УДК 517.956

С. А. Алдашев, канд. физ.-мат. наук (Алматин. ин-т инженеров ж.-д. трансп.)

О КОРРЕКТНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДАРБУ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

It is proved that the multidimensional Darboux problems for the wave equation are correct in the domain $D_\varepsilon \subset E_{m+1}$ bounded by the surfaces $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$, and the plane $t = 0$, $0 \le \varepsilon < 1$. The behavior of the obtained solutions is studied for $\varepsilon \to 0$.

В області $D_\varepsilon \subset E_{m+1}$, обмеженій поверхнями $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$ і $t = 0$, $0 \le \varepsilon < 1$, доведена коректність багатовимірних задач Дарбу для хвильового рівняння, а також вивчена поведінка одержаних розв'язків при $\varepsilon \to 0$.

1. Постановка задач и результаты. Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $(x_1, \dots, x_m)$, $0 \le t \le (1 - \varepsilon)/2$, $0 \le \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S^ε соответственно.

В области S_ε рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \ge 2$.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу для уравнения (1) рассмотрены следующие задачи [1, 2]:

Задача 1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S^\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S^\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x). \tag{3}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x) \tag{4}$$

или

$$u_t\Big|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u\Big|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{5}$$

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \ge 0$, $0 \le \theta_1 < 2\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n + m - 3)!\,(2n + m - 2)$. Если $m = 2$, то $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система функций $\{\sin n\theta_1, \cos n\theta_1\}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots,$ — пространства Соболева, а $\tilde{S}^\varepsilon = \{(r, \theta) \in S^\varepsilon,\ \varepsilon < r < (1 + \varepsilon)/2\}$.

Справедлива следующая лемма [3].

Лемма 1. *Если $f(r, \theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l > m - 1$, то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{f}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{6}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\tau}_{\varepsilon n}^k(r)$, $\bar{\nu}_{\varepsilon n}^k(r)$, $\bar{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r)$ и $\bar{\sigma}_{1n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (6) соответственно функций $\tau_\varepsilon(r, \theta)$, $\nu_\varepsilon(r, \theta)$, $\sigma_\varepsilon(r, \theta)$ и $\sigma_1(r, \theta)$.

Введем множества функций

$$B_0^l(S^\varepsilon) = \Big\{ f(r, \theta)\colon f \in W_2^l(S^\varepsilon), \ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \Big(\|\bar{f}_n^k(r)\|^2_{C^2((\varepsilon,(1+\varepsilon)/2))} +$$

$$+ \|\bar{f}_n^k(r)\|^2_{C^2([\varepsilon,(1+\varepsilon)/2])} \Big) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, \ l > m-1 \Big\},$$

$$\overline{W}_\alpha^l(S^0) = \{ f \in W_2^l(S^0)\colon \ f(r, \theta) = r^\alpha f(r, \theta), \ \alpha \geq 0 \},$$

$$\overline{W}_{\alpha,\varepsilon}^l(S^\varepsilon) = \{ f_\varepsilon \in W_2^l(S^\varepsilon)\colon \ f_\varepsilon(r, \theta) = \varepsilon^\alpha \bar{f}_\varepsilon(r, \theta), \ \alpha \geq 0 \},$$

$$C_n(D_0) = \{ u \in C(\overline{D}_0) \cap C^1(D_0 \cup S^0) \cap C^2(D_0)\colon \ u(r, \theta, t) =$$

$$= (r^2 + t^2)^{n/2} \bar{u}(r, \theta, t) \}.$$

Если $u \in C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, то задачи 1 и 2 взаимно сопряжены.

Пусть $u \in C(\overline{D}_0) \cap C^1(D_0 \cup S^0) \cap C^2(D_0)$. Тогда в [4] доказано, что задача 1 имеет бесчисленное множество решений. Примеры неединственности решения задачи 1 построены в [4 – 7]. В [4] также показано, что решение задачи 2 в классе $C^1(\overline{D}_0) \cap C^2(D_0)$ единственно. Если же $u \in C(\overline{D}_0) \cap C^1(D_0 \cup S^0) \cap C^2(D_0)$, то задача 2 является однозначно разрешимой, но $u \notin C^1(D_0 \cup S^0 \cup \{0\})$. В работе [8] установлено, что при $\varepsilon > 0$ для $u \in C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^0) \cap C^2(D_\varepsilon)$ задачи 1 и 2 корректны.

Отметим, что приведенные результаты получены в случае, когда граничные данные задачи 1 $(\varepsilon \geq 0)$ и задачи 2 $(\varepsilon > 0)$ принадлежат классу $B_0^l(S^\varepsilon)$ [4, 6].

В данной статье указанные выше ограничения на заданные функции снимаются, а именно при $\varepsilon = 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\tau_0(x) \in \overline{W}_n^l(S^0)$, $\nu_0(x) \in \overline{W}_{n-1}^l(S^0)$, $\sigma_0(x) \in \overline{W}_n^l(\tilde{S}^0)$, $l > m + 9$, *то задача* 1 *имеет единственное решение в классе* $C_n(\overline{D}_0)$.

Теорема 2. 1^0. *Если* $\tau_0(x) \in \overline{W}_{n+m-2}^l(S^0)$, $\sigma_1(x) \in W_2^l(S^0 \setminus \tilde{S}^0)$, $l > m + 5$, *то задача* (1), (4) *имеет единственное решение в классе* $C(\overline{D}_0) \cap C^2(D_0)$.

2^0. *Пусть* $\nu_0(x) \in \overline{W}_{n+m-1}^l(S^0)$, $\sigma_1(x) \in W_2^l(S^0 \setminus \tilde{S}^0)$, $l > m + 5$. *Тогда задача* (1), (5) *разрешима, причем единственным образом, если* $u \in C_n(\overline{D}_0) \cap C^1(D_0 \cup \cup S^0) \cap C^2(D_0)$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Если* $\tau_\varepsilon(x) \in \overline{W}_{n,\varepsilon}^l(S^\varepsilon)$, $\nu_\varepsilon(x) \in \overline{W}_{n-1,\varepsilon}^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon(x) \in \overline{W}_{n,\varepsilon}^l(\tilde{S}^\varepsilon)$, $l > > m + 9$, *то задача* 1 *в классе функций* $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ *имеет единственное решение.*

Теорема 4. 1^0. *Пусть* $\tau_\varepsilon(x) \in \overline{W}_{n+m-2,\varepsilon}^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_1(x) \in W_2^l(S^\varepsilon \setminus \tilde{S}^\varepsilon)$, $l > m + 5$. *Тогда если* $u \in C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, *то задача* (1), (4) *однозначно разрешима, при этом для каждого натурального* n *существуют* $\sigma_1(r, \theta) \equiv 0$, $\tau_\varepsilon(r, \theta) =$

$= \overline{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$ *такие, что выполняется неравенство*

$$|\sigma_\varepsilon(r, \theta)| \geq \frac{c|Y_{n,m}^k(\theta)|}{r^{n+m-2}}. \tag{7}$$

2^0. *Если* $\nu_\varepsilon(x) \in \overline{W}_{n+m-1}^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_1(x) \in W_2^l(S^\varepsilon \backslash \tilde{S}^\varepsilon)$, $l > m+5$ *и* $u \in C(\overline{D}_\varepsilon) \cap \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, *то задача* (1), (5) *разрешима, причем единственным образом, при этом для каждого* n *найдутся* $\sigma_1(r, \theta) \equiv 0$, $\nu_\varepsilon(r, \theta) = = \overline{\nu}_n^k(r) \times \times Y_{n,m}^k(\theta)$, *и справедлива оценка*

$$\left| \frac{m-1}{2}\sigma_\varepsilon(r, \theta) + r\frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial r} \right| \geq \frac{c|Y_{n,m}^k(\theta)|}{r^{n+m-1}}, \tag{8}$$

где $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* n.

Из оценок (7), (8) вытекает, что решения задач (1), (4) и (1), (5) на поверхности S_ε при $\varepsilon \to 0$ могут иметь "особенности" порядка ε^{n+m-2} и ε^{n+m-1} соответственно.

Отметим, что аналогичная оценка вида (7) при $m = 2$ получена в [9].

2. Доказательство теорем в случае $\varepsilon = 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0,$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \tag{9}$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}_0) \cap \cap C^2(D_0)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{v}_n^k(r, t)\, Y_{n,m}^k(\theta), \tag{10}$$

где $\overline{v}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (10) в (9), легко убедиться в том, что

$$\overline{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{v}_{nr}^k - \overline{v}_{ntt}^k - \frac{\lambda}{r^2}\overline{v}_n^k = 0, \quad \lambda = n(n+m-2). \tag{11}$$

Произведя замену переменной по формуле $\overline{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$ и положив затем $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$, из (11) будем иметь

$$v_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda]}{4(\xi+\eta)^2} v_n^k = 0. \tag{12}$$

Тогда краевые условия (2) для функции $v_n^k(\xi, \eta)$ с учетом леммы 1 примут вид

$$v_n^k(\xi, \xi) = \tau_{0n}^k(\xi), \quad v_n^k(\xi, 0) = \varphi_{0n}^k(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1/2, \tag{13}$$

где

$$\tau_{0n}^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\overline{\tau}_{0n}^k(2\xi), \quad \varphi_{0n}^k(\xi) = \xi^{(m-1)/2}\overline{\sigma}_{0n}^k(\xi).$$

Используя общее решение уравнения (12) (см. [10]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (12) имеет вид

$$v_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau_{0n}^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau_{0n}^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \Big[v_{0n}^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_{0n}^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\Big]d\xi_1, \quad (14)$$

где

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\Big[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\Big]$$

— функция Римана уравнения (12) [11], а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + (m-3)/2$,

$$v_{0n}^k(\xi_1) = \frac{\partial v_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1} = \Big(\frac{\partial \xi_1}{\partial N'}\frac{\partial v_n^k}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial N'}\frac{\partial v_n^k}{\partial \xi_1}\Big)\Big|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из уравнения (14) при $\eta = 0$ получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$g_{0n}^k(\xi) = \int_0^\xi v_{0n}^k(\xi_1)P_\mu\Big(\frac{\xi_1}{\xi}\Big)d\xi_1, \quad (15)$$

где

$$g_{0n}^k(\xi) = \sqrt{2}\,\varphi_{0n}^k(\xi) - \frac{\tau_{0n}^k(\xi)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\xi \frac{\tau_{0n}^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\Big(\frac{\xi_1}{\xi}\Big)d\xi_1.$$

Уравнение (15) обратимо по формуле [12, с. 541–542]

$$\nu_{0n}^k(\xi) = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi_1(\xi^2-\xi_1^2)^{-1/2}P'_\mu\Big(\frac{\xi}{\xi_1}\Big)\frac{\partial}{\partial \xi_1}g_n^k(\xi_1)\,d\xi_1. \quad (16)$$

Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \quad (17)$$

является решением задачи (1), (2), где $v_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, находятся по формуле (14), в которой $v_{0n}^k(\xi)$ определяется из (16).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau_0(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta)$, теорему 37.9 из [12] и формулы [13]

$$\frac{d^m}{dz^m}P_\mu(z) = \frac{\Gamma(\mu+m+1)}{2^m\Gamma(\mu-m+1)}F\Big(1+m+\mu, m-\mu, 1+m, \frac{1-z}{2}\Big), \quad (18)$$

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta}\Big[1+\frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+O(z^{-2})\Big], \quad (19)$$

а также оценки [3]

$$k \le cn^{m-2}, \quad \Big|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\Big| \le cn^{m/2-1+l}, \quad (20)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция, α и β — произвольные действительные числа, $j = \overline{1, m-1}$, $l = 0, 1, \ldots$, нетрудно показать, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ в виде (17) принадлежит классу $C_n(D_0)$.

Таким образом, теорема 1 для задачи (1), (2) доказана: в случае задачи (1), (3) ее справедливость устанавливается аналогично.

Теперь перейдем к доказательству утверждения 1^0 теоремы 2. Для этого рассмотрим задачу (1), (4). Решение этой задачи, как и в случае задачи (1), (2), будем искать в виде ряда (10). Тогда ее коэффициенты будут удовлетворять уравнению (12). При этом условие (4) для функций $\upsilon_n^k(\xi, \eta)$ с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\upsilon_n^k(\xi, \xi) = \tau_{0n}^k(\xi), \quad \upsilon_n^k\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \psi_{1n}^k(\eta), \tag{21}$$

где $\psi_{1n}^k(\eta) = \left(\frac{1}{2} + \eta\right)^{(m-1)/2} \overline{\sigma}_{1n}^k\left(\frac{1}{2} + \eta\right)$, $0 \le \eta \le 1/2$.

Далее, используя решение задачи Гурса для уравнения (12) [10]

$$\upsilon_n^k(\xi, \eta) = \varphi_{0n}^k(\xi) - \int_0^\eta R\left(\frac{1}{2}, \eta_1; \xi, \eta\right) \frac{\partial \psi_{1n}^k}{\partial \eta_1} d\eta_1 - \\ - \int_{1/2}^{\xi} \varphi_{0n}^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} R(\xi_1, 0; \xi, \eta)\, d\xi_1, \tag{22}$$

задачу (12), (21) сводим к интегральному уравнению

$$f_n^k(\xi) = \varphi_{0n}^k(\xi) + \int_\xi^{1/2} \varphi_{0n}^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} P_\mu\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right) d\xi_1, \tag{23}$$

где

$$f_n^k(\xi) = \tau_{0n}^k(\xi) + \int_0^\xi P_\mu\left[\frac{\frac{1}{2}\eta_1 + \xi^2}{\xi(\frac{1}{2} + \eta_1)}\right] \frac{\partial \psi_{1n}^k}{\partial \eta_1} d\eta_1.$$

Уравнение (23) — частный случай уравнения (35.17) из [12], которое обратимо в виде (см. также [14])

$$\varphi_{0n}^k(\xi) = f_n^k(\xi) + \int_\xi^{1/2} \frac{1}{\xi_1} P'_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) f_n^k(\xi_1)\, d\xi_1. \tag{24}$$

Следовательно, функция (17) является решением задачи (1), (4), где $\upsilon_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, определяется по формуле (22), в которой $\varphi_{0n}^k(\xi)$ находятся из (24).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau_0(r, \theta)$, $\sigma_1(r, \theta)$ и теорему 35.2 из [12], а также формулы (18) – (20), можно показать, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ (17) принадлежит классу $u \in C(\overline{D}_0) \cap C^2(D_0)$. На этом завершается доказательство теоремы 2 для задачи (1), (4).

Справедливость теоремы 2 для задачи (1), (5) устанавливается аналогично.

3. Доказательство теорем в случае $\varepsilon > 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Решение этой задачи будем искать также в виде ряда (10). Тогда ее коэффициенты будут удовлетворять уравнению (12). При этом краевые условия (2) для функций $\upsilon_n^k(\xi, \eta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, запишутся в виде

$$
\upsilon_n^k(\xi, \xi) = \tau_{\varepsilon n}^k(\xi), \quad \upsilon_n^k\Big(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varphi_{\varepsilon n}^k(\xi), \tag{25}
$$

$$
\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi) = \Big(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\Big)^{(m-1)/2} \overline{\sigma}_{\varepsilon n}^k\Big(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\Big), \quad \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}.
$$

Таким образом, задача (1), (2) сводится к задаче (12), (25).

Далее, используя решение (14) задачи Коши для уравнения (12) при $\eta = \varepsilon/2$ с учетом краевых условий (25), получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$
g_n^k(\xi) = \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} \nu_{\varepsilon n}^k(\xi_1) P_\mu\Big[\frac{\xi_1 + \xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi + \varepsilon/2)} \Big] d\xi_1,
$$

где

$$
g_n^k(\xi) = \sqrt{2}\,\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi) - \frac{\tau_{\varepsilon n}^k(\varepsilon/2)}{\sqrt{2}} - \frac{\tau_{\varepsilon n}^k(\xi)}{\sqrt{2}} +
$$

$$
+ \frac{\xi - \varepsilon/2}{\sqrt{2}(\xi + \varepsilon/2)} \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} \frac{\tau_{\varepsilon n}^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\Big(\frac{\xi_1^2 + \xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi + \varepsilon/2)} \Big) d\xi_1,
$$

которое дифференцированием сводится к уравнению Вольтерра второго рода

$$
\frac{dg_n^k}{dx} = \nu_{\varepsilon n}^k(\xi) + \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} \nu_{\varepsilon n}^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} k_\mu(\xi, \xi_1)\, d\xi_1, \quad k_\mu(\xi, \xi_1) = P_\mu\Big(\frac{\xi_1^2 + \xi\varepsilon/2}{\xi_1(\xi + \varepsilon/2)} \Big).
$$

Обратив последнее уравнение, решение задачи (12), (25) из (14) можно получить в явном виде (см. также [14]):

$$
\upsilon_n^k(\xi, \eta) = \tau_{\varepsilon n}^k(\eta) + \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} \int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta} \frac{\tau_{\varepsilon n}^k(\xi_1)}{\xi_1} P'_\mu\Big(\frac{\xi\eta + \xi_1^2}{(\xi + \eta)\xi_1} \Big) d\xi_1 +
$$

$$
+ \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} \Big[P_\mu\Big(\frac{2\xi\eta + \xi_1\varepsilon + (\xi - \eta)(\xi_1 - \varepsilon/2)}{(\xi + \eta)(\xi_1 + \varepsilon/2)} \Big) +
$$

$$
+ \frac{\operatorname{sgn}(\xi_1 - \eta) - 1}{2} P_\mu\Big(\frac{2\xi\eta + \xi_1\varepsilon - (\xi - \eta)(\xi_1 - \varepsilon/2)}{(\xi + \eta)(\xi_1 + \varepsilon/2)} \Big) \Big] \frac{d\psi_{\varepsilon n}^k}{d\xi_1} d\xi_1. \tag{26}
$$

Следовательно, функция (17) является решением задачи (1), (2), где $\upsilon_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, определяются из (26).

Теперь перейдем к задаче (1), (3). Ее решение также можно получить в виде ряда (17), где $\upsilon_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, является решением уравнения (12), удовлетворяющим краевому условию

$$
\Big(\frac{\partial \upsilon_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial \upsilon_n^k}{\partial \eta} \Big)\Big|_{\xi = \eta} = \nu_{\varepsilon n}^k(\xi), \quad \upsilon_n^k\Big(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varphi_{\varepsilon n}^k(\xi), \tag{27}
$$

$$
\nu_{\varepsilon n}^k(\xi) = \sqrt{2}\,(2\xi)^{(m-1)/2}\, \overline{\nu}_{\varepsilon n}^k(2\xi), \quad \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}.
$$

Задача (12), (27) решается аналогично задаче (12), (25), и ее решение записывается в виде [14]

$$
\upsilon_n^k(\xi, \eta) = P_\mu\Big(\frac{4\xi\eta + \varepsilon^2}{2(\xi + \eta)\varepsilon} \Big) \varphi_{\varepsilon n}^k\Big(\frac{\varepsilon}{2} \Big) + \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} P_\mu\Big(\frac{\xi\eta + \xi_1^2}{(\xi + \eta)\xi_1} \Big) \nu_{\varepsilon n}^k(\xi_1)\, d\xi_1 +
$$

$$+\int_{\varepsilon/2}^{\xi}\Big[P_\mu\Big(\frac{2\xi\eta+\xi_1\varepsilon+(\xi-\eta)(\xi_1-\varepsilon/2)}{(\xi+\eta)(\xi_1+\varepsilon/2)}\Big)+$$

$$+\frac{1-\operatorname{sgn}(\xi_1-\eta)}{2}P_\mu\Big(\frac{2\xi\eta+\xi_1\varepsilon-(\xi-\eta)(\xi_1-\varepsilon/2)}{(\xi+\eta)(\xi_1+\varepsilon/2)}\Big)\Big]\frac{d\varphi_{\varepsilon n}^k}{d\xi_1}\,d\xi_1. \tag{28}$$

Теперь изучим поведение задачи 1 при $\varepsilon\to 0$. Из представления решения (17) этой задачи видно, что для этого достаточно исследовать поведение функции (26) в случае задачи (1), (2) и (28) в случае задачи (1), (3). Из (26) нетрудно получить, что если $\tau_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^n$ и $\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^{n-1}$, то $\nu_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^{n-1}$ при $\varepsilon\to 0$. А из (28) следует, что если $\nu_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^{n-1}$ и $\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^n$, то $\tau_{\varepsilon n}^k(\xi)\sim\varepsilon^n$ при $\varepsilon\to 0$.

Из указанных выше фактов и из ограничения на заданные функции $\tau_\varepsilon(r,\theta)$, $\nu_\varepsilon(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, а также из формул (18) – (20) вытекает справедливость теоремы 3.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 4. Если решение задачи (1), (4) будем искать в виде ряда (17), то она сведется к решению задачи (12), (21), где $\varepsilon/2\le\xi\le 1/2$, $\varepsilon/2\le\eta\le 1/2$.

Далее, используя решение задачи Гурса для уравнения (12)

$$v_n^k(\xi,\eta)=\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)-\int_{\varepsilon/2}^{\eta}R\Big(\frac{1}{2},\eta_1;\xi,\eta\Big)\frac{\partial\psi_{1n}^k}{\partial\eta_1}\,d\eta_1-$$

$$-\int_{1/2}^{\xi}\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}R\Big(\xi_1,\frac{\varepsilon}{2};\xi,\eta\Big)\,d\eta_1, \tag{29}$$

задачу (12), (21) сводим к уравнению

$$f_n^k(\xi)=\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)+\int_{\xi}^{1/2}\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}P_\mu\Big(\frac{\xi^2+\xi_1\varepsilon/2}{\xi(\xi_1+\varepsilon/2)}\Big)\,d\xi_1, \tag{30}$$

где

$$f_n^k(\xi)=\tau_{\varepsilon n}^k(\xi)+\int_{\varepsilon/2}^{\xi}P_\mu\Big[\frac{\frac12\eta_1+\xi^2}{\xi(\frac12+\eta_1)}\Big]\frac{\partial\psi_{1n}^k}{\partial\eta_1}\,d\eta_1.$$

Обратив (30), будем иметь [14]

$$\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)=f_n^k(\xi)+\frac{\xi-\varepsilon/2}{\xi+\varepsilon/2}\int_{\xi}^{1/2}\frac{1}{\xi_1}P'_\mu\Big[\frac{\xi_1^2+\xi_1\varepsilon/2}{\xi(\xi_1+\varepsilon/2)}\Big]f_n^k(\xi_1)\,d\xi_1. \tag{31}$$

Таким образом, ряд (17) является решением задачи (1), (4), где $v_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, определяется из (29), в которой $\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)$ находятся из (31). При этом с учетом гладкости граничных данных, а также формул (18) – (20) нетрудно показать, что полученное решение $u\in C(\overline{D}_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При* $z\ge 1$, $\mu\ge 3$ *функции* $P_\mu(z)$ *и* $P'_\mu(z)$ *являются возрастающими и удовлетворяют неравенствам*

$$P_\mu(z)>\frac{z^\mu}{2},\quad P'_\mu(z)>\frac{\mu(\mu+1)z^{\mu-1}}{4}.$$

Справедливость леммы 2 легко следует из интегральных представлений функции Лежандра и ее производной:

$$P_\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\mu \, d\varphi,$$

$$P'_\mu(z) = \mu P_{\mu-1}(z) + \frac{\mu(\mu+1)}{4}\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\mu-2} \sin^2\varphi \, d\varphi.$$

Далее, если возьмем $\sigma_1(r,\theta) \equiv 0$, $\tau_\varepsilon(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, то решение задачи (1), (4) можно искать в виде $u(r,\theta,t) = \bar{v}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда справедливость оценки (7) для каждого n следует из формулы (31) с учетом леммы 2.

Таким образом, первая часть теоремы 4 доказана; вторая часть доказывается аналогично.

Следует заметить, что при $\varepsilon \to 0$ теорема 3 согласуется с результатами теоремы 1. Для теорем 2 и 4 также справедлив аналогичный факт.

В [15] доказано существование классических решений задачи 2 при $m = 2$, удовлетворяющих условиям единственности. Нетрудно заметить, что эти условия единственности выполняются, в частности, и для граничных данных теоремы 2.

Замечание. Отметим, что в доказанных теоремах принадлежность заданных функций к указанным классам существенна. При нарушении этих условий в [6] показано, что если $\varepsilon = 0$, то задача 1 может иметь бесчисленное множество решений, а для задачи 2 u_r и u_t при $r \to 0$ имеют особенность порядка r^{-2}, а в случае $\varepsilon > 0$ решение задач 1, 2 может не существовать.

1. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J. Rath. Mech. and Anal. – 1954. – **3**, № 4. – P. 435–446.
2. *Wand Guand Wind.* The Goursat problems in space // Sci. Rec. New ser. – 1957. – **1**, № 5. – P. 7–10.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
4. *Алдашев С. А.* О некоторых краевых задачах для многомерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. – 1982. – **265**, № 6. – С. 1289–1292.
5. *Tong Kwand Chang.* On a boundary value problem for the wave equation // Sci. Rec. New ser. – 1957. – **1**, № 5. – P. 1–2.
6. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 188 с.
7. *Хе Кан Чер.* О неединственности решений некоторых краевых задач для вырождающихся уравнений // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, № 5. – С. 1066–1068.
8. *Алдашев С. А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 3–8.
9. *Popivanov N. I., Schneider M.* The Darboux–problem in R^3 for a Class of Degenerated Hyperbolic Equation // Докл. Болг. Академии наук. – 1988. – **41**, № 11. – С. 7–9.
10. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
11. *Copson E. T.* On the Riemann–Green function // J. Rath. Mech. and Anal. – 1958. – **1**. – P. 324–348.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
14. *Ли В.* О некоторых пространственных задачах типа Гурса: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Алма-Ата, 1969. – 81 с.
15. *Хе Кан Чер.* Задачи Дарбу – Проттера для двумерного волнового уравнения. – Владивосток, 1990. – 25 с. – (Препринт / ДВО АН СССР. ИПМ).

Получено 23. 10. 91