УДК 519.21

Р. Г. Сафарян, канд. физ.-мат. наук (Ереван. пед. ин-т)

МАРТИНГАЛ МАККИНА, СВЯЗАННЫЙ С ОДНОРОДНЫМИ *R-D*-СИСТЕМАМИ

The analog of the McKean martingale is constructed for branching processes with a continuous phase space.

Побудовано аналог мартингала Маккiна для гiллястих процесiв з неперервним фазовим простором.

Согласно терминологии, принятой в работах [1, 2], под R-D-системой понимается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\partial u_t(x)/\partial t = Lu_t(x) + f(x, u_t(x)), \tag{1}$$

$$u_t \in \mathfrak{D}, \quad t \geq 0, \quad u_0(x) = g(x), \tag{2}$$

где L — инфинитезимальный (сильный) оператор однородного марковского процесса X_t со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{E})$; $\mathfrak{D}$ — область определения оператора L (предполагается, что множество $\mathfrak{D}$ плотно в топологии поточечной ограниченной сходимости в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ всех ограниченных $\mathfrak{E}$–измеримых функций с равномерной нормой

$$\|g\| = \sup_{x \in E} |g(x)|, \quad g \in \mathfrak{B});$$

а $f(x, u)$ как функция от u имеет вид

$$f(x, u) = c \sum_{k=0}^{\infty} p_k(u^k - u),$$
$$c = c(x) \geq 0, \quad p_k = p_k(x) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \tag{3}$$

или

$$f(x, u) = \alpha u - \beta u^2 + \int_0^{\infty} (1 - e^{-uv} - uv)\Lambda(dv),$$
$$\alpha = \alpha(x), \quad \beta = \beta(x) \geq 0, \tag{4}$$
$$\Lambda(dv) \;\; \Lambda(x, dv) \geq 0, \quad \int_0^{\infty} (v^2 \wedge v)\Lambda(dv) < \infty.$$

С функцией f вида (4) уравнение (1) рассматривалось в работе [1], а с f вида (3) — в [2].

R-D-систему (1) будем называть однородной (точнее, однородной по пространству), если $f(x, u)$ не зависит от $x \in E$,

$$f(x, u) = f(u), \tag{5}$$

а X_t — процесс с независимыми приращениями со значениями в линейном пространстве E.

Здесь мы рассмотрим случай, когда $E = R^1$ — вещественная прямая, $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра,

$$Lu(x) = au'(x) + bu''(x) + \int_{-\infty}^{\infty} [u(x+y) - u(x) - yu'(x)]\,\Pi(dy), \tag{6}$$

$$b \geq 0, \quad \Pi(dy) \geq 0, \quad \Pi\{0\} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Pi(dy) < \infty.$$

Более того, относительно меры Π предположим выполненным двустороннее условие Крамера: найдутся числа $s^- \leq 0 \leq s^+$, $s^- < s^+$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge y^2) e^{sy}\, \Pi(dy) < \infty \tag{7}$$

при $s^- < s < s^+$.

В качестве множества $\mathfrak{D}$ рассмотрим множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, исчезающих на $\pm\infty$ вместе со своими первыми двумя производными (см. по этому поводу замечание 2 в [1]). При этом тривиально выполнено условие (9) из [1].

Как показано в [2], решение уравнения (1), (2) с f вида (3) и $0 \leq q \leq 1$ представимо в виде

$$u_t(x) = \mathbb{E}_x \prod_{k=1}^{\nu(t)} g(x_k(t)),$$

где $\mathbb{E}_x$ — условное среднее при условии $X(0) = x$; $X_1(t)$, $X_2(t)$, ... —независимые копии процесса $X(t)$; $\nu(t)$ — число частиц в ветвящемся процессе, определяемом функцией $f(u)$ вида (3) (см., например, [3]) и не зависящем от последовательности $X_k(t)$, $k \geq 1$.

Если же f имеет вид (4), то решение уравнения (1), (2) с $g \geq 0$ представимо в виде [1]

$$u_t(x) = -\log \mathbb{E}_x \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy) g(y) \right\}, \tag{8}$$

где $M_t(dy)$ — так называемый ветвящийся процесс Иржины с множеством типов E. Решение (7) единственно в некотором классе $\mathcal{K}$, подробное описание которого содержится в [1].

Маккин в [4] отметил для случая

$$Lu = \frac{1}{2} u'', \quad f(u) = u^2 - u, \tag{9}$$

что при любом s процесс

$$\mathfrak{Z}_t = e^{-t} \sum_{k=1}^{\nu(t)} e^{-sX_k(t) - s^2 t/2}$$

образует мартингал, и использовал это обстоятельство для доказательства теорем типа Колмогорова — Петровского — Пискунова. Его конструкция тривиально переносится с ситуации (9) на (3), (6), (7), а именно, мартингалом является случайный процесс

$$\mathfrak{Z}_t = e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{\nu(t)} e^{sX_k(t) - L(s)t},$$

где $s^- < s < s^+$,

$$L(s) = as + bs^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sy} - 1 - sy)\Pi(dy),$$

$\alpha = c\left[\sum_{k=0}^{\infty} k_{p_k} - 1\right]$ (предполагается, что $\alpha < \infty$).

Цель настоящей статьи — построить аналогичный мартингал для R-D-системы (1), (2), (4). Напомним, что $M_t(dy)$ — процесс Иржины из (7), α — параметр из (4).

Теорема 1. *В условиях* (4) – (7) *процесс*

$$\mathfrak{Z}_t = e^{-\alpha t - L(s)t} \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)e^{sy} \tag{10}$$

при $s^- < s < s^+$ *образует мартингал.*

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\mathbb{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)e^{sy} < \infty \tag{11}$$

для всех $s \in (s^-, s^+)$. С этой целью обозначим через T_t полугруппу операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, обычным образом порожденную марковским процессом X_t, т. е. $T_t g(x) = \mathbb{E}_x g(X_t)$, $g \in \mathfrak{B}$, $x \in R^1$, и покажем, что

$$\mathbb{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)g(y) = e^{\alpha t}T_t g(x), \quad x \in R^1, \quad g \in \mathfrak{B}. \tag{12}$$

Как уже отмечалось, в [1] показано, что правая часть (8) является единственным в классе $\mathcal{K}$ решением уравнения (1), (2). Там же показано, что правая часть (8) удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$u_t = T_t g + \int_0^t T_{t-s}[f(u_s)]ds, \tag{13}$$

в котором $T_{t-s}[f(u_s)]$ следует понимать как результат действия оператора T_{t-s} на функцию $f_s(x) = f(u_s(x))$.

Не ограничивая общности, будем считать функцию g из (12) неотрицательной. Для $\lambda > 0$ обозначим

$$u_t^\lambda(x) = -\log \mathbb{E}_x \exp\left\{-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)g(y)\right\}$$

и заметим, что

$$\mathbb{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)g(y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} u_t^\lambda(x). \tag{14}$$

Согласно (13) имеем

$$u_t^\lambda(x) = \lambda T_t g(x) + \int_0^t T_{t-s}[f(u_s^\lambda(x))](x)ds. \tag{15}$$

Кроме того, в [1] установлено, что $0 \le u_t(x) \le e^{\alpha t}T_t g(x)$, и, стало быть,

$$0 \le u_t^\lambda(x) \le \lambda e^{\alpha t} T_t g(x). \tag{16}$$

Обозначим левые части (12), (14) через $v_t(x)$. Неравенство (16), в частности, показывает, что $u_s^\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \downarrow 0]{} 0$ равномерно по $x \in R^1$, $0 \le s \le t$ для всех $t > 0$. Отсюда и из (4) вытекает, что $f(u_s^\lambda(x)) / \lambda \xrightarrow[\lambda \downarrow 0]{} \alpha v_s(x)$ также равномерно по $x \in R^1$, $0 \le s \le t$ для всех $t > 0$. После деления обеих частей (14) на λ и перехода к пределу при $\lambda \downarrow 0$ находим

$$v_t(x) = T_t g(x) + \alpha \int_0^t T_{t-s} v_s(x) ds. \tag{17}$$

Но уравнение (17) имеет единственное равномерно ограниченное по $x \in R^1$ и локально ограниченное по $t \ge 0$ решение $v_t(x) = e^{\alpha t} T_t g(x)$. Равенство (12) доказано.

Используя предельный переход по монотонным последовательностям функций из $\mathfrak{B}$, получаем, что (12) справедливо для всех неотрицательных $\mathfrak{B}$-измеримых функций (при этом, разумеется, для обеих частей (12) допускается значение $+\infty$). Теперь, чтобы убедиться в справедливости (11), достаточно проверить конечность среднего $\mathbb{E}_x \exp\{sX_t\}$ при $s^- < s < s^+$. Но, как следует из формулы Леви — Хинчина и принципа аналитического продолжения, $\mathbb{E}_x \exp\{sX_t\} = e^{sx} e^{tL(s)}$ для тех s, для которых определен символ $L(s)$ оператора L вида (6), т. е. для $s^- < s < s^+$. Этим доказано не только соотношение (11), но и установлено равенство

$$\mathbb{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, e^{sy} = e^{sx} e^{(\alpha + L(s))t}. \tag{18}$$

Теперь из (18) легко вытекает утверждение теоремы. Действительно, пусть поток σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$ порожден процессом Иржины $M_t(dy)$. Так как процесс $M_t(dy)$ — однородный марковский и ветвящийся, то

$$\mathbb{E}_x \left[\int_{-\infty}^{\infty} M_{t+u}(dy) g(y) \mid \mathfrak{F}_t \right] = \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy) \mathbb{E}_z \int_{-\infty}^{\infty} M_u(dy) g(y) \quad \mathbb{P}_x\text{- п. н.}$$

для всех $x \in R^1$ и тех неотрицательных $\mathfrak{B}$-измеримых функций g, для которых

$$\mathbb{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy) g(y) < \infty, \quad \forall\, x \in R^1, \quad t \ge 0.$$

Отсюда с учетом (10), (18) при $s^- < s < s^+$ имеем

$$\mathbb{E}_s(\mathfrak{Z}_{t+u} \mid \mathfrak{F}_t) = e^{-\alpha(t+u) - L(s)(t+u)} \mathbb{E}_x \left[\int_{-\infty}^{\infty} M_{t+u}(dy) e^{sy} \mid \mathfrak{F}_t \right] =$$

$$= e^{-\alpha(t+u) - L(s)(t+u)} \int_{-\infty}^{\infty} M_t(dz) e^{sz} e^{\alpha u + L(s)u} = \mathfrak{Z}_t \quad \mathbb{P}_x\text{- п. н.},$$

что и требовалось доказать.

В заключение установим однородность процесса Иржины $M_t(.)$ по пространству для систем вида (1), (2), (4), (6).

Теорема 2. *В условиях* (4), (5), (6) *условное распределение меры* $M_t(dy)$ *при условии* $X_0 = x$ *совпадает с условным распределением меры* $M(dy - x)$ *при условии* $X_0 = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\mathbb{E}_x \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, g(y)\right\} = \mathbb{E}_0 \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, g(x+y)\right\} \tag{19}$$

для всех $x \in R^1$, $g \in \mathfrak{D}$, $g \geq 0$.

Зафиксируем $x_0 \in R^1$ и обозначим $\hat{u}_t(x) = u_t(x + x_0)$, $\hat{g}(x) = g(x + x_0)$, где $g \in \mathfrak{D}$, $g \geq 0$, $u_t(x)$ определено по (8).

Как показано в [1], функция $u_t(x)$ удовлетворяет уравнению (1), (2), а из (5) следует, что и функция $\hat{u}_t(x)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $\hat{u}_0(x) = \hat{g}(x)$. Следовательно [1],

$$\hat{u}_t(x) = -\log \mathbb{E}_x \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, \hat{g}(y)\right\}.$$

Полагая здесь $x = 0$, получаем (19) с x_0 вместо x. Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия теоремы 2 отметим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $u_t(x)$ — *решение задачи* (1), (2) *в условиях* (4) – (7) *с* $g(x) = e^{sx}$, $s^- < s < s^+$. *Тогда*

$$-\log \mathbb{E}_x e^{-\mathfrak{Z}_t} = u_t(x - ct), \tag{20}$$

где

$$c = \alpha/s + L(s)/s. \tag{21}$$

Доказательство. Согласно (8), (19), (21) имеем

$$u_t(x + ct) = -\log \mathbb{E}_{x+ct} \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, e^{sy}\right\} =$$

$$= -\log \mathbb{E}_x \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, e^{s(y+ct)}\right\} = -\log \mathbb{E}_x \exp\left\{-e^{-\alpha t - L(s)t}\int_{-\infty}^{\infty} M_t(dy)\, e^{sy}\right\},$$

что и доказывает (20).

Именно это утверждение (вернее, его дискретный аналог) использовал Маккин в [4].

1. *Сафарян Р. Г.* *R–D* системы и ветвящиеся процессы Иржины // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №2. – С. 162 – 167.
2. *Сафарян Р. Г.* Ветвящиеся диффузионные процессы и системы дифференциальных уравнений реакция-диффузия // Мат. сб. – 1987. – **134**, №4. – С. 530 – 545.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
4. *McKean H. P.* Application of Brownian Motion to the Equation of Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**. – P.323 – 331.

Получено 25. 06. 91