УДК 517.9

А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, Ан. А. Бойчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ*

We obtain conditions of the bifurcation of solutions of weakly perturbed systems of linear ordinary differential equations from the point $\varepsilon = 0$ that are bounded on the entire axis R. We consider the case where the corresponding unperturbed homogeneous linear differential system is exponentially dichotomous on the semiaxes R_+ and R_-.

Отримано умови появи з точки $\varepsilon = 0$ обмежених на всій осі R розв'язків слабкозбурених систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли відповідна незбурена однорідна лінійна диференціальна система є експоненціально-дихотомічною на півосях R_+ та R_-.

Невозмущенная задача. Известно [1], что система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(\cdot) \in BC(J) \tag{1}$$

экспоненциально-дихотомична (э-дихотомична) на интервале J, если существует проектор P $(P^2 = P)$ и константы $K \geq 1$, $\alpha > 0$ такие, что для любых t, $s \in J$

$$\| X(t) P X^{-1}(s) \| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\| X(t)(I-P) X^{-1}(s) \| \leq K e^{-\alpha(s-t)}; \quad s \geq t;$$

$X(t)$ — нормальная $(X(0) = I)$ фундаментальная матрица системы (1); $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, компоненты которой принадлежат банахову пространству $BC(J)$ действительных, непрерывных и ограниченных на J функций. Ниже под J будем подразумевать один из следующих интервалов: $J = R = (-\infty, +\infty)$, $J = R_+ = [0, +\infty)$, $J = R_- = (-\infty, 0]$.

Рассмотрим задачу о существовании и структуре решений $x: R \to R^n$, $x(\cdot) \in BC^1(R)$, из банахова пространства $BC^1(R)$ непрерывно дифференцируемых на R вектор-функций, ограниченных со своей производной, неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad f: R \to R^n, \quad f(\cdot) \in BC(R), \quad A(\cdot) \in BC(R) \tag{2}$$

в случае, когда система (1) имеет нетривиальные ограниченные на R решения. В некритическом [2] или регулярном [3] случае, когда однородная система (1) э-дихотомична на R, а значит не имеет нетривиальных ограниченных на R решений, неоднородная система (2) имеет единственное ограниченное на R решение при любой $f(\cdot) \in BC(R)$. Критический или резонансный случай, когда однородная система (1) имеет нетривиальные ограниченные на R решения, а значит не является э-дихотомичной на R, изучался в работе К. Палмера [2, с. 245], где получены условия нетеровости рассматриваемой задачи. Этот результат позволяет сформулировать с использованием теории псевдообратных матриц следующее утверждение [4].

Лемма. *Пусть линейный оператор*

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t): BC^1(R) \to BC(R) \tag{3}$$

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований (грант № 01.07 / 00109).

э-дихотомичный на полуосях $J = R_+$ и $J = R_-$ с проекторами P и Q соответственно. Тогда:

a) *система* (1) *имеет* r*-параметрическое семейство* ($r = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}]$) *ограниченных на* R *решений*: $X_r(t)c_r$ $\forall c_r \in R^r$; $X_r(t) = X(t)[PP_{N(D)}]_r = X(t)[(I-Q)P_{N(D)}]_r$ — $(n \times r)$*-мерная матрица, столбцы которой — полная система* r *линейно независимых ограниченных на* R *решений системы* (1);

b) *сопряженная к* (1) *система*

$$\dot{x} = -A^*(t)x, \quad A(\cdot) \in BC(R) \tag{4}$$

имеет d*-параметрическое семейство* ($d = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right]$) *ограниченных на* R *решений*: $H_d(t)c_d$ $\forall c_d \in R^d$; $H_d(t) = X^{*-1}(t)\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d = X^{*-1}(t)\left[(I-P^*)P_{N(D^*)}\right]_d$ — $(n \times d)$*-мерная матрица, столбцы которой — полная система* d *линейно независимых ограниченных на* R *решений системы* (4), *сопряженной к* (1);

c) *оператор* L *нетеров с индексом*

$$\operatorname{ind} L = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] - \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}] - \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right] = r - d,$$

причем $f \in \operatorname{Im} L$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s) f(s)\,ds = 0, \tag{5}$$

$H_d^*(t) = \left[X^{*-1}\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d\right]^*$ — $(d \times n)$*-мерная матрица, строки которой — полная система* d *линейно независимых ограниченных на* R *решений системы* (4);

d) *при условии* (5) *неоднородная система* (2) *имеет* r*-параметрическое семейство ограниченных на* R *решений*

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G(f))(t) \quad \forall c_r \in R^r, \tag{6}$$

где

$$(G(f))(t) = $$

$$= X(t)\begin{cases} \int_0^t PX^{-1}(s)f(s)\,ds - \int_t^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)\,ds + \\ \quad + PD^+\left\{\int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)\,ds + \int_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)\,ds\right\}, & t \ge 0; \\ \int_{-\infty}^t QX^{-1}(s)f(s)\,ds - \int_t^0 (I-Q)X^{-1}(s)f(s)\,ds + \\ \quad + (I-Q)D^+\left\{\int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)\,ds + \int_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)\,ds\right\}, & t \le 0, \end{cases} \tag{7}$$

— обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на R решениях системы (2), *удовлетворяющий свойствам*

$$(LG[f])(t) = f(t), \quad t \in R,$$

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(s) f(s) ds.$$

Здесь $D = P - (I - Q)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, а D^+ — ее псевдообратная по Муру – Пенроузу [5, 6]; $P_{N(D)}$ и $P_{N(D^*)}$ — $(n \times n)$-мерные матрицы-ортопроекторы: $P_{N(D)}^2 = P_{N(D)} = P_{N(D)}^*$, $P_{N(D^*)}^2 = P_{N(D^*)} = P_{N(D^*)}^*$, проектирующие R^n на ядро $\ker D = N(D)$ и коядро $\operatorname{coker} D = \ker D^* = N(D^*)$ матрицы D; $\left[Q^* P_{N(D^*)}\right]_d$ — $(n \times d)$-мерная матрица, состоящая из $d = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)} Q\right]^*$ линейно независимых столбцов матрицы в скобках.

Доказательство [4, 7]. Общее решение задачи (2), ограниченное на полуосях, имеет вид

$$x(t, \xi) = \begin{cases} X(t)P\xi + \int_0^t X(t)PX^{-1}(s) f(s) ds - \\ \quad - \int_t^{\infty} X(t)(I - P)X^{-1}(s) f(s) ds, & t \geq 0; \\ X(t)(I - Q)\xi + \int_{-\infty}^t X(t)QX^{-1}(s) f(s) ds - \\ \quad - \int_t^0 X(t)(I - Q)X^{-1}(s) f(s) ds, & t \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решение (8) будет ограниченным на R тогда и только тогда, когда векторная константа $\xi \in R^n$ удовлетворяет алгебраической системе

$$[P - (I - Q)]\xi = \int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s) f(s) ds + \int_0^{\infty} (I - P)X^{-1}(s) f(s) ds. \tag{9}$$

Система (2) имеет ограниченные на R решения тогда и только тогда, когда разрешима относительно $\xi \in R^n$ алгебраическая система (9), для чего необходимо и достаточно, чтобы свободный член системы (9) принадлежал ортогональному дополнению $N^{\perp}(D^*) = R(D)$ подпространства $N(D^*)$. С учетом введенных обозначений последнее эквивалентно условию

$$P_{N(D^*)} \left\{ \int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s) f(s) ds + \int_0^{\infty} (I - P)X^{-1}(s) f(s) ds \right\} = 0. \tag{10}$$

При этом общее ограниченное на R решение системы (2) имеет вид (8) с константой $\xi \in R^n$, которая из (9) определяется следующим образом:

$$\xi = D^+ \left\{ \int_{-\infty}^0 QX^{-1}(s) f(s) ds + \int_0^{\infty} (I - P)X^{-1}(s) f(s) ds \right\} + P_{N(D)} c \quad \forall c \in R^n. \tag{11}$$

Другими словами, $f \in \operatorname{Im}(L)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

(10), и при этом общее ограниченное на всей оси R решение системы (2) имеет вид

$$x(t,c) =$$

$$= X(t)\begin{cases} PP_{N(D)}c + \int\limits_0^t PX^{-1}(s)f(s)ds - \int\limits_t^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds + \\ \quad + PD^+\left\{\int\limits_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds + \int\limits_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right\}, & t \ge 0; \\ (I-Q)P_{N(D)}c + \int\limits_{-\infty}^t QX^{-1}(s)f(s)ds - \int\limits_t^0 (I-Q)X^{-1}(s)f(s)ds + \\ \quad + (I-Q)D^+\left\{\int\limits_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds + \int\limits_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right\}, & t \le 0. \end{cases}$$

Поскольку $DP_{N(D)} = 0$ [5], то $PP_{N(D)} = (I-Q)P_{N(D)}$. Пусть $r = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}]$, тогда $\dim N(L) = r$, и наоборот. Обозначим через $[PP_{N(D)}]_r = [(I-Q)P_{N(D)}]_r$ $(n \times r)$-мерную матрицу, столбцы которой — полная система r линейно независимых столбцов матрицы $PP_{N(D)}$ или матрицы $(I-Q)P_{N(D)}$. Тогда $X_r(t) = X(t)[PP_{N(D)}]_r = X(t)[(I-Q)P_{N(D)}]_r$ — $(n \times r)$-мерная матрица, столбцы которой — полная система r линейно независимых ограниченных на R решений системы (2). Поэтому общее ограниченное на R решение системы (2) можно записать в виде (6), где обобщенный оператор Грина $(G(f))(t)$ задачи об ограниченных на всей оси R решениях системы (2) имеет вид (7) и удовлетворяет указанным выше свойствам, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Поскольку $P_{N(D^*)}D = 0$ [5], то $P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}(I-P)$. Поэтому условие (10) эквивалентно одному из условий

$$P_{N(D^*)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} QX^{-1}(s)f(s)ds = 0, \qquad P_{N(D^*)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds = 0. \qquad (12)$$

Пусть $d = \operatorname{rang}\left(\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \left[P_{N(D^*)}Q\right]\right)$, тогда каждое из условий (12) состоит из d линейно независимых условий. Действительно, через $\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d$ и $\left({}_d\left[P_{N(D^*)}Q\right]\right)$ будем обозначать $(n \times d)$- и $(d \times n)$-мерные матрицы, столбцы и строки которых есть d линейно независимые столбцы и строки матриц $\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]$ и $\left[P_{N(D^*)}Q\right]$ соответственно. Так как $X^{*-1}(t)$ — фундаментальная матрица системы (4), которая э-дихотомична на R_+ с проектором $I - P^*$ и на R_- с проектором $I - Q^*$ [2, с. 246], то

$$H_d(t) := X^{*-1}(t)\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d = X^{*-1}(t)\left[(I-P^*)P_{N(D^*)}\right]_d$$

— $(n \times d)$-мерная матрица, столбцы которой — полная система d линейно независимых ограниченных на R решений системы (4), сопряженной к системе (1);

$$H_d^*(t) = \left[X^{*-1}(t)\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d\right]^* = {}_d\left[P_{N(D^*)}Q\right]X^{-1}(t) = {}_d\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right]X^{-1}(t)$$

— $(d \times n)$-мерная матрица, строки которой — полная система d линейно независимых ограниченных на R решений системы (4); ${}_d\left[P_{N(D^*)}Q\right] = {}_d\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right]$ — $(d \times n)$-мерная матрица, состоящая из $d = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right]$ линейно независимых строк матрицы в скобках. Таким образом, приходим к условию (5), что и завершает доказательство леммы.

Предположим, что однородная система (1) э-дихотомична на R_+ и R_- с проекторами P и Q соответственно и такая, что $PQ = QP = Q$. В этом случае система (1) является э-трихотомичной [8, с. 363] на R, а неоднородная система (2) имеет хотя бы одно решение, ограниченное на R для всех $f \in BC(R)$ [8, с. 371]. Другими словами, это есть так называемый слаборегулярный случай [3, с. 37]. В этом случае лемма формулируется следующим образом.

Лемма 1.1. *Пусть система* (1) *э-дихотомична на* R_+ *и* R_- *с проекторами* P *и* Q *соответственно и такая, что* $PQ = QP = Q$. *Тогда*:

a) *однородная система* (1) *имеет* r-*параметрическое семейство решений, ограниченных* R:

$$X_r(t)c_r = X(t)[PP_{N(D)}]_r c_r = X(t)[(I-Q)P_{N(D)}]_r c_r \quad \forall c_r \in R^r$$

$$(r = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}]);$$

b) *сопряженная к* (1) *система* (4) *имеет только тривиальное ограниченное на* R *решение*;

c) *оператор* L *нетеров с индексом*

$$\operatorname{ind} L = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}] = r,$$

причем $f \in \operatorname{Im}(L)$ *для любых* $f \in BC(R)$;

d) *неоднородная система* (2) *имеет* r-*параметрическое семейство ограниченных на* R *решений*

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f])(t) \quad \forall c_r \in R^r,$$

где $(G[f])(t)$ — *обобщенный оператор Грина* (7) *задачи об ограниченных на* R *решениях системы* (2) *со свойствами*

$$(LG[f])(t) = f(t), \quad t \in R, \quad (G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = 0.$$

Доказательство. Действительно, учитывая, что $P_{N(D^*)}D = 0$ и

$$DP = (P-(I-Q))P = QP = Q,$$

имеем

$$P_{N(D^*)}Q = P_{N(D^*)}DP = 0.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие (5) существования ограниченного на всей оси решения системы (2) выполняется тождественно для всех $f \in BC(R)$.

Заметим, что случай $PQ = QP = Q$ эквивалентен условию трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого подпространств системы (1) [9, с. 170].

Предположим, что однородная система (1) э-дихотомична на R_+ и R_- с проекторами P и Q соответственно и такая, что $PQ = QP = P$. Покажем, что в этом случае сопряженная к (1) система (4) э-трихотомична на R, а неоднородная система (2) имеет единственное решение, ограниченное на R, но не для всех $f \in BC(R)$.

Лемму можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1.2. *Пусть линейный оператор* (3) *э-дихотомичный на полуосях* $J = R_+$ *и* $J = R_-$ *с проекторами* P *и* Q *соответственно, причем* $PQ = QP = P$. *Тогда*:

a) *система* (1) *имеет только тривиальное* ($r = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I - Q)P_{N(D)}] = 0$) *ограниченное на* R *решение*;

b) *сопряженная к* (1) *система* (4) *слаборегулярна или э-трихотомична и имеет* d*-параметрическое семейство* ($d = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right]$) *ограниченных на* R *решений*: $H_d(t)c_d \quad \forall c_d \in R^d$; $H_d(t) = X^{*-1}(t)\left[Q^*P_{N(D^*)}\right]_d = X^{*-1}(t)\left[(I-P^*)P_{N(D^*)}\right]_d$ — $(n \times d)$*-мерная матрица, столбцы которой — полная система* d *линейно независимых ограниченных на* R *решений системы* (4);

c) *оператор* L *нетеров с индексом*

$$\operatorname{ind} L = -\operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = -\operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right] = -d,$$

причем $f \in \operatorname{Im}(L)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s) f(s) ds = 0;$$

d) *при условии* (5) *неоднородная система* (2) *имеет единственное ограниченное на* R *решение* $x(t) = (G(f))(t)$, *где* $(G[f])(t)$ — *обобщенный оператор Грина* (7) *задачи об ограниченных на* R *решениях системы* (2), *удовлетворяющий свойствам*

$$(LG[f])(t) = f(t), \quad t \in R,$$

$$(G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int_{-\infty}^{\infty} H^*(s) f(s) ds.$$

Доказательство. Для доказательства э-трихотомии системы (4) достаточно показать, что проекторы $(I - P^*)$ и $(I - Q^*)$, которые определяют э-дихотомию на полуосях у системы (4), удовлетворяют условию

$$(I-P^*)(I-Q^*) = (I-Q^*)(I-P^*) = I-Q^*.$$

Это действительно так, поскольку из условия $PQ = QP = P$ следует

$$Q^*P^* = P^*Q^* = P^*,$$

откуда

$$(Q^*-I)P^* = 0, \quad P^*(Q^*-I) = 0.$$

Прибавляя к обеим частям последних равенств слагаемое $I - Q^*$, получаем требуемое условие, которое и означает [8] э-трихотомию системы (4).

Далее, учитывая, что $DP_{N(D)} = 0$ и

$$PD = P(P-(I-Q)) = PQ = P,$$

имеем $PP_{N(D)} = PDP_{N(D)} = 0$.

Согласно лемме $r = 0$, и однородная система (1) имеет только тривиальное ограниченное на всей оси решение, а неоднородная система (2) имеет единственное решение, ограниченное на R для всех $f(\cdot) \in BC(R)$, удовлетворяющих условию (5).

Предположим, что однородная система (1) э-дихотомична на R_+ и R_- с проекторами P и Q соответственно и такая, что $PQ = QP = P = Q$. В этом случае система (1) является э-дихотомичной на R, а неоднородная система (2) имеет единственное решение, ограниченное на R для любых $f \in BC(R)$. Другими словами, это так называемый регулярный случай [3, с. 37]. Объединяя леммы 1.1 и 1.2, получаем следующее известное утверждение.

Лемма 1.3. *Пусть система* (1) *э-дихотомична на* R_+ *и* R_- *с проекторами* P *и* Q *соответственно и такая, что* $PQ = QP = P = Q$. *Тогда*:

a) *однородная система* (1) *имеет только тривиальное ограниченное на* R *решение*

$$\left(r = \operatorname{rang}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rang}[(I-Q)P_{N(D)}] = 0 \right);$$

b) *сопряженная к* (1) *система* (4) *имеет только тривиальное ограниченное на* R *решение*

$$\left(d = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}(I-P)\right] = \operatorname{rang}\left[P_{N(D^*)}Q\right] = 0 \right);$$

c) *оператор* L, *определенный согласно* (3), *фредгольмов индекса нуль, причем* $f \in \operatorname{Im}(L)$ *для любых* $f \in BC(R)$;

e) *однородная система* (1) *э-дихотомична на* R, *а неоднородная система* (2) *имеет единственное ограниченное на* R *решение, которое может быть записано в виде* $x(t) = (G[f])(t)$, *где* $(G[f])(t)$ — *оператор Грина* (7) $(P = Q$, $D^+ = D^{-1})$ [3] *задачи об ограниченных на* R *решениях системы* (2).

Приведенные результаты уточняют лемму К. Палмера [2. с. 245], дают отличную от [10] формулу для вычисления индекса оператора L и существенно используются для получения новых условий существования ограниченных на всей оси решений у слабовозмущенных систем [4].

Возмущенная задача. Рассмотрим слабовозмущенную линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + f(t), \quad A_1(\cdot) \in BC(R). \tag{13}$$

Предположим, что у порождающей системы (2), получающейся из (13) при $\varepsilon = 0$ и удовлетворяющей условиям сформулированной леммы, нет ограниченных на всей оси решений при произвольных неоднородностях $f \in BC(R)$. Согласно лемме это означает, что имеет место критический случай и критерий (5) разрешимости задачи (2) не выполняется (в силу произвольности $f \in BC(R)$).

Возникает вопрос: можно ли с помощью линейных возмущений сделать задачу (2) разрешимой, и если можно, то каким должно быть возмущающее слагаемое $A_1(t)$, чтобы система (13) была всюду разрешимой в классе ограниченных на всей оси функций? Другими словами, каким должно быть возмущающее слагаемое, чтобы однородная система

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x, \quad A_1(\cdot) \in BC(R), \tag{14}$$

стала э-трихотомичной или э-дихотомичной на всей оси? Покажем, что ответить на этот вопрос можно с помощью $(d \times r)$-мерной матрицы

$$B_0 = \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau, \tag{15}$$

построенной по коэффициентам системы (13). Применение метода Вишика – Люстерника [11] позволяет найти эффективные коэффициентные условия возникновения решения задачи (13) в классе ограниченных на всей оси функций в виде ряда Лорана по степеням малого параметра ε с конечным числом слагаемых, которые имеют отрицательные степени ε.

Прежде чем сформулировать теорему, которая разрешает эту задачу, напомним, что через $P_{N(B_0)}$ обозначается $(r \times r)$-мерная матрица (ортопроектор), проектирующая R^r на нуль-пространство $N(B_0)$ матрицы B_0, $P_{B_0} : R^r \to \to N(B_0)$, а через $P_{N(B_0^*)}$ — $(d \times d)$-мерная матрица (ортопроектор), проектирующая R^d на нуль-пространство $N(B_0^*)$ $(r \times d)$-мерной матрицы $B_0^* = B_0^t$, $P_{N(B_0^*)} : R^d \to N(B_0^*)$.

Теорема 1. *Пусть система* (13) *удовлетворяет указанным выше условиям так, что имеет место критический случай и порождающая система* (1) *э-дихотомична на* R_+ *и* R_- *с проекторами* P *и* Q *соответственно, а система* (2) *при произвольных неоднородностях* $f \in BC(R)$ *не имеет ограниченных на всей оси решений. Тогда если выполнено условие*

$$P_{N(B_0^*)} = 0, \tag{16}$$

то система (14) *э-трихотомична на* R, *а система* (13) *при произвольных* $f \in BC(R)$ *имеет хотя бы одно ограниченное на* R *решение в виде равномерно сходящегося при достаточно малых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряда*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t). \tag{17}$$

Доказательство. Подставим ряд (17) в систему (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для нахождения коэффициента $x_{-1}(t)$ ряда (17) при ε^{-1} приходим к задаче об ограниченных на всей оси решениях однородной системы

$$\dot{x}_{-1} = A(t)x_{-1}. \tag{18}$$

Согласно лемме однородная задача (18) имеет r-параметрическое семейство ограниченных на R решений $x_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t)c_{-1}$, где r-мерный вектор-столбец $c_{-1} \in R^r$ будет определен из условия разрешимости задачи для определения коэффициента $x_0(t)$ ряда (17).

Для определения коэффициента $x_0(t)$ ряда (17) при ε^0 приходим к задаче об ограниченных на всей оси решениях системы

$$\dot{x}_0 = A(t)x_0 + A_1(t)x_{-1} + f(t). \tag{19}$$

Согласно лемме критерий разрешимости задачи (19) с учетом обозначения (15) имеет вид

$$B_0 c_{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Для разрешимости последней системы при произвольной $f \in BC(R)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (16), которое эквивалентно условию $\operatorname{rang} B_0 = d \le r$. Алгебраическая система будет разрешима относительно

$c_{-1} \in R^r$ с точностью до произвольной векторной константы $P_{N(B_0)}c \quad \forall c \in R^r$ из нуль-пространства матрицы B_0 [5]. Одно из ее решений имеет вид

$$c_{-1} = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) f(\tau) d\tau,$$

где B_0^+ — единственная $(r \times d)$-мерная матрица, псевдообратная к B_0.

Система (19) при условии (16) имеет r-параметрическое семейство ограниченных на R решений

$$x_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + (G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)])(t),$$

где c_0 — r-мерный вектор констант, который будет определен на следующем шаге из условия разрешимости задачи для нахождения коэффициента $x_1(t)$ ряда (17); $(G[*])(t)$ — обобщенный оператор Грина (7) задачи об ограниченных решениях системы (2).

Для определения коэффициента $x_1(t)$ ряда (17) при ε^1 приходим к задаче о нахождении ограниченных на всей оси решений системы

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + A_1(t)x_0, \tag{20}$$

из критерия разрешимости которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau c_0 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)])(\tau)d\tau = 0$$

при условии (16) определяем $c_0 \in R^r$ (с точностью до произвольной векторной константы $P_{N(B_0)}c \quad \forall c \in R^r$ из нуль-пространства матрицы B_0):

$$c_0 = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)x_{-1}(\cdot, c_{-1}) + f(\cdot)])(\tau)d\tau.$$

Таким образом, при условии (16) система (20) имеет r-параметрическое семейство ограниченных на R решений

$$x_1(t, c_1) = X_r(t)c_1 + (G[A_1(\cdot)x_0(\cdot, c_0)])(t).$$

Аналогично изложенному выше, методом математической индукции легко показать, что при условии (16) для определения коэффициентов $x_i(t)$ ряда (17) при ε^i приходим к задаче об ограниченных на всей оси решениях системы

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + A_1(t)x_{i-1}. \tag{21}$$

Ограниченное на всей оси решение системы (21) при условии (16) имеет вид

$$x_i(t, c_i) = X_r(t)c_i + (G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(t), \tag{22}$$

где векторная константа $c_i \in R^r$ определяется (с точностью до произвольной константы $P_{N(B_0)}c \quad \forall c \in R^r$ из нуль-пространства матрицы B_0) согласно формуле

$$c_i = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot)x_{i-1}(\cdot, c_{i-1})])(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Покажем теперь, что при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряд (17) с коэффициентами, определенными согласно (22), будет равномерно сходиться по t и ε. Прежде всего напомним, что на полуосях имеют место оценки

$$\begin{gathered} \| X(t)PX^{-1}(s) \| \le K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \ge s, \\ \| X(t)(I-P)X^{-1}(s) \| \le K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad t \le s \quad (\forall t, s \in R_+), \\ \| X(t)QX^{-1}(s) \| \le K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \ge s, \\ \| X(t)(I-Q)X^{-1}(s) \| \le K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad t \le s \quad (\forall t, s \in R_-). \end{gathered} \tag{24}$$

Согласно (24) имеем

$$\| X(t)P \| \le K_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad t \ge 0, \qquad \| X(t)(I-Q) \| \le K_2 e^{\alpha_2 t}, \quad t \le 0,$$

поэтому

$$\begin{gathered} \| X_r(t) \| \le \| X(t)PP_{N(D)} \| = \\ = \| X(t)(I-Q)P_{N(D)} \| \le \begin{cases} K_1 p e^{-\alpha_1 t}, & t \ge 0; \\ K_2 p e^{\alpha_2 t}, & t \le 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{25}$$

где

$$p = \max\left(\| P_{N(D)} \|, \| P_{N(D^*)} \| \right).$$

Известно, что сопряженная к (1) система (4) имеет фундаментальную матрицу $Y(t) = X^{*-1}(t)$, которая э-дихотомична на полуосях R_+ и R_- с проекторами $I - P^*$ и $I - Q^*$ соответственно. Неравенства типа (24), характеризующие э-дихотомию на полуосях у сопряженной системы (4), имеют вид

$$\begin{gathered} \| X^{*-1}(t)P^*X^*(s) \| = \| [X(s)PX^{-1}(t)]^* \| = \\ = \| X(s)PX^{-1}(t) \| \le K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad s \ge t, \\ \| X^{*-1}(t)(I-P^*)X^*(s) \| = \| [X(s)(I-P)X^{-1}(t)]^* \| \le K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \\ s \le t \quad (\forall t, s \in R_+), \\ \| X^{*-1}(t)Q^*X^*(s) \| \le K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad s \ge t, \\ \| X^{*-1}(t)(I-Q^*)X^*(s) \| \le K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad s \le t \quad (\forall t, s \in R_-). \end{gathered} \tag{26}$$

Поэтому

$$\begin{gathered} \| H_d^*(t) \| = \| H_d(t) \| \le \| X^{*-1}(t)Q^*P_{N(D^*)} \| = \\ = \| X^{*-1}(t)(I-P^*)P_{N(D^*)} \| \le \begin{cases} K_2 p e^{\alpha_2 t}, & t \le 0; \\ K_1 p e^{-\alpha_1 t}, & t \ge 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{27}$$

Учитывая (24), для обобщенного оператора Грина (7) имеем следующую оценку:

$$\|(G(f))(t)\| \le \begin{cases} \left\{ \int\limits_0^t K_1 e^{-\alpha_1(t-s)} ds + \int\limits_t^\infty K_1 e^{\alpha_1(t-s)} ds + \right. \\ \left. + K_1 N \left[\int\limits_{-\infty}^0 K_2 e^{\alpha_2 s} ds + \int\limits_0^\infty K_1 e^{-\alpha_1 s} ds \right] \right\} \| f(t) \|, \quad t \ge 0; \\ \left\{ \int\limits_{-\infty}^t K_2 e^{-\alpha_2(t-s)} ds + \int\limits_t^0 K_2 e^{\alpha_2(t-s)} ds + \right. \\ \left. + K_2 N \left[\int\limits_{-\infty}^0 K_2 e^{\alpha_2 s} ds + \int\limits_0^\infty K_1 e^{-\alpha_1 s} ds \right] \right\} \| f(t) \|, \quad t \le 0, \end{cases} \le$$

$$\le K \| f(t) \|,$$

где

$$N = \left\| D^+ \right\|, \quad K = \max_{i=1,2} K_i (1/\alpha_i + N\kappa), \quad \kappa = \frac{K_2}{\alpha_2} + \frac{K_1}{\alpha_1}.$$

Используя (24) – (27), оцениваем коэффициенты $x_i(t, c_i)$ (22) и c_i (23) ряда (17). Для любого $t \in R$ имеем

$$\| c_1 \| \le baK \left\{ \int\limits_{-\infty}^0 K_2 p e^{\alpha_2 s} ds + \int\limits_0^\infty K_1 p e^{-\alpha_1 s} ds \right\} \| A_1(t) x_0(t, c_0) \| =$$

$$= bpa^2 \kappa K \| x_0(t, c_0) \|,$$

$$\| x_1(t, c_1) \| \le k \| c_1 \| + Ka \| x_0(t, c_0) \| \le aK(abpk\kappa + 1) \| x_0(t, c_0) \|,$$

где $b = \left\| B_0^+ \right\|$, $a = \| A_1(t) \|$, $k = \max(K_1 p, K_2 p)$.

Далее

$$\| c_2 \| \le bpa^2 \kappa K \| x_1(t, c_1) \| \le (aK)^2 abp\kappa (abpk\kappa + 1) \| x_0(t, c_0) \|,$$

$$\| x_2(t, c_2) \| \le k \| c_2 \| + aK \| x_1(t, c_1) \| \le [\, aK(abpk\kappa + 1) \,]^2 \| x_0(t, c_0) \|.$$

Продолжая этот процесс, легко заметить, что для коэффициентов $c_i \in R^r$, $x_i(t, c_i)$ ряда (17) справедливы оценки

$$\| c_i \| \le (aK)^i abp\kappa (abpk\kappa + 1)^{i-1} \| x_0(t, c_0) \|,$$

$$\| x_i(t, c_i) \| \le [\, aK(abpk\kappa + 1) \,]^i \| x_0(t, c_0) \|, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, для всех $t \in R$ ряд (17) мажорируется рядом

$$\varepsilon^{-1} \left\| x_{-1}(t, c_{-1}) \right\| + \sum_{i=0}^{+\infty} [\, \varepsilon aK(abpk\kappa + 1) \,]^i \| x_0(t, c_0) \|.$$

При этом $\| x_{-1}(t, c_{-1}) \|$ и $\| x_0(t, c_0) \|$ ограничены. Поэтому при $t \in R$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < [\, aK(abpk\kappa + 1) \,]^{-1}$, ряд (17) равномерно сходится, что и завершает доказательство теоремы.

В случае, когда число $r = \operatorname{rang} [\, PP_{N(D)} = (I - Q) P_{N(D)}]$ линейно независимых ограниченных на R решений системы (1) равно числу $d = \operatorname{rang} \left[P_{N(D^*)} (I - P) = P_{N(D^*)} Q \right]$ линейно независимых ограниченных на R решений сопряженной к (1) системы (4), из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть система* (13) *удовлетворяет указанным выше условиям, так что имеет место критический случай и порождающая система* (1) *э-дихотомична на* R_+ *и* R_- *с проекторами* P *и* Q *соответственно, а система* (2) *при произвольных неоднородностях* $f \in BC(R)$ *не имеет ограниченных на всей оси решений. Тогда если выполнено условие*

$$\det B_0 \neq 0 \quad (r = d), \tag{28}$$

то система (14) *э-дихотомична на* R, *а система* (13) *при произвольных* $f \in BC(R)$ *имеет единственное ограниченное на* R *решение в виде равномерно сходящегося при достаточно малых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряда* (17).

Доказательство. В случае, когда $\operatorname{ind} L = r - d = 0$, матрица B_0 будет квадратной. Поэтому из условия (16) следует $P_{N(B_0)} = P_{N(B_0^*)} = 0$, что эквивалентно условию (28). Векторные константы $c_i \in R^r$, которые определялись из формул (23) с точностью до произвольной векторной константы $P_{N(B_0)}c$ $\forall c \in R^r$ из нуль-пространства $N(B_0)$ матрицы B_0, в этом случае определяются однозначно. Поэтому единственным образом определяются коэффициенты ряда (17), а система (13) при произвольных $f \in BC(R)$ имеет единственное ограниченное на R решение, что в свою очередь означает что система (14) э-дихотомична на R.

Примеры. Проиллюстрируем приведенные выше утверждения.

1. Рассмотрим систему (13), в которой

$$A(t) = \operatorname{diag}\{-\operatorname{th} t, -\operatorname{th} t, \operatorname{th} t\}, \qquad A_1(t) = \left\{a_{ij}(t)\right\}_{i,\,j=1}^{3} \in BC(R).$$

Легко проверить, что $X(t) = \operatorname{diag}\{2/(e^t + e^{-t}),\, 2/(e^t + e^{-t}),\, (e^t + e^{-t})/2\}$, а однородная система (1) э-дихотомична на полуосях R_+ и R_- с проекторами $P = \operatorname{diag}\{1, 1, 0\}$ и $Q = \operatorname{diag}\{0, 0, 1\}$ соответственно. Тогда

$$D = 0, \quad D^+ = 0, \quad P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = I_3,$$

$$r = \operatorname{rank} PP_{N(D)} = 2, \quad d = \operatorname{rank} P_{N(D^*)}Q = 1,$$

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & 0 \\ 0 & 2/(e^t + e^{-t}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Неоднородная система (2) с указанной выше матрицей $A(t)$ имеет ограниченные на всей оси решения не при всех неоднородностях, а только при тех $f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \in BC(R)$, которые удовлетворяют условию (5) леммы, принимающему в данном случае вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_3(s)}{e^s + e^{-s}}\, ds = 0 \quad \forall f_1(t) \in BC(R), \quad \forall f_2(t) \in BC(R).$$

Система (14) с указанными выше коэффициентами будет э-трихотомичной на R, если коэффициенты $a_{31}(t), a_{32}(t) \in BC(R)$ возмущающей матрицы $A_1(t)$ удовлетворяют условию (16), где

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H_d^*(t) A_1(t) X_r(t)\, dt = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_{31}(t)}{(e^t + e^{-t})^2}, \frac{a_{32}(t)}{(e^t + e^{-t})^2}\right] dt.$$

Если $a_{31}(t), a_{32}(t) \in BC(R)$ таковы, что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{31}(t)}{(e^t + e^{-t})^2} dt \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{32}(t)}{(e^t + e^{-t})^2} dt \neq 0,$$

то условие (16) или эквивалентное ему условие $\operatorname{rang} B_0 = d = 1$ теоремы 1 выполняется и система (14) будет э-трихотомичной на R. Например, при $a_{31}(t) = \text{const} \neq 0$ или $a_{32}(t) = \text{const} \neq 0$ одно из этих неравенств всегда выполняется и условие (16) имеет место. При этом коэффициенты $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{13}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$, $a_{23}(t)$, $a_{33}(t)$ могут быть произвольными из пространства $BC(R)$. В этом случае ограниченное на R решение системы (13) при произвольной $f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \in BC(R)$ определяется (с точностью до константы из нуль-пространства $N(B_0)$, $\dim N(B_0) = r - \operatorname{rang} B_0 = 1$) в виде ряда (17).

2. Рассмотрим систему (13), в которой

$$A(t) = \operatorname{diag}\{-\operatorname{th} t, \operatorname{th} t\}, \qquad A_1(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{2} \in BC(R).$$

Легко видеть, что $X(t) = \operatorname{diag}\{2/(e^t + e^{-t}), (e^t + e^{-t})/2\}$, а однородная система (1) э-дихотомична на полуосях R_+ и R_- с проекторами $P = \operatorname{diag}\{1, 0\}$ и $Q = \operatorname{diag}\{0, 1\}$ соответственно. Тогда

$$D = 0, \qquad D^+ = 0, \qquad P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = I_2,$$

$$r = \operatorname{rank} PP_{N(D)} = 1, \qquad d = \operatorname{rank} P_{N(D^*)}Q = 1,$$

$$X_r(t) = \operatorname{col}\{2/(e^t + e^{-t}), 0\}, \qquad H_d^*(t) = \{0, 2/(e^t + e^{-t})\}.$$

Проводя элементарные выкладки, находим, что неоднородная система (2) с указанной выше матрицей $A(t)$ имеет ограниченные на всей оси решения не при всех неоднородностях, а только при тех $f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t)\} \in BC(R)$, которые удовлетворяют условию (5), принимающему в данном случае вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s)}{(e^s + e^{-s})} ds = 0 \quad \forall f_1(t) \in BC(R).$$

Система (14) с указанными выше коэффициентами будет э-дихотомичной на R, если коэффициент $a_{21}(t)$ возмущающей матрицы $A_1(t)$ удовлетворяет условию (28) теоремы 2:

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H_d^*(t) A_1(t) X_r(t) dt = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{21}(t)}{(e^t + e^{-t})^2} dt \neq 0.$$

Например, при $a_{21}(t) = \text{const} = 1$ [3, с. 48] это условие всегда выполняется. При этом коэффициенты $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{22}(t)$ могут быть произвольными из пространства $BC(R)$. В этом случае единственное ограниченное на R решение системы (13) при произвольной $f(t) = \operatorname{col}\{f_1(t), f_2(t)\} \in BC(R)$ однозначно определяется в виде ряда (17).

Замечание. В случае, когда оператор L фредгольмов ($\operatorname{ind} L = 0$, $r = d$), условие (28) э-дихотомии на всей оси системы (14) получено в [12]. При этом для доказательства э-дихотомии использовался иной подход, который не позволяет строить ограниченное на всей оси решение системы (13). В случае, когда условие (16) или условие (28) не выполняется, ограниченное на всей оси решение системы (13) необходимо искать в виде ряда (17) со степенями $1/\varepsilon$, выше первой.

1. *Coppel W. A.* Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1978. – **629**. – 98 p.
2. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
4. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. – 1999. – **2**, № 1. – P. 3 – 10.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 320 с.
6. *Rao C. R., Mitra S. K.* Generalized inverse of matrices and its applications. – New York: Wiley, 1971.
7. *Boichuk A. A.* Dichotomy, trichotomy and solutions of nonlinear systems bounded on R // Applications of Mathematics in Enginiering'26 (Sozopol, Bulgaria, 13 – 20 June 2000). – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 9 – 15.
8. *Elaidy S., Hajek O.* Exponential trichotomy of differential systems // J. Math. Anal. and Appl. – 1988. – **123**, № 2. – P. 362 – 374.
9. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 168 – 173.
10. *Sacker R. J.* The splitting index for linear differential systems // J. Different. Equat. – 1979. – **33**. – P. 368 – 405.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3 – 80.
12. *Zeng W. Y.* Exponential dichotomics of linear systems with small parameter // Ann. Different. Equat. – 1995. – **11**, № 2. – P. 249 – 253.

Получено 28.12.2000