l!}{q_2!\,(j_2!)^2 \ldots (h_2!)^{L_2}} \ \leq \ 2^{L_2 l}, \qquad \sum_{p_2}^{l} 1 \ \leq \ (2e)^l,$$

де $p_2 = q_2 + j_2 + \ldots + h_2$, а $l = q_2 + 2j_2 + \ldots + L_2 h_2$, отримаємо

$$\left| D_{x_2}^l \theta_\delta(x) \right| \ \leq \ \sum_{p_2}^{l} \frac{l!}{q_2!\, j_2! \ldots h_2!} \exp\left\{ \int_0^\delta \left(\operatorname{Re} \mathrm{P}(\tau, ix) + \rho_1 \| x \|^{2b} \right) d\tau \right\} e^{-\delta \rho_1 \| x \|^{2b}} \times$$

$$\times \ (\delta 2^{2b} \Upsilon)^{p_2} \left(\begin{cases} \left(\begin{cases} \| x \|^{2bp_2 - l}, & \| x \| > d, \\ d^{2bp_2 - l}, & \| x \| \leq d \end{cases} \right), & 2b \geq L_2, \\ 0, & 2b < L_2 \end{cases} \right) \leq \ e^{\delta \Upsilon d^{2b}} \left((2d)^{2b} \left(\overline{\frac{1}{\rho_1}} \right) \delta^{1/2b} \overline{\Upsilon} \right)^l \times$$

$$\times \ e^{-\delta \rho^* \| x \|^{2b}} \sum_{p_2}^{l} \frac{l!\, l^{l - p_2}}{q_2!\,(j_2!)^2 \ldots (h_2!)^{L_2}} \left(\begin{cases} \sup\limits_{t > 0} \left\{ t^{p_2 - l/2b} e^{-t} \right\}, & 2b \geq L_2, \\ 0, & 2b < L_2 \end{cases} \right) \leq$$

$$\leq \ e^{\delta \Upsilon d^{2b}} \left((2^2 d)^{2b} 2e \left(\overline{\frac{1}{\rho_1}} \right) \delta^{1/2b} \overline{\Upsilon} \right)^l l^{(1 - 1/2b) l} e^{-\delta \rho^* \| x \|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

де $d \geq 1$, $\overline{A} \equiv \begin{cases} A, & A > 1, \\ 1, & A \leq 1, \end{cases}$ а $\rho^* \equiv \min\{\rho; \delta^*\}$.

Оскільки для $\delta > 0$, $\{l; L\} \subset \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}^2$ і $d \geq 1$

$$\left| \int_0^\delta \frac{\partial^{L+l} \mathrm{P}(\tau, ix)}{L!\, l!\, \partial x_1^L \partial x_2^l} d\tau \right| \ \leq \ \delta 2^{2b} \Upsilon \left(\begin{cases} \left(\begin{cases} \| x \|^{2b - (l+L)}, & \| x \| > d, \\ d^{2b - (l+L)}, & \| x \| \leq d \end{cases} \right), & 2b \geq L + l, \\ 0, & 2b < L + l \end{cases} \right),$$

то, взявши до уваги нерівність $\dfrac{(q + j + \ldots + \mu)!}{q!\, j! \ldots \mu!} \leq 2^{q + 2j + \ldots + s\mu}$ і скориставшись оцінками типу (3), для всіх $\{\nu; h\} \subset \mathbb{Z}_+$ одержимо

$$\left| D_{x_2}^\nu \left(\left(\int_0^\delta \frac{\partial^L \mathrm{P}(\tau, ix)}{L!\, \partial x_1^L} d\tau \right)^h \right) \right| \ \leq \ \sum_{p}^{\nu} \frac{\nu!}{q!\, j! \ldots \mu!} \left(\begin{cases} \dfrac{h!}{(h-p)!} \left| \displaystyle\int_0^\delta \frac{\partial^L \mathrm{P}(\tau, ix)}{L!\, \partial x_1^L} d\tau \right|^{h-p}, & h \geq p, \\ 0, & h < p \end{cases} \right) \times$$

$$\times \left| \int_0^\delta \frac{\partial^{L+1} \mathrm{P}(\tau, ix)}{L!\, \partial x_1^L \partial x_2} d\tau \right|^q \ldots \left| \int_0^\delta \frac{\partial^{L+s} \mathrm{P}(\tau, ix)}{L!\, s!\, \partial x_1^L \partial x_2^s} d\tau \right|^\mu \ \leq \ \sum_{p}^{\nu} \frac{\nu!}{q! \ldots \mu!} \times$$

$$\times\left(\begin{cases}\left(\dfrac{h!}{(h-p)!}(\delta 2^{2b}\Upsilon)^{h-p}\begin{cases}\|x\|^{(2b-L)(h-p)}, & \|x\|>d,\\ d^{(2b-L)(h-p)}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2b\ge L \text{ та } h\ge p,\\ 0, \quad 2b<L \text{ та } h<p\end{cases}\right)\times$$

$$\times(\delta 2^{2b}\Upsilon)^{p}\left(\begin{cases}\left(\begin{cases}\|x\|^{(2b-L)p-\nu}, & \|x\|>d,\\ d^{(2b-L)p-\nu}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2b\ge L+s,\\ 0, \quad 2b<L+s\end{cases}\right)\le \nu!(\delta 2^{2b+1}\Upsilon)^{h}(4e)^{\nu}\times$$

$$\times\left(\begin{cases}\left(\begin{cases}\|x\|^{(2b-L)h-\nu}, & \|x\|>d,\\ d^{(2b-L)h-\nu}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2b\ge L+\nu,\\ 0, \quad 2b<L+\nu\end{cases}\right),\quad \nu=q+2j+\ldots+s\mu,\quad p=q+j+\ldots+\mu. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\hat{\mathrm{P}}(\cdot,ix)$ — ціла функція відносно змінної x_2, степінь якої не перевищує $2bp_1$, тому $D_{x_2}^{j}\hat{\mathrm{P}}(\delta,ix)=0$ для всіх $j>2bp_1$, $\delta>0$ і $x\in\mathbb{R}^2$. Отже,

$$\left|D_{x_2}^{j}\hat{\mathrm{P}}(\delta,ix)\right|\le$$

$$\le\sum_{\nu_1=0}^{j}C_j^{\nu_1}\left|D_{x_2}^{j-\nu_1}\left(\left(\int_0^{\delta}\frac{\partial \mathrm{P}(\tau,ix)}{\partial x_1}d\tau\right)^{q_1}\right)\right|\sum_{\nu_2=0}^{\nu_1}C_{\nu_1}^{\nu_2}\left|D_{x_2}^{\nu_1-\nu_2}\left(\left(\int_0^{\delta}\frac{\partial^2 \mathrm{P}(\tau,ix)}{2!\,\partial x_1^2}d\tau\right)^{j_1}\right)\right|\ldots$$

$$\ldots\sum_{\nu_{L_1-1}=0}^{\nu_{L_1-2}}C_{\nu_{L_1-2}}^{\nu_{L_1-1}}\left|D_{x_2}^{\nu_{L_1-2}-\nu_{L_1-1}}\left(\left(\int_0^{\delta}\frac{\partial^{L_1-1}\mathrm{P}(\tau,ix)}{(L_1-1)!\,\partial x_1^{L_1-1}}d\tau\right)^{\mu_1}\right)\right|\left|D_{x_2}^{\nu_{L_1-1}}\left(\left(\int_0^{\delta}\frac{\partial^{L_1}\mathrm{P}(\tau,ix)}{L_1!\,\partial x_1^{L_1}}d\tau\right)^{h_1}\right)\right|\le$$

$$\le j!(\delta 2^{2b+1}\Upsilon)^{p_1}(2^2e)^{j}\left(\sum_{\nu_1=0}^{j}\sum_{\nu_2=0}^{\nu_1}\ldots\sum_{\nu_{2b-1}=0}^{\nu_{2b-2}}1\right)\left(\begin{cases}\left(\begin{cases}\|x\|^{2bp_1-k_1-j}, & \|x\|>d,\\ d^{2bp_1-k_1-j}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2bp_1\ge k_1+j,\\ 0, \quad 2bp_1<j \text{ або } 2bp_1<k_1+j\end{cases}\right),$$

$$j\in\mathbb{Z}_+,\quad \delta>0,\quad x\in\mathbb{R}^2. \tag{6}$$

Звідси та з нерівностей (2) і (4), урахувавши те, що

$$\sum_{\nu_1=0}^{j}\sum_{\nu_2=0}^{\nu_1}\ldots\sum_{\nu_{2b-1}=0}^{\nu_{2b-2}}1\le 2^{2b(j+1)},$$

а також, що

$$\frac{k_1!\,j!}{q_1!\,j_1!\ldots h_1!}\delta^{p_1-\frac{j}{2b}}e^{-\delta\frac{\rho^*}{2}\|x\|^{2b}}\left(\begin{cases}\left(\begin{cases}\|x\|^{2bp_1-k_1-j}, & \|x\|>d,\\ d^{2bp_1-k_1-j}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2bp_1\ge k_1+j,\\ 0, \quad 2bp_1<j \text{ або } 2bp_1<k_1+j\end{cases}\right)\le$$

$$\le\frac{k_1!\,j!\,p_1^{p_1-k_1}}{q_1!\,(j_1!)^2\ldots(h_1!)^{L_1}}\bar{\delta}^{\frac{k_1}{2b}}\left(\frac{2}{\rho^*}\right)^{k_1}\left(\begin{cases}\left(\begin{cases}\left(p_1-\dfrac{k_1+j}{2b}\right)^{\left(p_1-\frac{k_1+j}{2b}\right)}, & \|x\|>d,\\ d^{2bp_1-k_1-j}, & \|x\|\le d\end{cases}\right), & 2bp_1\ge k_1+j,\\ 0, \quad 2bp_1<j \text{ або } 2bp_1<k_1+j\end{cases}\right)\le$$

$$\le\begin{cases}(2bp_1)^{\left(1-\frac{1}{2b}\right)k_1}(2bp_1)^{-\frac{j}{2b}}j^{j}, & 2bp_1\ge k_1+j,\\ 0, \quad 2bp_1<j \text{ або } 2bp_1<k_1+j\end{cases}2^{L_1k_1}\bar{\delta}^{\frac{k_1}{2b}}\left(\frac{2}{\rho^*}\right)^{k_1}d^{2bp_1-k_1-j}\le$$

$$\leq \; (2^{1+2b}b)^{k_1} \, \overline{\delta}^{\frac{k_1}{2b}} \left(\frac{\overline{2}}{\rho^*}\right)^{k_1} d^{2b\rho_1 - k_1 - j} \left(k_1^{\;k_1} j^{\;j}\right)^{\left(1-\frac{1}{2b}\right)}$$

(тут $L_1 \leq 2b$, тому що інакше вихідний вираз тотожно дорівнює нулеві (див. (5))), одержимо

$$\left| D_{x_1,x_2}^{k_1+k_2} \theta_\delta(x) \right| \leq \; e^{\delta \Upsilon d^{2b}} 2^{2b} \left(b 2^{5+6b} d^{2b} e^2 \left(\frac{\overline{1}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\overline{2}}{\rho^*}\right) \overline{\delta}^{\frac{k_1}{2b}} \overline{\Upsilon} \right)^{k_1+k_2} \times$$

$$\times \left(k_1^{\;k_1} k_2^{\;k_2}\right)^{\left(1-\frac{1}{2b}\right)} e^{-\delta \frac{\rho^*}{2} \|x\|^{2b}}, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

де $\{k_1; k_2\} \subset \mathbb{Z}_+$, $d \geq 1$, $\delta > 0$, що й потрібно було довести.

Лема 3. *Нехай* $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, *а* $\hat{\theta}_\delta(x) = \exp\left\{-\int_0^\delta \mathrm{P}(\tau, ix)\, d\tau\right\}$. *Тоді*

$$\forall \varphi \in \Phi \;\; \exists \delta_0' \in (0;1) \;\; \forall \delta_1 \in (0; \delta_0') : \; \hat{\theta}_{\delta_1}(\cdot)\, \varphi(\cdot) \in \Phi.$$

Доведення. Вважатимемо спочатку, що $\Phi = S_\alpha^\beta$. Тоді якщо $\varphi \in \Phi$, то досить довести, що

$$\exists \delta > 0 \;\; \exists \delta_0' \in (0;1) \;\; \forall \delta_1 \in (0; \delta_0') \;\; \exists c > 0 \;\; \exists A > 0 \;\; \forall l \in \mathbb{Z}_+^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\left| D_x^{|l|} \left(\hat{\theta}_{\delta_1}(x)\, \varphi(x) \right) \right| \leq \; c A^{|l|} l^{l\beta} e^{-\delta \|x\|^{2b}}. \tag{8}$$

Для довільного $l \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\left| D_x^{|l|} \left(\hat{\theta}_{\delta_1}(x)\, \varphi(x) \right) \right| \leq \; \sum_{|k|=0}^{|l|} C_l^k \left| D_x^{|k|} \hat{\theta}_{\delta_1}(x) \right| \left| D_x^{|l-k|} \varphi(x) \right|, \qquad \delta_1 > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

і оскільки $\varphi \in \Phi$, то

$$\exists \delta_0 > 0 \;\; \exists c_1 > 0 \;\; \exists A_1 > 0 \;\; \forall l \in \mathbb{Z}_+^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\left| D_x^{|l|} \varphi(x) \right| \leq \; c_1 A_1^{|l|} l^{l\beta} e^{-\delta_0 \|x\|^{2b}}.$$

Отже,

$$\left| D_x^{|l|} \left(\hat{\theta}_{\delta_1}(x)\, \varphi(x) \right) \right| \leq \; c_1 \left(2 \overline{A}_1\right)^{|l|} \sum_{|k|=0}^{|l|} (l-k)^{\beta(l-k)} \left(\left| D_x^{|k|} \hat{\theta}_{\delta_1}(x) \right| e^{-\delta_0 \|x\|^{2b}} \right), \tag{9}$$

$$\delta_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad l \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Далі, міркуючи, як і при встановленні нерівностей (2) – (6), одержуємо

$$e^{-\delta_0 \|x\|^{2b}} \left| D_x^{|k|} \hat{\theta}_{\delta_1}(x) \right| \leq \; 2^{2b} \left(b 2^{5+6b} d^{2b} e^2 \left(\frac{\overline{1}}{\delta_0}\right) \overline{\delta}_1 \overline{\Upsilon} \right)^{|k|} k^{k\left(1-\frac{1}{2b}\right)} e^{-\left(\frac{\delta_0}{4} - \delta_1 \Upsilon\right) \|x\|^{2b}}$$

для $k \in \mathbb{Z}_+^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $d \geq 1$ і $\delta_1 > 0$.

Звідси при $0 < \delta_1 < \delta_0(4\Upsilon)^{-1}$, а також з нерівності (9) приходимо до твердження (8).

Неважко переконатися у тому, що дане твердження є справедливим і у випадку, коли $\Phi = S_\alpha$. Лему доведено.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Для того щоб функція* $c(\cdot)$ *була мультиплікатором у просторі* Φ, *необхідно і досить, щоб для кожного фіксованого* $0 < \delta << 1$ $c(\cdot)\theta_\delta(\cdot) \in \Phi$.

Доведення. *Необхідність* очевидна. Доведемо *достатність*. Для цього досить встановити виконання таких умов:

1) $\forall \varphi \in \Phi: \; c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;

2) для кожної послідовності $\{\varphi_\nu, x \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$ такої, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ у просторі Φ, відповідна послідовність $\{c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot), \nu \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля у Φ при $\nu \to \infty$.

Згідно з лемою 3

$$\forall \varphi \in \Phi \;\; \exists \delta_0' \in (0;1) \;\; \forall \delta \in (0;\delta_0') \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2:$$

$$c(x)\varphi(x) = \big(c(x)\theta_\delta(x)\big)\big(\dot{\theta}_\delta(x)\varphi(x)\big) \in \Phi,$$

як добуток функцій з Φ. Отже, умова 1 виконується.

Для доведення умови 2 у випадку, коли $\Phi = S_\alpha^\beta$, досить показати, що:

I. $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2: \left|D_x^{|k|}\big(c(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті K з $\mathbb{R}^2$;

II. $\exists \delta_1 > 0 \;\; \exists c_1 > 0 \;\; \exists A_1 > 0 \;\; \forall \nu \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2:$

$$\left|D_x^{|k|}\big(c(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| \le c_1 A_1^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_1\|x\|^{2b}}.$$

Оскільки $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ у просторі Φ, то:

а) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2: \left|D_x^{|k|}\varphi_\nu(x)\right| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті $K \subset \mathbb{R}^2$;

б) $\forall \nu \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^2: \left|D_x^{|k|}\varphi_\nu(x)\right| \le c_0 A_0^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_0\|x\|^{2b}}$, $x \in \mathbb{R}^2$, де c_0, A_0, δ_0 — додатні сталі, не залежні від x, k і ν.

Умова I виконується. Справді, згідно з умовою а),

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+^2: \left|D_x^{|k|}\big(c(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| = \left|\sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l D_x^{|l|}c(x) D_x^{|k-l|}\varphi_\nu(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \sup_{x\in K}\left(\left|D_x^{|l|}c(x)\right|\right)\left|D_x^{|k-l|}\varphi_\nu(x)\right| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

рівномірно по x на довільному компакті $K \subset \mathbb{R}^2$.

Доведемо виконання умови II. Завдяки умові б) та міркуванням, проведеним при встановленні нерівності (8), маємо

$$\left|D_x^{|l|}\big(\dot{\theta}_{\delta_1}(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| \le c_2 A_2^{|l|} l^{\beta l} e^{-\left(\frac{\delta_0}{4} - \delta_1\Upsilon\right)\|x\|^{2b}},$$

де c_2, A_2 — додатні сталі, не залежні від $l \in \mathbb{Z}_+^2$ і $x \in \mathbb{R}^2$, а $0 < \delta_1 < \dfrac{\delta_0}{4\Upsilon}$.

Звідси, враховуючи, що $c(\cdot)\theta_{\delta_1}(\cdot) \in \Phi$, одержуємо

$$\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2: \quad \left|D_x^{|k|}(c(x)\varphi_\nu(x))\right| =$$

$$= \left|D_x^{|k|}\big(c(x)\theta_{\delta_1}(x)\big)\big(\hat{\theta}_{\delta_1}(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| \le \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \left|D_x^{|k-l|}\big(c(x)\theta_{\delta_1}(x)\big)D_x^{|l|}\big(\hat{\theta}_{\delta_1}(x)\varphi_\nu(x)\big)\right| \le$$

$$\le c_2 c_3 e^{-\left(\frac{\delta_0}{4}-\delta_1\Upsilon\right)\|x\|^{2b}} \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l A_2^{|l|} l^{\beta l} A_3^{|k-l|}(k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_3\|x\|^{2b}} \le c_4 A_4^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_4\|x\|^{2b}},$$

де c_4, A_4, δ_4 — додатні сталі, не залежні від x, k і ν. Отже, виконання умови II доведено.

У випадку, коли $\Phi = S_\alpha$, справедливість умови II доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Нарешті сформулюємо ще одне допоміжне твердження.

Лема 4. $\forall \varphi \in \Phi: \ \theta_\delta(\cdot)\varphi(\cdot) \xrightarrow[\delta\to+0]{\Phi} \varphi(\cdot)$.

Доведення. Для доведення леми у випадку, коли $\Phi = S_\alpha^\beta$, досить встановити виконання таких умов:

I. $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2$: $D_x^{|k|}(\theta_\delta(x)\varphi(x)) \xrightarrow[\delta\to+0]{} D_x^{|k|}\varphi(x)$ рівномірно по x на кожному компакті K з $\mathbb{R}^2$;

II. $\exists \delta_1 > 0 \ \exists c_1 > 0 \ \exists A_1 > 0 \ \forall \delta \in (0;1) \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|D_x^{|k|}(\theta_\delta(x)\varphi(x))\right| \le c_1 A_1^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_1\|x\|^{2b}}.$$

Зауважимо, що

$$D_x^{|k|}(\theta_\delta(x)\varphi(x)) = \theta_\delta(x) D_x^{|k|}\varphi(x) + \sum_{|l|=1}^{|k|} C_k^l D_x^{|l|}\theta_\delta(x) D_x^{|k-l|}\varphi(x), \quad k \in \mathbb{Z}_+^2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

І оскільки для кожної компактної множини K з $\mathbb{R}^2$

$$D_x^{|l|}\theta_\delta(x) D_x^{|k-l|}\varphi(x) \xrightarrow[\delta\to+0]{} 0, \qquad \theta_\delta(x) \xrightarrow[\delta\to+0]{} 1$$

рівномірно по $x \in K$ для всіх $|l| \in \{1; 2; \ldots; |k|\}$, то

$$D_x^{|k|}(\theta_\delta(x)\varphi(x)) \xrightarrow[\delta\to+0]{} D_x^{|k|}\varphi(x)$$

рівномірно по x на кожному компакті $K \subset \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}_+^2$. Тобто умова I виконується.

Доведемо виконання умови II. Через те, що $\varphi \in \Phi$,

$$\exists \delta_0 > 0 \ \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2: \quad \left|D_x^{|k|}\varphi(x)\right| \le c A^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_0\|x\|^{2b}}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (7), одержуємо

$$\left|D_x^{|k|}(\theta_\delta(x)\varphi(x))\right| \le \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \left|D_x^{|l|}\theta_\delta(x)\right|\left|D_x^{|k-l|}\varphi(x)\right| \le$$

$$\leq 2^{|k|}\sum_{|l|=0}^{|k|} e^{\delta \Upsilon d^{2b}} 2^{2b}\left(b2^{5+6b}d^{2b}e^{2}\left(\frac{\overline{1}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\overline{2}}{\rho^{*}}\right)\overline{\delta}^{\frac{1}{2b}}\overline{\Upsilon}\right)^{|l|} k^{k\left(1-\frac{1}{2b}\right)} cA^{|k-l|}(k-l)^{\beta(k-l)}e^{-\delta_0\|x\|^{2b}} \leq$$

$$\leq\ ce^{\Upsilon d^{2b}} 2^{2b}\left(b2^{7+6b}d^{2b}e^{2}\left(\frac{\overline{1}}{\rho_1}\right)\left(\frac{\overline{2}}{\rho^{*}}\right)\overline{\Upsilon}\overline{A}\right)^{|k|} k^{\beta k}e^{-\delta_0\|x\|^{2b}},$$

де $k\in\mathbb{Z}_{+}^{2}$, $x\in\mathbb{R}^{2}$, $d\geq 1$, а $\delta\in(0;1)$. Таким чином, умова II виконується.

Якщо ж $\Phi = S_{\alpha}$, то відповідні умови I, II доводяться аналогічно.

Лему доведено.

Далі, нехай $F[\Phi]\equiv\breve{\Phi}$ — простір Фур'є-образів:

$$F[\Phi] = \left\{F[\varphi](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)e^{i(x,\sigma)}dx,\quad \varphi\in\Phi\right\}.$$

Через Φ' позначатимемо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю, визначених на Φ.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in\Phi'$ визначимо співвідношенням [2]

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle = (2\pi)^2\langle f,\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\Phi.$$

2. Задача Коші. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \mathrm{P}(t,D_x)U(t,x),\qquad (t,x)\in\Omega\ \equiv\ (0,+\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{10}$$

де $\mathrm{P}(\cdot,\cdot)$ — многочлен, описаний у п. 1.

Якщо для рівняння (10) задати початкову умову

$$U(t,\cdot)\big|_{t=0} = f,\qquad f\in\breve{\Phi}', \tag{11}$$

то під розв'язком задачі Коші (10), (11) розумітимемо гладку функцію U, яка задовольняє рівняння (10), а також початкову умову (11) у тому розумінні, що $U(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0]{\breve{\Phi}'} f$.

Нехай

$$G_t(\cdot) = F^{-1}[\theta_t(\xi)](\cdot),\quad t>0,$$

де F^{-1} — обернене перетворення Фур'є. Згідно з лемою 2 $G_t(\cdot)\in\breve{\Phi}$, $t>0$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб задача Коші* (10), (11) *була коректно розв'язною (тобто мала єдиний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних) і*:

1) *її розв'язок* $U(t,\cdot)$ *при кожному фіксованому* $t>0$ *належав простору* $\breve{\Phi}$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial t}F[U] = F\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}\right]$, $t>0$;

3) $U(t,x) = f * G_t(x)$, $(t,x)\in\Omega$,

необхідно і досить, щоб $F[f]$ *було мультиплікатором у просторі* Φ.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (10), які при кожному фіксованому $t>0$ є елементами з простору $\breve{\Phi}$ і по t задовольняють умову 2 даної теореми, то, враховуючи те, що відображення

$$F(F^{-1})\colon S_{\beta}^{\alpha} \to S_{\alpha}^{\beta}, \quad F(F^{-1})\colon S_{\beta} \to S^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

є взаємно однозначними і неперервними [2, с. 155], одержуємо еквівалентність рівняння (10) і рівняння

$$\frac{d\tilde{U}(t,\xi)}{dt} = \mathrm{P}(t, i\xi)\tilde{U}(t,\xi), \qquad (t,\xi) \in \Omega \tag{12}$$

(тут і далі $\tilde{V} = F[V]$), причому початкова умова (11) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{U}(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\Phi'} \tilde{f}. \tag{13}$$

Дійсно,

$$\forall\varphi \in \tilde{\Phi}\colon (2\pi)^2\langle \tilde{U}(t,\cdot), \tilde{\varphi}\rangle = \langle U(t,\cdot), \varphi\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle f, \varphi\rangle = (2\pi)^2\langle \tilde{f}, \tilde{\varphi}\rangle.$$

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (10), (11) у просторі $\tilde{\Phi}$ еквівалентне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (12), (13) у просторі Φ.

Доведемо *необхідність*. Для цього досить показати, що якщо задача Коші (12), (13) коректно розв'язна, то $\tilde{f}$ — мультиплікатор у Φ.

Зауважимо, що рівняння (12) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\tilde{U}(t,\xi) = c(\xi)\theta_t(\xi), \quad (t,\xi) \in \Omega. \tag{14}$$

Оскільки $\tilde{U}(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному фіксованому $t > 0$, то згідно з теоремою 1 функція $c(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі Φ.

Беручи до уваги твердження леми 4, з умови (13) і з рівності (14) маємо

$$\forall\varphi \in \Phi\colon \quad \langle c(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle \tilde{f}(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle.$$

Звідси на підставі того, що задача Коші (12), (13) має єдиний розв'язок, одержуємо, що $\tilde{f}$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ.

Необхідність доведено.

Доведемо *достатність*. Нехай $F[f]$ — мультиплікатор у Φ, тоді (див. лему 2) функція $\tilde{U}(t,\cdot) = \tilde{f}(\cdot)\theta_t(\cdot)$ є елементом з простору Φ при кожному $t > 0$, причому вона — розв'язок задачі Коші (12), (13). Доведемо, що цей розв'язок єдиний у Φ. Для цього припустимо, що існує у цьому просторі ще один розв'язок $\tilde{U}_1$ цієї задачі. На підставі структури загального розв'язку (14) рівняння (12)

$$\tilde{U}(t,\cdot) = c_1(\cdot)\theta_t(\cdot), \quad t > 0.$$

Оскільки $\tilde{U}_1(t,\cdot) \in \Phi$, $t > 0$, то функція $c_1(\cdot)$ — мультиплікатор у Φ (теорема 1).

Розглянемо функцію $V(t,\cdot) = \tilde{U}_1(t,\cdot) - \tilde{U}(t,\cdot)$, $t > 0$, яка також є розв'язком рівняння (12). Вона задовольняє умову $V(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{\Phi'} 0$, з якої, оскільки різниця мультиплікаторів у просторі Φ є мультиплікатором у цьому просторі, враховуючи лему 4, дістаємо

$$\langle V(t,\cdot), \varphi(\cdot)\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle \tilde{f}(\cdot)-c_1(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle 0, \varphi(\cdot)\rangle, \quad \varphi\in\Phi.$$

Таким чином,

$$\forall\varphi\in\Phi: \langle(\tilde{f}(\cdot)-c_1(\cdot)), \varphi(\cdot)\rangle = 0.$$

Покладаючи в останній рівності $\varphi(\cdot) = \overline{(\tilde{f}(\cdot)-c_1(\cdot))}\,\theta_1(\cdot)\in\Phi$, отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{(\tilde{f}(\xi)-c_1(\xi))}^2\,\theta_1(\xi)d\xi = 0$$

(тут $\overline{g}(\cdot)$ — функція, комплексно спряжена до $g(\cdot)$). Звідси $\tilde{f}(\xi) = c_1(\xi)$ майже скрізь на $\mathbb{R}^2$. Але оскільки $\tilde{f}(\cdot)$ і $c_1(\cdot)$ — нескінченно диференційовні функції, то ця рівність справджується скрізь на $\mathbb{R}^2$, тобто $\tilde{U}_1(t,\xi)\equiv\tilde{U}(t,\xi)$, $(t,\xi)\in\Omega$.

Отже, задача Коші (12), (13) має єдиний розв'язок у просторі Φ.

Тепер встановимо виконання умови 2 цієї теореми для розв'язку рівняння (12).

Оскільки

$$F\left[\frac{\partial}{\partial t}U\right] = F\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right]\right)\right], \quad t>0,$$

то досить довести, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right]\right) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right)\right], \quad t>0, \tag{15}$$

тобто

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right]\right) = F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\mathrm{P}(t,i\xi)\theta_t(\xi)\right], \quad t>0.$$

Для цього зафіксуємо довільним чином $t=t_0>0$ і виберемо таке $\delta>0$, щоб $t_0>\delta$. Тоді

$$\forall t\geq\delta: \left|F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right)\right]\right| \leq \Upsilon\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|\tilde{f}(\xi)\right|e^{-\delta\delta^*\|\xi\|^{2b}}\|\xi\|^{2b}d\xi < +\infty,$$

тобто інтеграл $\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right)e^{-i(x,\xi)}d\xi$ рівномірно збігається по $t\geq\delta$ і $x\in\mathbb{R}^2$. Оскільки функція $\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right)e^{-i(x,\xi)}$ неперервна за сукупністю змінних, то, згідно з відомою теоремою математичного аналізу, одержуємо виконання рівності (15) для кожного $t\geq\delta$, а отже, і для $t=t_0$. Довільність вибору t_0 і доводить виконання умови 2 даної теореми для розв'язку рівняння (12).

Нарешті, зважаючи на те, що

$$U(t,\cdot) = F^{-1}\left[\tilde{U}(t,\xi)\right] = F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)\theta_t(\xi)\right], \quad t>0,$$

і беручи до уваги твердження теореми 1 з [4], приходимо до висновку, що

$$U(t,\cdot) = f * G_t(\cdot), \quad t>0.$$

Розв'язок U задачі Коші (10), (11) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок $\bar{U}$ має таку властивість, а F^{-1} — неперервний оператор з Φ у $\bar{\Phi}$. Теорему доведено.

З [1] (див. теорему 2 та її наслідок) фактично одержуємо твердження про принцип локалізації розв'язку задачі Коші (10), (11).

Теорема 3. *Нехай узагальнена функція f з $\bar{\Phi}$ така, що $F[f]$ — мультиплікатор у Φ. Тоді якщо f збігається на $Q \subset \mathbb{R}^2$ з l разів неперервно диференційовною на цій множині функцією g, то*

$$D_x^{|k|}(f * G_t(x)) \xrightarrow[t \to +0]{} D_x^{|k|} g(x)$$

рівномірно по x на кожному компакті $K \subset Q$, де $|l| \in \{0, 1, 2, \ldots, |k|\}$.

Наступне твердження характеризує властивість стабілізації розв'язку задачі Коші (10), (11).

Теорема 4. *Нехай многочлен $\mathrm{P}(\cdot,\cdot)$ з рівняння* (10) *задовольняє умову*

$$\exists a(\cdot)\ \exists \rho_2 > 0\ \ \forall t > 0\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2: \quad \operatorname{Re} \mathrm{P}(t, i\xi) \le -\rho_2 \|\xi\|^{2b} + a(t), \tag{16}$$

причому функція $a(\cdot)$ така, що

$$\exists \hat{a}(\cdot)\ \exists q > 0\ \ \exists c^* > 0\ \ \forall t > 0\ \ \forall t' \in [0; t): \quad \int_{t'}^{t} a(\tau) d\tau \le -c^* t^q + \hat{a}(t'). \tag{17}$$

Тоді якщо $F[f]$ — мультиплікатор у Ψ, де $\Psi \in \{S_{1/2b}; S_{1/2b}^{\beta'}\}$, а $\beta' \ge$ $\ge 1 - (1/2b)(1 - 1/q)$, то відповідний розв'язок задачі Коші (10), (11) *стабілізується до нуля у просторі $\bar{\Psi}$ (тобто $U(t, \cdot) \xrightarrow[t \to +\infty]{\bar{\Psi}} 0$).*

Доведення. Оскільки, як було зазначено, відображення

$$F(F^{-1}): \Psi \to \bar{\Psi}$$

взаємно однозначні і неперервні, то досить довести, що

$$\bar{f}(\cdot)\theta_t(\cdot) \xrightarrow[t \to +\infty]{\Psi} 0,$$

тобто:

I. $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2$: $D_x^{|k|}(\bar{f}(x)\theta_t(x)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті K з $\mathbb{R}^2$;

II. $\exists \delta_1 > 0\ \ \exists c_1 > 0\ \ \exists A_1 > 0\ \ \forall t \ge 1\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| D_x^{|k|}(\bar{f}(x)\theta_t(x)) \right| \le c_1 A_1^{|k|} k^{\beta' k} e^{-\delta_1 \|x\|^{2b}}$$

у випадку, коли $\Psi = S_\alpha^{\beta'}$.

Міркуючи, як і при одержанні оцінки (7), і враховуючи при цьому нерівності (16), (17), знаходимо

$$\left| D_x^{|k|}\left(\exp\left\{ \int_{t'}^{t} \mathrm{P}(\tau, ix) d\tau \right\} \right) \right| \le$$

$$\le 2^{2b}\left(b 2^{5+6b} e^2 \left(\frac{\bar{1}}{\rho_3}\right)\left(\frac{\bar{2}}{\rho_2 - \rho_3}\right) t^{1/2b} \bar{\Upsilon} \right)^{|k|} k^{(1-1/2b)k} e^{-(t-t')(\rho_2-\rho_3)\|x\|^{2b}/2} e^{-c^* t^q + \hat{a}(t')} \le$$

$$\leq 2^{2b} e^{\hat{a}(t')} \left(b 2^{5+6b} e^2 \left(\frac{\overline{1}}{\rho_3}\right) \left(\frac{\overline{2}}{\rho_2-\rho_3}\right) \left(\frac{1}{bqc^*}\right)^{1/2bq} \overline{\Upsilon} \right)^{|k|} k^{(1-(1/2b)(1-1/q))k} e^{-c^* t^q/2}, \quad (18)$$

де $t \geq 1$, $t' \in [0; t)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{Z}_+^2$, а $\rho_3 \in (0; \rho_2)$.

Звідси при $t' = 0$, зважаючи на те, що

$$\sup_{x \in K \subset \mathbb{R}^2} \left\{ \left| D_x^{|k|} \bar{f}(x) \right| \right\} < +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}_+^2,$$

одержуємо умову I.

Зауважимо, що

$$\left| D_x^{|k|}\left(\bar{f}(x)\,\theta_t(x)\right) \right| \leq \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \left| D_x^{|l|}\left(\exp\left\{ \int_{1/2}^{t} \mathrm{P}(\tau, ix)\, d\tau \right\} \right) \right| \left| D_x^{|k-l|}\left(\bar{f}(x)\,\theta_{1/2}(x)\right) \right|,$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 1,$$

і оскільки

$$\exists \delta_0 > 0 \;\; \exists c > 0 \;\; \exists A > 0 \;\; \forall l \in \mathbb{Z}_+^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2 : \left| D_x^{|l|}\left(\bar{f}(x)\,\theta_{1/2}(x)\right) \right| \leq c A^{|l|} l^{\beta' l} e^{-\delta_0 \|x\|^{2b}},$$

тому що $\bar{f}(\cdot)\,\theta_{1/2}(\cdot) \in \Psi$, то згідно з нерівністю (18) одержуємо

$$\left| D_x^{|k|}\left(\bar{f}(x)\,\theta_t(x)\right) \right| \leq c 2^{2b} e^{\hat{a}(1/2)} \left(b 2^{5+6b} e^2 \left(\frac{\overline{1}}{\rho_3}\right) \left(\frac{\overline{2}}{\rho_2-\rho_3}\right) \left(\frac{1}{bqc^*}\right)^{1/2bq} \overline{Y}\,\overline{A} \right)^{|k|} k^{\beta' k} e^{-\delta_0 \|x\|^{2b}},$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ і $t \geq 1$.

Отже, умова II виконується.

Якщо ж $\Psi = S_\alpha$, то відповідні умови I, II доводяться аналогічним чином. Теорему доведено.

Зауважимо, що наведені твердження мають місце і у випадку n-вимірного евклідового простору.

1. *Городецький В. В.* Принцип локалізації для розв'язків задачі Коші параболічних за Петровським систем у класі узагальнених функцій // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 5 – 7.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acta Sci. en Industry. – Paris: Hermann, 1950. – **1**, № 1091.
4. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949 – 952.

Одержано 29.01.2002