УДК 519. 9

В. Г. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
К. К. Єлгондиєв (Каракалпак. ун-т, Нукус, Узбекистан)

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We study periodic solutions of linear ordinary differential equations of the second order with pulse influence at fixed and nonfixed times.

Вивчаються періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією як у фіксовані, так і в нефіксовані моменти часу.

Значна кількість технічних та інших задач практики пов'язана з дослідженням нелінійних динамічних систем, у яких мають місце короткотривалі процеси або які знаходяться під дією зовнішніх сил, тривалістю яких можна знехтувати при складанні відповідних математичних моделей [1–4]. Класичним прикладом такої задачі є динамічна модель годинника [5]. Подібні проблеми виникають у металургії (при регулюванні температурного режиму в термальних та мартенівських печах) [6], хімічній технології [7], динаміці літальних апаратів [8], математичній економіці [9], медицині та біології [10] та ін.

При вивченні математичних моделей таких систем виникає необхідність дослідження розривних динамічних систем, що визначаються звичайними диференціальними рівняннями та умовами імпульсної дії [4, 11].

Загальна характеристика якісної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією, подібність та відмінність задач цього розділу прикладної математики з відповідними задачами звичайних диференціальних рівнянь, а також основні результати в цій галузі викладено в монографіях [4, 12]. Фундаментальні результати стосовно застосувань асимптотичних методів нелінійної механіки до слабко нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією містяться в [1, 13–16].

При застосуванні асимптотичних методів для дослідження слабко нелінійних диференціальних рівнянь велике значення має вивчення так званої незбуреної (породжуючої) задачі, яку отримують при нульовому значенні відповідного малого параметра.

Нелінійна динамічна система, визначена лінійним звичайним диференціальним рівнянням вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \quad p, q \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

та деякими умовами імпульсної дії [4], може розглядатись як незбурена задача, що виникає при асимптотичному інтегруванні слабко нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією [17, 18].

Існує декілька способів визначення умов імпульсної дії [4], серед яких частіше всього зустрічаються умови імпульсної дії в фіксовані та нефіксовані моменти часу. У загальному випадку задачі з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу є більш складними, ніж задачі з імпульсною дією в фіксовані моменти часу. Умови імпульсної дії математично означають, що визначено деякі правила, відповідно до яких рухома точка розглядуваної динамічної системи в моменти імпульсної дії миттєво змінює свій шлях за допомогою переходу з однієї траєкторії цієї динамічної системи на деяку іншу. Незважаючи на *зовнішню* простоту такої задачі, поведінка траєкторій динамічної системи, визначеної звичайним диференціальним рівнянням та деякими умовами імпульсної дії, завдяки цим умовам може бути дуже складною та суттєво відрізнятися від поведінки траєкторій даного диференціального рівняння при відсутності імпульсної дії. У загальному випадку умови імпульсної дії перетворюють дану динамічну систему в суттєво нелінійну і можуть спричинити вельми складну поведінку її траєкторій.

Дослідженню періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з постійною імпульсною дією присвячено ряд робіт. Так, в [4] встановлено існування періодичних розв'язків та вивчено їх стійкість для динамічної системи, визначеної рівнянням осцилятора (1) та умовами імпульсної дії в нефіксовані моменти часу, коли *миттєві* сили діють у момент проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_0$ при умові, що швидкість осцилятора в цей час не є негативною та при цьому миттєво збільшується на деяку сталу величину або момент кількості руху даної механічної системи (I-й випадок), або її кінетична енергія (II-й випадок). Ряд цікавих результатів про періодичні режими динамічних систем, визначених диференціальним рівнянням (1) та умовами імпульсної дії (2) в нефіксовані моменти часу, одержано в [4] для випадків, коли величина імпульсної дії не є сталою, а залежить від швидкості рухомої точки. Зауважимо, що в загальному випадку, коли $p \neq 0$ і відсутня імпульсна дія, осцилятор (1) періодичних режимів не має.

Розглянемо динамічну систему, яка при $t \neq \tau_k$, $k \in \mathbf{Z}$, визначається диференціальним рівнянням (1), а при $t = \tau_k$, $k \in \mathbf{Z}$, — умовами імпульсної дії в фіксовані моменти часу вигляду

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=\tau_k} = \frac{dx(\tau_k+0)}{dt} - \frac{dx(\tau_k-0)}{dt} = I_k, \quad I_k \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{Z}, \tag{2}$$

причому функція $\dot{x}(t)$ неперервна справа для всіх $t \in \mathcal{T}_t = \{\tau_k \colon k \in \mathbf{Z}\}$. Якісна поведінка розв'язків цієї динамічної системи вивчалася в [19].

Стосовно величин $\mathcal{T}(t) = \{\tau_k \colon k \in \mathbf{Z}\}$ вважатимемо, що виконується умова $\mathbf{A}$: $\tau_{k+1} > \tau_k$ для всіх $k \in \mathbf{Z}$, при цьому $\tau_k \to +\infty$, якщо $k \to +\infty$, та $\tau_k \to -\infty$, якщо $k \to -\infty$.

Розв'язком задачі (1), (2) є функція $x(t)$, неперервна відносно $t \in \mathbf{R}$ та неперервно диференційовна для всіх $t \in \mathbf{R}$ за виключенням, можливо, точок $t \in \mathcal{T}_t$. У точках $t \in \mathcal{T}_t$ функція $\dot{x}(t)$ неперервна справа і може мати розриви першого роду. Надалі за допомогою $\mathcal{S}(\mathcal{T}_t)$ позначатимемо множину всіх розв'язків диференціального рівняння (1) з імпульсною дією вигляду (2) в фіксовані моменти часу з множини $\mathcal{T}_t$.

Очевидно, загальний розв'язок задачі (1), (2) залежить від двох сталих і може бути записаний у вигляді суми функцій $u(t)$ та $z(t)$, де $u(t)$ — загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (1), а $z(t)$ — частинний розв'язок задачі (1), (2), який у деякий початковий момент часу t_0 задовольняє нульові початкові умови $z(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$. Крім того, функція $u(t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, а функція $z(t) \in C(\mathbf{R}) \cap C^{(\infty)}(\mathbf{R} \setminus \{\mathcal{T}_t\})$. Розв'язок задачі Коші $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ для (1), (2) існує, єдиний і визначений для всіх $t \in \mathbf{R}$.

Зрозуміло, що коли розглядувана динамічна система зазнає впливу імпульсних сил лише скінченне число разів, тоді асимптотична поведінка її траєкторій визначається коренями характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{3}$$

і для досить великих $t \in \mathbf{R}$ будь-який розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2) співпадає з деяким частинним розв'язком рівняння (1). Іншими словами, асимптотична поведінка траєкторій динамічної системи (1), (2) в цьому випадку не залежить від умов імпульсної дії (2), а визначається лише типом особливої точки рівняння (1).

Зовсім іншою є ситуація, коли досліджувана динамічна система зазнає впливу імпульсних сил нескінченне число разів, тобто коли, наприклад, $I_k \neq 0$ для всіх $k \in \mathbf{Z}$. Тоді незалежно від типу особливої точки $(0, 0)$ диференціального рівняння (1) існують набори величин

$$\{ I_k \colon I_k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbf{Z} \} \tag{4}$$

такі, що задача (1), (2) серед своїх розв'язків може мати (залежно лише від значень величин $\{ I_k, \tau_k \colon k \in \mathbf{Z} \}$): a) обмежені розв'язки та, зокрема, такі розв'язки $x(t)$, що $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$; b) необмежені розв'язки; c) періодичні з деяким періодом $T > 0$ розв'язки, тобто такі розв'язки, асимптотична поведінка яких при $t \to +\infty$ не відповідає типу особливої точки рівняння (1). Вказані вище властивості розв'язків задачі (1), (2) спричиняються умовами імпульсної дії вигляду (2) та зникають при відсутності цих умов.

Неважко довести, що коли $x(t) \in C(\mathbf{R}) \cap C^{(\infty)}(\mathbf{R} \setminus \{ \mathcal{T}_t \})$ — періодичний з деяким періодом $T > 0$ розв'язок задачі (1), (2), тоді існує натуральне число m таке, що для всіх цілих k виконуються умови

$$I_{k+m} = I_k, \quad \tau_{k+m} = \tau_k + T, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Нехай λ_1, λ_2 — розв'язки характеристичного рівняння (3), а величини τ_k, $k \in \mathbf{Z}$, задано. Надалі будемо розглядати такі випадки:

I. $\operatorname{Re} \lambda_1 \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$;

II. $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, де $\omega \in \mathbf{R}_+$ та $\omega T \notin \mathbf{N} (\operatorname{mod} 2\pi)$;

III. $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ та

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = 0; \tag{6}$$

IV. $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, де $\omega \in \mathbf{R}_+$, $\omega T \in \mathbf{N} (\operatorname{mod} 2\pi)$ та величини і моменти імпульсної дії $I_k, \tau_k, k \in \mathbf{Z}$, задовольняють умови

$$\sum_{k=1}^{m} I_k \cos \omega \tau_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} I_k \sin \omega \tau_k = 0. \tag{7}$$

Якщо задано деякий набір величин імпульсної дії вигляду (4) і виконуються умови періодичності (5), то задача (1), (2) для даного набору величин $\{ I_k, \tau_k \colon k \in \mathbf{Z} \}$ може мати:

a) єдиний T-періодичний розв'язок (випадок I або II);

b) однопараметричну сім'ю T-періодичних розв'язків (випадок III);

c) двопараметричну сім'ю T-періодичних розв'язків (випадок IV).

Охарактеризуємо початкові умови $x_0 = x(t_0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$, які повинен задовольняти розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2) для того, щоб він був T-періодичним. Вважатимемо (без втрати загальності), що для початкового моменту часу t_0 справджується умова $\tau_0 \leq t_0 < \tau_1$. Розглянемо по черзі кожен із вказаних вище випадків I–IV.

Випадок I. Якщо корені характеристичного рівняння (3) дійсні і такі, що $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, то початкові умови T-періодичного розв'язку визначаються при $\lambda_1 \neq \neq \lambda_2$ з системи рівнянь вигляду

$$
\begin{aligned}
(\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0)(1 - e^{\lambda_1 T}) &= \sum_{k=1}^{m} I_k e^{\lambda_1 (T + t_0 - \tau_k)},\\
(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0)(1 - e^{\lambda_2 T}) &= \sum_{k=1}^{m} I_k e^{\lambda_2 (T + t_0 - \tau_k)},
\end{aligned} \tag{8}
$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — з системи рівнянь вигляду

$$
\begin{aligned}
(\dot{x}_0 - \lambda x_0)(1 - e^{\lambda T}) &= \sum_{k=1}^{m} I_k e^{\lambda (T + t_0 - \tau_k)},\\
x_0(1 - e^{\lambda T}) - (\dot{x}_0 - \lambda x_0) T e^{-\lambda t_0} &= \sum_{k=1}^{m} (T + t_0 - \tau_k) I_k e^{\lambda (T + t_0 - \tau_k)},
\end{aligned} \tag{9}
$$

кожна з яких має єдиний розв'язок стосовно x_0, $\dot{x}_0$, а якщо корені характеристичного рівняння (3) комплексно спряжені, тобто $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, де $\alpha, \omega \in \mathbf{R}_+$, то x_0, $\dot{x}_0$ задовольняють систему співвідношень вигляду

$$
\begin{aligned}
&[\cos\omega t_0 - e^{\alpha T}\cos\omega(T - t_0)]x_0 - \frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega}[\sin\omega t_0 + e^{\alpha T}\sin\omega(T - t_0)] =\\
&\qquad = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m} I_k e^{\alpha(T + t_0 - \tau_k)}\sin\omega(T - \tau_k),\\
&[\sin\omega t_0 + e^{\alpha T}\sin\omega(T - t_0)]x_0 + \frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega}[\cos\omega t_0 - e^{\alpha T}\cos\omega(T - t_0)] =\\
&\qquad = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m} I_k e^{\alpha(T + t_0 - \tau_k)}\cos\omega(T - \tau_k),
\end{aligned} \tag{10}
$$

яка має єдиний розв'язок стосовно x_0, $\dot{x}_0$.

Випадок II справджується, коли корені характеристичного рівняння (3) уявні, тобто коли $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, де $\omega \in \mathbf{R}_+$. У цьому разі для початкових умов x_0, $\dot{x}_0$ T-періодичного розв'язку справджується система рівностей вигляду

$$
\begin{aligned}
\left[x_0\omega\sin\omega\left(\frac{T}{2} - t_0\right) - \dot{x}_0\cos\omega\left(\frac{T}{2} - t_0\right)\right]\sin\frac{\omega T}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} I_k \sin\omega(T - \tau_k),\\
\left[x_0\omega\cos\omega\left(\frac{T}{2} - t_0\right) + \dot{x}_0\sin\omega\left(\frac{T}{2} - t_0\right)\right]\sin\frac{\omega T}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} I_k \cos\omega(T - \tau_k),
\end{aligned} \tag{11}
$$

що має єдиний розв'язок стосовно x_0, $\dot{x}_0$ лише тоді, коли $\omega T \notin \mathbf{N} \pmod{2\pi}$.

Випадок III стосується ситуації, коли $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$ або коли обидва корені характеристичного рівняння (3) рівні нулеві. У цьому разі x_0 може бути довільним, а $\dot{x}_0$ визначається однією з наступних формул відповідно:

$$
\dot{x}_0 = (e^{\lambda T} - 1)^{-1}\sum_{k=1}^{m} I_k e^{\lambda(T + t_0 - \tau_k)}, \qquad \dot{x}_0 = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m} I_k \tau_k, \tag{12}
$$

при цьому величини $I_1, I_2, \ldots, I_m$ задовольняють співвідношення (6).

Випадок IV пов'язаний з чисто уявними характеристичними коренями рівняння (1), коли $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, де $\omega \in \mathbf{R}_+$, та при цьому величина $\omega T = 2\pi n_0$ для деякого натурального числа n_0. У цьому разі початкові умови x_0, $\dot{x}_0$ задовольняють систему співвідношень вигляду (11), які сумісні, лише якщо справджуються рівності (7). При цьому значення x_0, $\dot{x}_0$ можна вибрати довільними.

Якщо для вказаних вище умов задача (1), (2) має періодичний розв'язок, то він у загальному випадку лінійним чином залежить від величин x_0, $\dot{x}_0$, I_1, $I_2, \ldots, I_m$, що пов'язані між собою системою двох лінійних (відповідних) співвідношень вигляду (6)–(12). Співвідношення (6)–(12) є наслідком явних формул [20] для розв'язків задачі (1), (2) та означення періодичного розв'язку.

Позначимо через $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t)$ множину всіх періодичних розв'язків рівняння (1) з імпульсною дією вигляду (2) у фіксовані моменти часу з множини $\mathcal{T}_t$ для випадку, коли величини (4) можуть набувати різних (але постійних) значень, при умові, що ці величини та моменти імпульсної дії задовольняють умови періодичності (5).

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай:*

1°. *Задано деяку множину дійсних чисел* $\mathcal{T}_t = \{\tau_k : k \in \mathbf{Z}\}$, *для елементів якої виконується умова* A;

2°. *Величини* (4) *та моменти імпульсної дії* $\mathcal{T}_t$ *задовольняють умови періодичності* (5).

Тоді всі періодичні розв'язки рівняння (1) *з імпульсною дією в фіксовані моменти часу вигляду* (2) *утворюють* m*-параметричну стосовно набору параметрів* x_0, $\dot{x}_0, I_1, I_2, \ldots, I_m$ *множину* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t)$, *причому, якщо* λ_1, λ_2 — *розв'язки характеристичного рівняння* (3), *то*:

1) *число* $m \geq 1$ *для випадку, коли* $\operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$ *або коли* $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, *де* $\omega \in \mathbf{R}_+$ *та* $\omega T \notin \mathbf{N}(\operatorname{mod} 2\pi)$;

2) *число* $m \geq 2$ *для випадку* $\lambda_1 \lambda_2 = 0$;

3) *число* $m \geq 3$ *для випадку* $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$, *де* $\omega \in \mathbf{R}_+$ *та* $\omega T \in \mathbf{N}(\operatorname{mod} 2\pi)$.

Теорема 2. *Якщо* $\varphi(t) \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_t)$ — *деякий періодичний розв'язок задачі* (1), (2), *то існує такий розв'язок рівняння* (1) *з імпульсною дією* (2) $x^*(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{T}_t)$, *що*

$$\lim_{t \to +\infty} [\varphi(t) - x^*(t)] = 0. \tag{13}$$

Згідно з припущенням 2° теореми 1 величини імпульсної дії $I_1, I_2, \ldots, I_m$ можуть набувати різних (крім нульових) постійних значень. Теорема 1 визначає мінімальну кількість нетривіальних імпульсних дій за період, при яких динамічна система (1), (2) для заданого типу особливої точки диференціального рівняння (1) має періодичні режими.

Якщо, відмовившись від умови (4), деякі з величин $I_1, I_2, \ldots, I_m$ покласти рівними нулю, наприклад, $I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots = I_m = 0$, де $1 \leq n < m$, і при цьому число n нетривіальних імпульсних дій $I_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, за період T в (2) задовольнятиме одну з відповідних нерівностей пп. 1–3 теореми 1, пов'язаних з розглядуваним типом особливої точки диференціального рівняння (1), то формули для періодичних розв'язків, що відповідають набору величин $I_1, I_2, \ldots$ $\ldots, I_n$, можна одержати за допомогою природної редукції відносно I_{n+1},

$I_{n+2}, \ldots, I_m$ з відповідних формул для розв'язків, які пов'язані з імпульсними діями $I_1, I_2, \ldots, I_m$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай:*

1°. *Задано дві множини дійсних чисел* $\mathcal{T}_t = \{\tau_k\colon k \in \mathbf{Z}\}$ *та* $\mathcal{T}_t' = \{\tau_k'\colon k \in \mathbf{Z}\}$, *для елементів яких виконується умова* A;

2°. *Моменти* $\mathcal{T}_t, \mathcal{T}_t'$ *та пов'язані з ними величини імпульсної дії задовольняють умови періодичності вигляду* (5) *для одного й того ж самого значення періоду* T *та різних натуральних чисел* m, m' *відповідно, де* $m < m'$;

3°. *Для чисел* m, m', *нетривіальних за період* T *імпульсних дій, у* (2) *виконується одна з нерівностей пп.* 1–3 *теореми* 1, *що відповідає розглядуваному типу особливої точки диференціального рівняння* (1);

4°. $\mathcal{T}_t \subset \mathcal{T}_t'$.

Тоді:

1) *рівняння* (1) *з імпульсними діями в фіксовані моменти часу* $\mathcal{T}_t$ *та* $\mathcal{T}_t'$ *має періодичні розв'язки, що належать множинам* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t)$ *та* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t')$ *відповідно*;

2) *множину* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t)$ *можна одержати за допомогою природної редукції з* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t')$, *і в цьому сенсі* $\mathcal{P}(\mathcal{T}_t) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_t')$.

Розглянемо тепер динамічну систему, рух у якій описується лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}_+, \tag{14}$$

і яка зазнає дії миттєвих сил у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_0$. Імпульсна дія в такій динамічній системі відбувається в нефіксовані моменти часу та може бути записана таким чином [4]:

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{x = x_0} = I(\dot{x}). \tag{15}$$

Розв'язком задачі (14), (15) є функція $x(t)$, неперервна відносно $t \in \mathbf{R}$ та неперервно диференційовна для всіх $t \in \mathbf{R}$ за виключенням точок імпульсної дії, в яких її похідна неперервна справа і має розриви першого роду. Для випадку $I(\dot{x}) \equiv I = \text{const} \in \mathbf{R}$ динамічна система (14), (15) грунтовно вивчена в [6], де одержано явні формули для розв'язків задачі (14), (15) та описано поведінку її фазових траєкторій, зокрема, встановлено, що всі розв'язки задачі (14), (15) є періодичними, хоча і не всі вони мають один і той же період.

Так само, як і для випадку сталої імпульсної дії [6], в загальному випадку $I = I(\dot{x})$ всі траєкторії динамічної системи (14), (15), початкові умови яких знаходяться в області $\{(x, \dot{x}) : \dot{x}^2 + \omega^2 x < \omega^2 x_0^2\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, є періодичними з періодом $T = 2\pi / \omega$ та при цьому не зазнають імпульсної дії.

Якщо в певний момент часу фазова точка системи (14), (15) має координати $(x_0, \dot{x})$, то з часом вона перетне пряму $x = x_0$ у точці з координатами $(x_0, -\dot{x})$, після чого зазнає дії миттєвих сил, під впливом яких вона *миттєво* потрапить у точку $(x_0, -\dot{x} + I(-\dot{x}))$, а далі, через деякий проміжок часу, знову перетне пряму $x = x_0$, — тепер у точці $(x_0, \dot{x} - I(-\dot{x}))$, у якій в черговий раз відбудеться дія миттєвих сил (15), і т. д.

Таким чином, маємо деяке відображення прямої $x = x_0$ у себе згідно з законом $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, де

$$f(y) = -y + I(-y), \quad y = \dot{x}. \tag{16}$$

Нерухомим точкам відображення $f(y)$ відповідають періодичні режими динамічної системи (14), (15), причому для таких режимів розглядувана система зазнає лише однієї імпульсної дії за період.

Якщо відображення (16) має періодичну точку y_0 періоду $n \in \mathbf{N}$, тобто $f^n(y_0) = f(f(\ldots f(y_0))) = y_0$, то точці y_0 відповідає деякий T-періодичний режим динамічної системи (14), (15), причому такий, що для даного режиму система (14), (15) зазнає імпульсної дії рівно n разів за період.

А для випадку, коли відображення (16) є неперервним та має періодичну точку періоду 3, існують періодичні точки довільного періоду n, яким відповідають $T(n)$-періодичні режими динамічної системи (14), (15) такі, що для даного режиму розглядувана система (14), (15) зазнає імпульсної дії рівно n разів за період $T(n)$. Звідси випливає, що коли динамічна система (14), (15) має такий періодичний режим, що для даного періодичного режиму система зазнає імпульсної дії рівно три рази за період, тоді в системі (14), (15) існують $T(n)$-періодичні режими, причому такі, що дана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, де n — довільне натуральне число. Зауважимо, що в цьому випадку в системі (14), (15) може існувати декілька періодичних режимів, коли розглядувана динамічна система (14), (15) зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, причому періоди таких режимів можуть не співпадати.

Стійкість описаних вище $T(n)$-періодичних розв'язків задачі (14), (15) адекватно визначається стійкістю відповідних нерухомих точок відображення $f^n(y)$.

Як приклад описаної вище динамічної системи розглянемо систему вигляду (14), (15), коли

$$I(y) = \begin{cases} 1 - 3y, & y \geq 0, \\ 1 + y, & y < 0, \end{cases} \tag{17}$$

де, як і раніше, $y = \dot{x}$.

Відображення

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} 1 - 2y, & y \geq 0, \\ 1 + 2y, & y < 0, \end{cases} \tag{18}$$

є неперервним для всіх $y \in \mathbf{R}$, має одну стійку та одну нестійку нерухому точку, рівно дві періодичні точки періоду 2 та рівно шість періодичних точок періоду 3. Точки періоду 3 утворюють для відображення (18) два цикли

$$\left\{-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right\}, \qquad \left\{-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right\} \tag{19}$$

відповідно.

Звідси випливає, що відображення (18) має [21] періодичні точки довільного періоду $n \in \mathbf{N}$, а динамічна система (14), (15), (17) — такі періодичні режими, при яких розглядувана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період.

Всі періодичні точки періоду $n \geq 2$ для відображення (18) є нестійкими, тому відповідні їм періодичні розв'язки рівняння (14) з імпульсною дією (15), (17) теж нестійкі.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Лінійне диференціальне рівняння* (14) *з імпульсною дією вигляду* (15), (17), *де* $y = \dot{x}$, *має* $T(n)$*-періодичні розв'язки з рівно* n *імпульсними діями за період, де* n *— довільне натуральне число.*

Очевидно, що можна побудувати приклади й інших динамічних систем вигляду (14), (15) з суттєво нелінійною поведінкою розв'язків.

Наведений вище приклад динамічної системи (14), (16) демонструє широке розмаїття можливої поведінки траєкторій динамічних систем, визначених лінійними диференціальними рівняннями вигляду (1) та нелінійними умовами імпульсної дії, яке спричиняється останніми.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1974. – 440 с.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
5. *Баутин Н. Н.* Динамическая теория часов: Стабилизация периода в колебательных системах с двумя степенями свободы. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
6. *Самойленко А. М., Стрижак Т. Г.* О движении осциллятора под действием мгновенных сил // Труды семинара по математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – 213–218 с.
7. *Островский Г. М., Волин Ю. М.* Моделирование сложных химико-технологических систем. – М.: Химия, 1975. – 311 с.
8. *Лоуден Д. Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. – М.: Мир, 1966. – 150 с.
9. *Горбунов В. К., Нураханова Г. У.* Процессы с управляемыми разрывами фазовых траекторий и моделирование производства с перемещением основных фондов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 55–61.
10. *Петровский А. М.* Системный анализ некоторых медико-биологических проблем, связанных с управлением лечения // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 2. – С. 54–62.
11. *Lakshmikantam V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1989. – 520 p.
12. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations // World Scientific Series on Nonlinear Sciences. Ser. A. Vol. 14. – Singapore–New Jersey–London–Hong-Kong: World Scientific, 1995. – 560 p.
13. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101–117.
14. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750–762.
15. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56–64.
16. *Митропольский Ю. А., Роговченко С. П.* О применении метода усреднения к исследованию гиперболических импульсных систем. – Киев, 1988. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.33).
17. *Митропольский Ю. А., Елгондыев К. К.* Влияние внешних периодических сил на гармонический осциллятор с импульсным воздействием. – Киев, 1989. – 36 с. – (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 89.52).
18. *Самойленко В. Г., Елгондыев К. К.* Асимптотическое интегрирование слабо нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1989. – 52 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.37).
19. *Самойленко В. Г., Елгондыев К. К.* Периодические и почти-периодические решения линейных однородных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15(49). – С. 13–20.
20. *Самойленко В. Г., Елгондыев К. К.* Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\mathbf{R}^2$. – Киев, 1989. – 31 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.59).
21. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 61–71.

Одержано 25.10.96