УДК 517.919

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. О. Парасюк (Нац. ун-т, Київ)

НІЛЬПОТЕНТНІ ПОТОКИ S^1-ІНВАРІАНТНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ НА 4-ВИМІРНИХ СИМПЛЕКТИЧНИХ МНОГОВИДАХ*

We investigate S^1-invariant Hamiltonian systems on compact 4-dimensional symplectic manifolds with free symplectic action of a circle. We show that, in quite general case, such systems generate ergodic flows of two types (quasiperiodic and nilpotent) on their isoenergetic surfaces. We solve the problem of straightening of these flows.

Досліджено S^1-інваріантні гамільтонові системи на компактних 4-вимірних симплектичних многовидах з вільною симплектичною дією кола. Показано, що в досить загальній ситуації такі системи генерують на своїх ізоенергетичних поверхнях ергодичні потоки двох типів — квазіперіодичні та нільпотентні. Розв'язано задачу випрямлення цих потоків.

Класичними об'єктами теорії багаточастотних коливань вважаються рекурентні, зокрема, квазіперіодичні рухи динамічних систем на інваріантних торах [1–7]. Важливі проблеми аналізу систем, що описують квазіперіодичні коливання, розв'язані в роботах Ю. О. Митропольського [8–10]. У даній вивчається статті новий тип багаточастотних коливань у гамільтонових системах. Він пов'язаний з поняттям нільпотентного потоку в сенсі [11]. Питання про можливість існування таких потоків у системах механіки поставлено в [4].

Нехай (M, ω^2) — зв'язний компактний 4-вимірний симплектичний многовид, який допускає вільну симплектичну дію кола S^1, і отже, має структуру головного S^1-розшарування над 3-вимірним компактним многовидом N. Будемо досліджувати S^1-інваріантні системи на (M, ω^2). Кожна така система, окрім власного гамільтоніана, має додатковий „многозначний інтеграл". При переході на універсальне накриття $\left(\tilde{M}, \tilde{\omega}^2\right)$ одержуємо звичайну інтегровну в сенсі Ліувілля систему. Незважаючи на це у вихідній системі можна спостерігати доволі незвичні ефекти. У даній роботі показано, що в досить загальній ситуації зазначена система генерує на своїх ізоенергетичних поверхнях ергодичні потоки двох типів — квазіперіодичні та нільпотентні. У п. 2 типи ізоенергетичних поверхонь та властивості потоків на них описано в термінах 2-форми кривини Ω та деякої 1-форми θ (остання після підняття на M виступає в ролі многозначного гамільтоніана, який породжує дію S^1 на M). У п. 3 в околі ізоенергетичної поверхні побудовано координати, в яких пуассонова структура набуває найбільш простого вигляду, а потік досліджуваної системи випрямляється.

Заключна частина роботи присвячена розв'язанню „оберненої задачі", яка полягає в тому, щоб для заданих θ, Ω на N побудувати 4-вимірний симплектичний многовид (M, ω^2) з вільною симплектичною дією кола. У п. 5 після введення спеціальним чином системи твірних у вільних частинах груп $H_i(N)$, $H^i(N; \mathbf{Z})$, $i = 1, 2$, вказано співвідношення, які повинні задовольняти коефіцієнти розкладів форм θ, Ω. Знайдено також коефіцієнтні умови існування на побудованому многовиді (M, ω^2) гамільтонових систем, які породжують нільпотентні квазіперіодичні ергодичні потоки на своїх ізоенергетичних поверхнях (п. 4).

---

* Частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (грант № SPU061052).

Вивченню компактних симплектичних многовидів з дією кола, яка допускає відображення моменту (така дія не може бути вільною), присвячено роботи [12–14]. Конструкції симплектичних многовидів з вільною дією кола наведено в [15]. Структура ізоенергетичних поверхонь 4-вимірних S^1-інваріантних гамільтонових систем вивчалася в [16].

1. Попередні структурні результати. Надалі всі диференціально-геометричні об'єкти вважаються гладкими. Векторне поле X, що генерує симплектичну дію кола S^1 на (M, ω^2), локально гамільтонове. Тому існує замкнена 1-форма Θ на M, для якої $X = \mathfrak{J}\Theta$. (Тут $\mathfrak{J}: T^*M \mapsto TM$ — відображення розшарувань, породжене ω^2.) На M виникає структура головного S^1-розшарування

$$\pi: M \mapsto N \tag{1}$$

над компактним орієнтовним 3-вимірним многовидом N. Оскільки форма Θ — S^1-інваріантна і $\Theta(X) = 0$, то її можна опустити на базу: існує замкнена невироджена 1-форма θ на N така, що $\pi^*\theta = \Theta$. З компактності N випливає, що θ репрезентує нетривіальний клас когомологій $[\theta] \in H^1(N; \mathbf{R})$. Як відзначалося в [17], многовид N, на якому існує 1-форма θ з вказаними вище властивостями, має структуру локально тривіального розшарування $\mathrm{p}: N \mapsto S^1$, кожен шар якого дифеоморфний компактній орієнтовній двовимірній поверхні U деякого роду g. Можна вважати, що $N = (U \times \mathbf{R}) / \mathbf{Z}$, де факторизація відбувається шляхом ототожнення точок (u, φ) та $\Psi(u, \varphi) = (F(u), \varphi - 1)$, $u \in U$, $\varphi \in \mathbf{R}$ [11]. Тут $F: U \mapsto U$ — дифеоморфізм (монодромія), що зберігає орієнтацію.

Відображення Ψ породжує регулярне накриття $\mathrm{Pr}: U \times \mathbf{R} \mapsto N$. Проекцію p та монодромію F можна побудувати, виходячи з наступних міркувань. Як відомо [18], для довільного ірраціонального числа ν існують як завгодно великі взаємно прості числа p і q такі, що $|\nu - p/q| < q^{-2}$. Тому, зафіксувавши на N ріманову метрику, можна вказати як завгодно велике ціле r і цілочислову 1-форму α таку, що виконується нерівність

$$|\theta(\xi) - r^{-1}\alpha(\xi)| < Cr^{-2} \quad \forall \xi \in TN, \quad \|\xi\| = 1, \tag{2}$$

з додатною сталою C, яка не залежить від r. Якщо r досить велике, то α невироджена. Покладемо

$$\mathrm{p} := \exp\left(2\pi i \int_{x_0}^{x} \alpha\right) : N \mapsto S^1 = \left\{e^{2\pi i\varphi}\right\}_{\varphi \in \mathbf{R}},$$

де x_0 — фіксована точка на N. Форма $d\varphi$ на $\mathbf{R}$ визначає 1-форму $\tilde{\alpha}$ на S^1 таку, що $\alpha = \mathrm{p}^*\tilde{\alpha}$. Зрозуміло, що кожен шар $\mathrm{p}^{-1}(z)$, $z \in S^1$, є інтегральною поверхнею рівняння Пфаффа $\alpha = 0$.

Далі, нехай $\left(\{g_Y^t\}_{t \in \mathbf{R}}, N\right)$ — потік векторного поля Y, ортогонального кожній такій поверхні і нормованого умовою $\alpha(Y) = 1$. Тоді $g_Y^1\big|_{\mathrm{p}^{-1}(1)}$ і визначає дифеоморфізм F.

З'ясуємо тепер будову симплектичної структури ω^2. Нехай ω – 1-форма зв'язності головного розшарування (1), Ω — 2-форма на N, породжена відповідною формою кривини: $\pi^*\Omega = d\omega$. Відомо, що форма Ω цілочислова.

Твердження 1. *Форму* ω^2 *можна подати у вигляді*

$$\omega^2 = \pi^*\sigma^2 + \pi^*\theta \wedge \omega, \tag{3}$$

де σ^2 *— 2-форма на* N *з такими властивостями:*

1. *Обмеження форми* σ^2 *: кожен інтегральний многовид рівняння* $\theta = 0$ *є невиродженою формою.*

2. *Виконується співвідношення* $d\sigma^2 = \theta \wedge \Omega$.

Доведення. Позначимо через $h\omega^2$ горизонтальну відносно ω частину форми ω^2. Неважко перевірити, що $h\omega^2 = \omega^2 - \pi^*\theta \wedge \omega$. Цю 2-форму можна опустити на N. Одержану 2-форму позначимо через σ^2: $h\omega^2 = \pi^*\sigma^2$. Тепер властивість 1 випливає з невиродженості форми ω^2, а властивість 2 — з замкненості ω^2.

2. Структура ізоенергетичних поверхонь гамільтонової системи без відносних положень рівноваги. Розглянемо на (M, ω^2) гамільтонову систему з S^1-інваріантним гамільтоніаном H. Оскільки форма θ не точна і, взагалі кажучи, не раціональна, то відображення моменту дії S^1 на M не існує. Ця обставина перешкоджає провести редукцію системи $\mathfrak{I}\,dH$ за схемою Марсдена – Вейнстейна. Тому ми використаємо дещо іншу процедуру. Опустимо дужку Пуассона $\{\,,\,\}$, яка відповідає структурі ω^2, на N, і одержану дужку позначимо через $\{\,,\,\}_N$. Відображення проекції π виступає в ролі відображення Пуассона: $\pi: (M, \{\,,\,\}) \mapsto (N, \{\,,\,\}_N)$. Для кожної функції $f\colon N \mapsto \mathbf{R}$ позначимо через $\mathfrak{I}_N df$ гамільтонове векторне поле, породжене дужкою $\{\,,\,\}_N$. Для S^1-інваріантної функції $H: M \mapsto \mathbf{R}$ існує функція $h: N \mapsto \mathbf{R}$ така, що $H = h \circ \pi$. Функція h є гамільтоніаном векторного поля $\mathfrak{I}_N dh$. При цьому $\pi_* \mathfrak{I}\,dH = \mathfrak{I}_N dh$. Симплектичними листками дужки $\{\,,\,\}_N$ є інтегральні поверхні рівняння $\theta = 0$.

Твердження 2. *Симплектична структура* $\tilde{\omega}^2$, *породжена дужкою* $\{\,,\,\}_N$ *на інтегральній поверхні* l *рівняння* $\theta = 0$, *збігається з обмеженням форми* σ^2 *на* l.

Доведення. Для довільної точки $y \in l$ і довільних $\xi_i \in T_y l$, $i = 1, 2$, існують функції $f_i: N \mapsto \mathbf{R}$ такі, що $\xi_i = \mathfrak{I}_N df_i(y)$. Оскільки $\theta(\mathfrak{I}_N df_i) = 0$, то

$$\tilde{\omega}^2(\xi_1, \xi_2) = \{f_2, f_1\}_N(y) = \omega^2(\mathfrak{I}\,df_1 \circ \pi, \mathfrak{I}\,df_2 \circ \pi) =$$

$$= h\omega^2(\mathfrak{I}\,df_1 \circ \pi, \mathfrak{I}\,df_2 \circ \pi) = \sigma^2(\xi_1, \xi_2).$$

Нехай c — регулярне значення функції h, і N_c — зв'язна компонента множини $h^{-1}(c)$. Можливі два випадки:

I. Форми θ та dh лінійно незалежні в точках поверхні N_c.

II. Множина точок

$$N_c^* = \{\, y \in N_c \colon \text{форми } \theta \text{ та } dh \text{ лінійно залежні в точці } y \,\}$$

непорожня.

У випадку II кожна точка $y^* \in N_c^*$ є положенням рівноваги системи з гамільтоніаном h, оскільки $\mathfrak{I}_N dh(y^*) = 0$. Множина $\pi^{-1}(y^*) \subset h^{-1}(c)$ являє собою відносне положення рівноваги [19]. Рух точки $x \in \pi^{-1}(y^*)$ під дією потоку векторного поля $\mathfrak{I}dH$ періодичний. Ми будемо вивчати випадок I.

Теорема 1. *У випадку* I *поверхня* N_c *є двовимірним інваріантним тором гамільтонової системи* $\mathfrak{I}_N dh$.

Доведення. Компактна орієнтовна поверхня N_c у випадку I допускає дотичне векторне поле $\mathfrak{I}_N dh$ без особливих точок. Тому $N_c \sim T^2$.

Позначимо через $M_c := \pi^{-1}(N_c)$ зв'язну компоненту ізоенергетичної поверхні $H^{-1}(c)$.

Теорема 2. *Нехай має місце випадок* I *і*

$$\int_{N_c} \Omega = 0. \tag{4}$$

Тоді M_c — *тривимірний інваріантний тор системи* $\mathfrak{I}dH$.

Доведення. Якщо виконується (4), то $\pi : M_c \mapsto N_c$ — тривіальне S^1-розшарування над тором N_c, а отже, $M_c \sim T^3$.

Теорема 3. *Нехай має місце випадок* I *і*

$$\int_{N_c} \Omega := n \neq 0. \tag{5}$$

Тоді M_c *є нільпотентним многовидом Гейзенберга – Івасави.*

Доведення. Головне S^1-розшарування $\pi : M_c \mapsto N_c$ можна індукувати за допомогою деякого відображення $f : N_c \mapsto S^2$, де сфера S^2 розглядається як база універсального головного (для баз розмірності 2) S^1-розшарування $S^3 \mapsto$ $\mapsto S^2$ (розшарування Хопфа). Степінь відображення f дорівнює числу n. Як відомо, всяке відображення $g : N_c \mapsto S^2$ степеня n гомотопне f, а тому індукує головне розшарування, еквівалентне розшаруванню $\pi : M_c \mapsto N_c$.

Розглянемо з цієї точки зору нільмноговид Гейзенберга – Івасави Nil_n^3, $n \in$ $\in Z \setminus \{0\}$, який за означенням є фактор-многовидом нільпотентної групи матриць

$$\mathrm{N}_n : \begin{pmatrix} 1 & u & w/n \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u, v, w \in \mathbf{R},$$

за правою дією дискретної підгрупи

$$\mathrm{D}_n : \begin{pmatrix} 1 & k & m/n \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

Цей многовид є головним розшаруванням над тором $T^2 = \{ (u, v) \mid \mathrm{mod}\, 1 \}$, причому вільна дія кола $S^1 = \{ \tau \mid \mathrm{mod}\, 1 \}$ визначається таким чином: $(u, v, w) \mapsto$ $\mapsto (u, v, w + \tau)$. Легко бачити, що 1-форма $\omega = d\omega - nv\,du$ є формою зв'язності цього розшарування і їй відповідає форма кривини $d\omega = n\,du \wedge dv$. Оскільки

$$\int_{T^2} n\,du \wedge dv = n,$$

то на основі попередніх міркувань робимо висновок, що M_c як головне S^1-розшарування еквівалентне Nil_n^3.

3. Теореми про випрямлення. Покажемо, що в околі тора N_c траєкторії системи $\mathfrak{F}_N dh$ можна випрямити.

Теорема 4. *У випадку* I *окіл тора* N_c *дифеоморфний* $\mathbf{R} \times T^2$. *Координати* y *на* $\mathbf{R}$ *і* $\psi_1, \psi_2 \,|\, \mathrm{mod}\, 1$ *на* T^2 *можна вибрати так, щоб* $h = h(y)$, *а траєкторії системи* $\mathfrak{F}_N dh$ *задавалися рівняннями*

$$y = \text{const}, \qquad \nu_1\psi_2 - \nu_2\psi_1 = \text{const},$$

де $\nu_i = \int_{e_i} \theta$, $i = 1, 2$, e_1, e_2 *— відповідним чином вибраний базис циклів на* N_c.

Доведення. Дифеоморфність околу N_c прямому добутку $\mathbf{R} \times T^2$ випливає з того, що c — регулярне значення функції h. Тор N_c розглядатимемо як симплектичний многовид (симплектична структура — це форма площі). 1-форма $\theta|_{N_c}$ невироджена і замкнена. Вона породжує на N_c локально гамільтонове векторне поле, потік якого зберігає форму площі, тобто систему з інтегральним інваріантом. За теоремою Колмогорова [2] існують координати φ_1, φ_2, в яких зазначена форма набуває вигляду

$$\theta|_{N_c} = A(\varphi_1, \varphi_2)(\nu_1 d\varphi_2 - \nu_2 d\varphi_1),$$

де ν_1, ν_2 — деякі дійсні числа, функція $A(\varphi_1, \varphi_2)$ додатна в силу невиродженості $\theta|_{N_c}$ і

$$\bar{A} := \int_{T^2} A(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 1, \qquad \tilde{A}(\varphi_1, \varphi_2) := A(\varphi_1, \varphi_2) - 1 > -1.$$

Далі, використовуючи замкненість 1-форми θ, неважко довести існування таких координат ψ_1, ψ_2, що $\theta|_{N_c} = \nu_1 d\psi_2 - \nu_2 d\psi_1$. Тоді в околі N_c існує функція g така, що $g|_{N_c} = 0$, $dg|_{N_c} = 0$ і $0 = \nu_1 d\psi_2 - \nu_2 d\psi_1 + dg$. Вважаючи без обмежень загальності, що $\nu_1 \neq 0$, після заміни $\psi_2 + (1/\nu_1)g \mapsto \psi_2$ одержуємо $\theta = \nu_1 d\psi_2 - \nu_2 d\psi_1$. Враховуючи, що траєкторії системи $\mathfrak{F}_N dh$ задаються рівняннями $h = c$, $\theta = 0$, одержуємо потрібний результат.

***Наслідок* 1.** *Координати* (y, ψ_1, ψ_2) *можна вибрати таким чином, що*

$$\{\psi_i, y\}_N = \nu_i / a(y, \psi_1, \psi_2), \qquad \{\psi_i, \psi_j\}_N = 0, \qquad i, j = 1, 2,$$

де $a(y, \psi_1, \psi_2)$ *— додатна функція, для якої*

$$\int_{T^2} a(y, \psi_1, \psi_2)\, d\psi_1 d\psi_2 = 1.$$

Справді, останню умову можна задовольнити після відповідної заміни $y \mapsto f(y)$, $f'(y) \neq 0$. Рівність нулю дужок координат ψ_1, ψ_2 випливає з того, що $\mathfrak{F}_N \theta = 0$.

У випадку, коли ν_1, ν_2 сильно несумірні, можна випрямити не лише траєкторії, але й саме векторне поле $\mathfrak{F}_N dh$. Цей факт випливає з наступного твердження.

Твердження 3. *Якщо виконуються умови теореми* 4, *а числа* ν_1, ν_2 *сильно несумірні, тобто для деяких* $K > 0$, $L > 0$ *виконуються нерівності*

$$|k_1\nu_1 + k_2\nu_2| \geq K/(|k_1|+|k_2|)^L \quad \forall\,(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}, \tag{6}$$

то існує така заміна змінних

$$\varphi_i = \psi_i + \nu_i \Phi(y, \psi_1, \psi_2), \tag{7}$$

що

$$\{\varphi_i, y\}_N = \nu_i, \quad i = 1, 2, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\}_N = 0.$$

Доведення. Функція Φ визначимо з рівняння

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}\nu_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}\nu_2 = a(y, \psi_1, \psi_2) - 1. \tag{8}$$

Існування і гладкість розв'язку гарантує умова (6). Як і в [2], можна показати, що (7) задає дифеоморфізм тора.

***Наслідок* 2.** *В координатах* $(y, \varphi_1, \varphi_2)$ *система* $\mathfrak{I}_N dh$ *має вигляд*

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \nu_i \frac{dh(y)}{dy}, \quad i = 1, 2.$$

Тепер покажемо, що у випадку I та при виконанні умов (4), (6) рух системи $\mathfrak{I}\, dH$ на торі M_c і на близьких поверхнях рівня функції H квазіперіодичний.

Теорема 5. *Якщо у випадку* I *виконуються умови* (4), (6), *то деякий окіл тора* M_c *дифеоморфний* $\mathbf{R} \times T^3$. *Координати* y *на* $\mathbf{R}$ *і* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \,|\bmod 1$ *на* T^3 *можна вибрати таким чином, що* $H = H(y)$, *а система з такою функцією Гамільтона має вигляд*

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \nu_i \frac{dH(y)}{dy}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де ν_1, ν_2 *визначені в теоремі* 4,

$$\nu_3 = \int\limits_{S(N_c)} \omega^2, \tag{9}$$

$S(N_i)$ — *довільний переріз розшарування* $\pi: M_c \mapsto N_c$.

Доведення. Розглянемо окіл гіперповерхні M_c, який проектується за допомогою π в окіл поверхні N_c, про який йдеться у теоремі 4. Зазначений окіл гіперповерхні M_c можна розглядати як тривіальне S^1-розшарування. Введемо у ньому координати $(y, \varphi_1, \varphi_2, \psi)$, де $(y, \varphi_1, \varphi_2)$ — координати з твердження 3, $\psi \,|\bmod 1$ — координата на шарі S^1. Оскільки ω^2 S^1-інваріантна, то дужки Пуассона введених координат не залежать від ψ. Отже, $\{\psi, y\} = a_3(y, \varphi_1, \varphi_2)$. Покладемо

$$\overline{a}_3(y) = \int\limits_{T^2} a_3\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

Введемо тепер нову змінну $\varphi_3 = \psi + \Psi(y, \varphi_1, \varphi_2)$, де Ψ — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}\nu_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_2}\nu_2 = a_3(y, \varphi_1, \varphi_2) - \overline{a}_3(y).$$

Тоді $\{\varphi_3, y\} = \bar{a}_3(y)$. Покажемо, що $\bar{a}_3(y)$ не залежить від y. Дійсно, позначимо $\{\varphi_1, \varphi_3\} = b_{13}(y, \varphi_1, \varphi_2)$. З тотожності Якобі $\{\{\varphi_3, y\}, \varphi_1\} + \{\{y, \varphi_1\}, \varphi_3\} + \{\{\varphi_1, \varphi_3\}, y\} = 0$ дістаємо

$$-\frac{d\bar{a}_3(y)}{dy}\nu_1 + \frac{\partial b_{13}}{\partial \varphi_1}\nu_1 + \frac{\partial b_{13}}{\partial \varphi_2}\nu_2 = 0,$$

звідки

$$\frac{d\bar{a}_3(y)}{dy} = 0, \quad b_{13}(y, \varphi_1, \varphi_2) = b_{13}(y).$$

Отже, $\bar{a}_3 = \mathrm{const}$. Одночасно показано, що ω^2 інваріантна відносно зсувів $\varphi_i \mapsto \varphi_i + \tau_i$, $\tau_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,3}$. Враховуючи цей факт, твердження 1, вигляд форми θ (теорема 4), маємо

$$\omega^2\big|_{M_c} = \nu_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 + \nu_2 d\varphi_3 \wedge d\varphi_1 + \nu_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2, \tag{10}$$

де ν_3 визначено у (9). З іншого боку,

$$\left(\iota(\mathfrak{J}dy)\omega^2\right)\big|_{M_c} = dy\,|_{M_c} = 0,$$

тобто вектор $(\nu_1, \nu_2, \bar{a}_3)$ анулює форму (10). Таку ж властивість має вектор (ν_1, ν_2, ν_3). Тому $\nu_3 = \bar{a}_3$.

***Наслідок* 3.** *Дужка Пуассона побудованих координат має вигляд*

$$\{\varphi_i, y\} = \nu_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \{\varphi_1, \varphi_2\} = 0, \quad \{\varphi_i, \varphi_3\} = b_i(y), \quad i = 1, 2.$$

У випадку, коли $M_c = Nil_n^3 \sim \mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n$, аналогом теореми 5 є твердження, яке показує, що потік системи $\mathfrak{J}dH$ на M_c визначається дією деякої однопараметричної підгрупи N_n. Властивості потоків такого типу — нільпотентних потоків на нільмноговидах — описано в [11].

Теорема 6. *Якщо у випадку* I *виконуються умови* (5), (6), *то існує дифеоморфізм*

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{R} \times (\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n) \mapsto M$$

на деякий окіл многовиду M_c з такими властивостями:

1. *При кожному $y \in \mathbf{R}$ дифеоморфізм $\mathcal{F}$ відображає шар $\{y\} \times (\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n)$ на зв'язну компоненту поверхні рівня функції H, тобто $H \circ \mathcal{F} = \tilde{H}(y)$.*

2. *В алгебрі Лі групи N_n знайдеться такий вектор ν, що на кожній поверхні $\mathcal{F}(\{y\} \times (\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n))$ векторне поле $\mathfrak{J}dH$ збігається з векторним полем*

$$\frac{d\tilde{H}(y)}{dy}\,\mathcal{F}_* X_\nu(y, z), \quad y \in \mathbf{R}, \quad z \in (\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n),$$

де X_ν — векторне поле, породжене дією однопараметричної підгрупи $\{\exp(\nu t)\}_{t \in \mathbf{R}} \subset \mathrm{N}_n$ таким чином:

$$(y, z) \mapsto (y, \exp(\nu t)z).$$

Доведення. Оскільки c — регулярне значення функції H, то з урахуванням теореми 3 деякий окіл гіперповерхні M_c дифеоморфний $\mathbf{R} \times (\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n)$.

Многовид $\mathbf{R}\times(\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n)$ є базою регулярного накриття

$$\mathrm{P}:\ \mathbf{R}^4_{(y,u,v,w)}\mapsto\mathbf{R}\times(\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n),$$

визначеного дією групи D_n за формулою

$$(y,u,v,w)\mapsto f_{klm}(y,u,v,w) := (y,u+k,v+l,w+nlu+m),$$

де $k,l,m\in\mathbf{Z}$. Симплектична структура на M індукує симплектичну структуру на $\mathbf{R}^4_{(y,u,v,w)}$, інваріантну як відносно кожного f_{klm}, так і відносно зсувів s_τ: $(y,u,v,w)\mapsto(y,u,v,w+\tau)$. З'ясуємо вигляд дужок Пуассона. Оскільки $(u,v)\,|\bmod 1$ визначають кутові координати на торі N_c, то з урахуванням теореми 4 та твердження 3 без обмеження загальності вважаємо, що для дужки Пуассона індукованої симплектичної структури виконуються співвідношення

$$\{u,y\}=\nu_1,\quad \{v,y\}=\nu_2,\quad \{u,v\}=0.$$

Відображення f_{klm} і s_τ відносно цієї дужки є відображеннями Пуассона. Тому функції $\{w,y\}:=b(y,u,v)$, $\{w,u\}:=e(y,u,v)$ не залежить від w і мають властивість

$$\{w+nlu+m,y\}=b(y,u+k,v+l),$$
$$\{w+nlu+m,u+k\}=e(y,u+k,v+l),$$

або

$$b(y,u,v)+nl\nu_1=b(y,u+k,v+l),$$
$$e(y,u,v)=e(y,u+k,v+l)\quad\forall\,k,l,m\in\mathbf{Z}.$$

Звідси, зокрема, випливає, що $b(y,u,v)=\nu_1 nv+b_0(y,u,v)$, де $b_0(y,u+k,v+l)=b_0(y,u,v)$ для довільних $k,l\in\mathbf{Z}$. Покажемо, що існує дифеоморфізм $G:\ \mathbf{R}^4\mapsto\mathbf{R}^4$ вигляду

$$G(y,u,v,w)=(y,u,v,w':=w+W(y,u,v)),$$

який комутує з кожним f_{klm}, а отже, опускається до дифеоморфізму $\tilde G:\ \mathbf{R}\times(\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n)\mapsto\mathbf{R}\times(\mathrm{N}_n/\mathrm{D}_n)$, і для якого $\{w',y\}=\nu_1 nv+\nu_3$, де $\nu_3\in\mathbf{R}$. Звідси випливає, що в координатах (y,u,v,w') гамільтонову систему з функцією Гамільтона y на накриваючому просторі $\mathbf{R}^4$ можна подати у вигляді

$$\dot y=0;\qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}1 & u & w'/n\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \nu_1 & \nu_3/n\\ 0 & 0 & \nu_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u & w'/n\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Права частина останнього матричного рівняння є не що інше, як правоінваріантне векторне поле на групі Лі матриць

$$\begin{pmatrix}1 & u & w'/n\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad u,v,w'\in\mathbf{R},$$

породжене лівою дією однопараметричної підгрупи $\{\exp(\nu t)\}$, де вектор ν з алгебри Лі цієї матричної групи визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & \nu_3/n \\ 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що векторне поле системи з гамільтоніаном $\tilde{H}(y)$ відрізняється від векторного поля системи з гамільтоніаном y лише множником $d\tilde{H}(y)/dy$.

Отже, для закінчення доведення теореми 6 потрібно знайти функцію $W(y, u, v)$, для якої виконуються умови $\{w + W(y, u, v), y\} = \nu_1 n v + \nu_3$, при деякому $\nu_3 \in \mathbf{R}$ і $W(y, u+k, v+l) = W(y, u, v)$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Визначимо W як періодичний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial u}\nu_1 + \frac{\partial W}{\partial v}\nu_2 + b_0(y, u, v) - \overline{b_0}(y) = 0,$$

де

$$\overline{b_0}(y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \overline{b_0}(y, u, v)\, du\, dv$$

(існування і гладкість такого розв'язку гарантується умовою (6)). Тоді $\{w', y\} = \nu_1 n v + \overline{b_0}(y)$. Покажемо, нарешті, що $\overline{b_0}(y) = \nu_3 \equiv \text{const}$. Дійсно, з тотожності Якобі

$$\{\{w', u\}, y\} + \{\{u, y\}, w'\} + \{\{y, w'\}, u\} = 0$$

маємо

$$\frac{\partial e(y, u, v)}{\partial u}\nu_1 + \frac{\partial e(y, u, v)}{\partial v}\nu_2 + \frac{d\overline{b_0}(y)}{dy}\nu_1 = 0,$$

звідки

$$\frac{d\overline{b_0}(y)}{dy} = 0, \qquad e(y, u, v) = e(y).$$

***Наслідок* 4.** *Координати (y, u, v, w) в околі M_c можна вибрати таким чином, що*

$$\{u, y\} = \nu \equiv \text{const}, \qquad \{v, y\} = 1, \qquad \{w, y\} = \nu n v,$$
$$\{u, v\} = 0, \qquad \{u, w\} = 0, \qquad \{v, w\} = \lambda \equiv \text{const}.$$

Дійсно, якщо (y, u, v, w') — координати, побудовані при доведенні теореми, то після розтягу $y \mapsto \nu_2 y$ і зсуву $v \mapsto v - \nu_3 n/\nu_1$ будуть виконуватися перші три рівності при $\nu = \nu_1/\nu_2$. Далі, в теоремі показано, що $\{u, w'\} = e(y)$. Так само можна показати, що $\{v, w'\} = g(y)$. Після цього робимо заміну

$$w = w' - \frac{1}{\nu}\int e(y)\,dy.$$

Тоді $\{u, w\} = 0$. Нарешті, з тотожності Якобі

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{u, \{u, v\}\} = 0$$

дістаємо

$$\nu\frac{d\{v, w\}}{dy} = 0,$$

а отже, $\{v, w\} = \text{const}$.

4. Формулювання теорем існування. Нехай U — орієнтовна поверхня роду $2g$, $F: U \mapsto U$ — її дифеоморфізм. Відомо, що кожен дифеоморфізм поверхні U ізотопний суперпозиції скрутів Дена [20]. Тому без обмеження загальності вважаємо, що $F = \prod_i T_{e_i}$, де $\{e_i\}$ — деяка система циклів на U, T_{e_i} — скрут Дена навколо e_i. Оскільки міра нерухомих точок кожного e_i близька до міри U, то можна вважати, що множина нерухомих точок дифеоморфізму F непорожня. Нехай u_* — одна з таких точок: $Fu_* = u_*$.

Розглянемо многовид $N = (U \times \mathbf{R}) / \mathbf{Z}$, де дія групи $\mathbf{Z}$ на $U \times \mathbf{R}$ породжена дифеоморфізмом $\Psi(u, \varphi) = (F(u), \varphi - 1)$, $u \in U$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Одержуємо регулярне накриття $\mathrm{Pr}: U \times \mathbf{R} \mapsto N$. Позначимо через a замкнену криву, що є образом відрізка $u_* \times [0, 1]$ при проектуванні Pr, а поверхню $\mathrm{Pr}(U \times \{0\})$ позначимо через a^2. Покладемо $k = \dim \ker [F_* - 1 : H_1(U) \mapsto H_1(U)]$. Нижче буде показано, що ранг групи $H_1(N)$ дорівнює $k+1$. На N існують двоїсті за Пуанкаре базиси (гладких) 1-циклів $\{b_i\}_{i=0}^k$ та 2-циклів $\{b_i^2\}_{i=0}^k$, де $b_0 = a$, $b_0^2 = a^2$. Наступна теорема встановлює існування над N головного S^1-розшарування, тотальний простір якого допускає $2k$-параметричну сім'ю S^1-інваріантних симплектичних структур.

Теорема 7. *Нехай $L_0, \ldots, L_k$ — задані цілі числа, $\chi_1, \ldots, \chi_k$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — задані дійсні числа, причому*

$$L_0 + \sum_{i=1}^k L_i \lambda_k = 0.$$

Тоді можна вказати такі числа $A > 0$ і $B > 0$, що для довільного $\chi_0 \in \mathbf{R}$, $|\chi_0| > A$, і довільного $Q \in \mathbf{Z}$, $|Q| > B$, виконуються такі твердження:

1. *Існує головне S^1-розшарування $\pi: M \mapsto N$, $\dim M = 4$, з формою зв'язності ω, для якої $d\omega = \pi^* \Omega$, Ω — замкнена 2-форма на N з періодами*

$$\int_{b_i^2} \Omega := l_i = \begin{cases} L_0, & i = 0, \\ QL_i, & i = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

2. *На M існує S^1-інваріантна симплектична структура вигляду*

$$\omega^2 = \pi^* \sigma^2 + \pi^* \theta \wedge \omega,$$

де θ — замкнена невироджена 1-форма на N з періодами

$$\int_{b_i} \theta = \lambda_i, \quad i = 0, \ldots, k, \quad \lambda_0 = Q,$$

σ^2 — 2-форма на N така, що $d\sigma^2 = \theta \wedge \Omega$ і обмеження на кожну інтегральну поверхню рівняння $\theta = 0$ є формою невиродженою. При цьому для довільних перерізів $S_i: b_i^2 \mapsto \pi^{-1}(b_i^2)$ періоди 2-форми ω^2 дорівнюють

$$\int_{S_i(b_i^2)} \omega^2 = \chi_i, \quad i = 0, \ldots, k. \tag{11}$$

Цю теорему буде доведено у п. 6.

Нехай $\hat{h}: U \mapsto \mathbf{R}$ — F-інваріантна функція Морса. Вона природно породжує функцію $h: N \mapsto \mathbf{R}$ і S^1-інваріантну функцію $H = h \circ \pi: M \mapsto \mathbf{R}$. Нехай η — регулярне означення функції $\hat{h}$. Знайдемо умови, за яких для гамільтонового векторного поля $\mathfrak{I}\, dH$ реалізуються теореми 5, 6.

Розглянемо деяку компоненту зв'язності $c' \subset \left(\hat{h}\right)^{-1}(\eta)$. Для неї визначене таке найменше додатне q, що $F^q c' = c'$. Зафіксуємо на c' точку u_0 і позначимо через C_2' дугу на c', яка сполучає u_0 з $u_1 = F^{-q} u_0$, а через C_1' — довільну криву, яка сполучає u_1 з u_*. Запровадимо цикл $c'' = C_2' + C_1' - F^q(C_1')$.

Далі, нехай $b_1', \ldots, b_k'$ — цикли на U, для яких $i(b_i') = b_i$. Нижче буде показано, що на U існує система двоїстих за Пуанкаре циклів $a_1', \ldots, a_k'$, для яких виконуються рівності $I\left(b_j', a_i'\right) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k$ ($I(a, b)$ — індекс перетину циклів a, b). Нарешті, визначимо три набори цілих чисел, які відповідають компоненті c':

$$r_j = I\left(c', a_j'\right), \quad s_j = I\left(c'', a_j'\right), \quad m_j = \sum_{i=0}^{q-1} I\left(F^i\left(b_j'\right), c'\right), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{12}$$

Теорема 8. *Нехай* (M, ω^2) — *симплектичний многовид, побудований в теоремі* 7. *Покладемо*

$$n = \sum_{i=1}^{k} l_i m_i.$$

Множина $H^{-1}(\eta)$ *містить зв'язну компоненту* M_η, *яка у випадку* $n = 0$ *є* 3-*вимірним інваріантним тором системи* $\mathfrak{I}\, dH$, *а у випадку* $n \neq 0$ — 3-*вимірним інваріантним нільмноговидом.*

Числа ν_1, ν_2, *визначені теоремою* 4 *для тора* $N_\eta = \pi(M_\eta)$, *є цілочисловими комбінаціями чисел*

$$\tilde{\nu}_1 = \sum_{j=1}^{k} r_j \lambda_j, \qquad \tilde{\nu}_2 = qQ + \sum_{j=1}^{k} s_j \lambda_j.$$

Твердження цієї теореми випливає з результатів, що будуть викладені у п.п. 7, 8.

Зробимо кілька зауважень щодо арифметичної природи чисел $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$, які зумовлюють ергодичні властивості потоку системи з гамільтоніаном H на M_η. Обмежимося випадком, коли в теоремі 7 $L_0 = 0$. Запровадимо цілочислові вектори $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_k)$, $s = (s_1, \ldots, s_k)$, $\boldsymbol{L} = (L_1, \ldots, L_k)$. Припустимо, що $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{L}$ лінійно незалежні. Нехай $\boldsymbol{p}_i \in \mathbf{Z}^k$, $i = 1, \ldots, k-1$, — вільні твірні абелевої групи

$$\left\{ p \in \mathbf{Z}\colon (L, p) := \sum_{i=1}^{k} L_i p_i = 0 \right\}.$$

Кожному вектору $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ з теореми 7 можна поставити у взаємно однозначну відповідність вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbf{R}^{k-1}$ таким чином, що $\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{k-1} p_i \tau_i$. Добре відомо, що для майже кожного $\boldsymbol{\tau} \in D$, де D — обмежена область в $\mathbf{R}^{k-1}$, знайдуться числа $R > 0$, $T > 0$ такі, що

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1} n_i\tau_i + n_0\right| > R \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k-1} |n_i|\right)^T$$
$$\forall\, n = (n_1, \ldots, n_{k-1}) \in \mathbf{Z}^{k-1} \setminus \{0\}, \quad \forall\, n_0 \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

Елементарний аналіз показує, що коли вектор τ задовольняє (13), то числа

$$\tilde{\nu}_1 = \sum_{i=1}^{k} (r, p_i)\tau_i, \qquad \tilde{\nu}_2 = qQ + \sum_{i=1}^{k} (s, p_i)\tau_i,$$

а з ними й ν_1, ν_2, мають властивість сильної несумірності.

Нарешті, у ситуації, коли M_η є тривимірним тором, на основі аналогічних міркувань можна зробити висновок, що „типовим” (у метричному сенсі) є випадок, коли сильно несумірними є всі три числа

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 = \int\limits_{S(N_\eta)} \omega^2,$$

де $S\colon N_\eta \mapsto \pi^{-1}(N_\eta)$ — довільний переріз.

5. Твірні у вільних частинах груп $H_i(N)$, $H^i(N;\mathbf{Z})$, $i = 1, 2$. Не вдаючись до загальних методів теорії гомологій розшарованих просторів, проведемо елементарний аналіз структури вільних частин груп гомологій та цілочислових когомологій многовиду N.

Для циклу a, визначеного в попередньому пункті, і 1-форми α, описаної в п. 1, виконується рівність $\int_a \alpha = 1$. Розкладемо $H_1(N)$ в пряму суму $\mathcal{H}_1 \oplus \oplus \{n[a]\}_{n\in\mathbf{Z}}$, де $\mathcal{H}_1$ породжена циклами, вздовж яких інтеграл α обертається в 0, а $[a]$ — гомологічний клас циклу a.

Нехай $i\colon U \mapsto N$ — вкладення, причому $i(U) = \mathrm{p}^{-1}(1)$ (проекцію $\mathrm{p}\colon N \mapsto \mapsto S^1$ визначено в п. 1).

Легко доводиться наступне твердження.

Твердження 4. *Кожний клас з $\mathcal{H}_1$ може бути реалізований 1-циклом, що належить $\mathrm{p}^{-1}(1)$, тобто $\mathcal{H}_1 = i_*(H_1(U))$.*

Групу $H^1(N;\mathbf{Z})$, яка, як відомо [21], не має скруту, можна розкласти в пряму суму $\mathcal{H}^1 \oplus \{n[\alpha]\}_{n\in\mathbf{Z}}$, де $[\alpha]$ — клас в $H^1(N;\mathbf{Z})$, реалізований 1-формою α, а кожний клас з $\mathcal{H}^1$ може бути реалізований такою цілочисловою 1-формою β, що $\int_a \beta = 0$.

Нехай $(\xi', \eta') \in T_u U$ — репер, що задає позитивну орієнтацію на U. Будемо вважати, що трійка векторів $(i_*\xi', i_*\eta', Y(i(u)))$ задає позитивну орієнтацію на N (нагадаємо, що Y — векторне поле, ортогональне кожному шару $\mathrm{p}^{-1}(z)$, $z \in S^1$ і $\alpha(Y) = 1$).

Твердження 5. *Гомоморфізм $i^*\colon H^1(N;\mathbf{Z}) \mapsto H^1(U;\mathbf{Z})$ ізоморфно відображає $\mathcal{H}^1$ на $\ker[F^* - 1\colon H^1(U;\mathbf{Z}) \mapsto H^1(U;\mathbf{Z})]$.*

Доведення. Для кожної цілочислової 1-форми β на N покладемо $\beta' = = i^*\beta$. Для стислості позначатимемо спільним символом форми на U та природно породжені ними форми на $U \times \mathbf{R}$. Тоді $\mathrm{Pr}^*\beta = \beta' + dg$ для деякої функції $g: U \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Оскільки ця форма Ψ-інваріантна (визначення Ψ див. у п. 1), то $F^*\beta' - \beta' = d(g \circ \Psi - g)$. Тому функція $g \circ \Psi - g$ не залежить від φ і визначає функцію на U. Отже, $F^*[\beta'] = [\beta']$.

Навпаки, нехай $[\beta'] \in \ker(F^* - 1)$ і $f\colon U \mapsto \mathbf{R}$ — така функція, що $F^*\beta' - \beta' = df$. Вкажемо цілочислову 1-форму β на N таку, що $i^*\beta = \beta'$, $\int_a \beta = 0$. Нехай $\chi: [0, 1] \mapsto \mathbf{R}$ — гладка функція, тотожно рівна 0 в околі 0 і тотожно рівна 1 в околі 1. Тоді 1-форму $\beta' + d(\chi(\varphi) f) - f(u_*)\, d\varphi$ з множини $U \times (0, 1)$ можна гладко продовжити до Ψ-інваріантної 1-форми на $U \times \mathbf{R}$ [15]. Остання й породжує потрібну 1-форму β на N. Той факт, що β цілочислова випливає з твердження 1.

Добре відомо (див., наприклад [22]), що вільну систему твірних (надалі — в. с. т.) $\{[b_j']\}_{j=1}^{2g}$ у $H_1(U)$, реалізовану (гладкими) циклами $\{b_j'\}_{j=1}^{2g}$ на поверхні U, можна вибрати так, щоб при відповідному виборі цілих додатних чисел q_j, $j = k+1, \ldots, 2g$, q_j / q_{j+1}, набір $\{q_i[b_j']\}_{j=k+1}^{2g}$ утворював в. с. т. у підгрупі $\operatorname{im}[F_* - 1: H_1(U) \mapsto H_1(U)]$. Нехай $\{[\beta_j']\}_{j=1}^{2g}$ — спряжена система твірних у $H^1(U; \mathbf{Z})$, реалізована цілочисловими 1-формами $\{\beta_j'\}_{j=1}^{2g}$:

$$[\beta_i'](b_j') = \int_{b_j'} \beta_i' = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, 2g.$$

Твердження 6. *Набір* $\{\beta_j'\}_{j=1}^{k}$ *утворює в. с. т. у* $\ker[F^* - 1: H^1(U; \mathbf{Z}) \mapsto H^1(U; \mathbf{Z})]$.

Доведення. Для довільного $[b'] \in H_1(U)$ маємо

$$(F^* - 1)[\beta_i']([b']) = [\beta_i']((F^* - 1)[b']) = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

тобто $[\beta_i'] \in \ker(F^* - 1)$, $i = 1, \ldots, k$. Оскільки $q_j[b_j'] = (F_* - 1)([b_j''])$, $j = k+1, \ldots, 2g$, де b_j'' — деякий цикл на U, то для довільного $[\beta'] \in \ker(F^* - 1)$ маємо

$$[\beta'](q_j[b_j']) = q_j[\beta']((F_* - 1)[b_j'']) = (F^* - 1)[\beta']([b_j'']) = 0,$$
$$j = k+1, \ldots, 2g.$$

Тому β' однозначно виражається через систему $\{[\beta_i']\}_{i=1}^{k}$.

З тверджень 5, 6 випливає, що в $\mathcal{H}^1$ існує в. с. т $\{[\beta_i] = i_*[\beta_i']\}_{i=1}^{k}$.

Покладемо $b_j = i(b_j')$, $i = 1, \ldots, k$. Оскільки

$$[\beta_i]([b_j]) = [\beta_i']([b_j']) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k,$$

то справедливе наступне твердження.

Твердження 7. *Набір* $\{[b_j]\}_{j=1}^{k}$ *утворює в. с. т. у вільній частині* $\mathcal{H}_1$.

Твердження 8. *Має місце включення*

$$\operatorname{im}[(F_* - 1)\colon H_1(U) \mapsto H_1(U)] \subset \ker[i_*\colon H_1(U) \mapsto H_1(N)].$$

Кожний клас $i_*[b_j']$, $j = k+1, \ldots, 2g$, *є елементом порядку* $\le q_j$ *в* $\mathcal{H}_1$.

Доведення. Досить зауважити, що коли $b' = F(b'') - b''$, де b'' — цикл на U, то $i(b')$ є межею трубки $\bigcup_{t\in[0,1]} g_Y^t \circ i(b'')$.

Нехай $D_N^1 : H^1(N; \mathbf{Z}) \mapsto H_2(N)$ — ізоморфізм Пуанкаре. Реалізуємо кожний клас $D_N^1[\beta_i]$, $i = 1, \dots, k$, гладким двовимірним підмноговидом $b_i^2 \subset N$. Покладемо $a^2 = i(U)$. Для індексів перетину маємо

$$I(b_j, b_i^2) = \delta_{ij}; \quad I(a, b_i^2) = 0; \quad I(b_j, a^2) = 0;$$
$$I(a, a^2) = 1; \quad i, j = 1, \dots, k. \tag{14}$$

Зрозуміло, що a^2 реалізує клас $D_N^1[\alpha]$.

Лема 1. *Нехай $W \in N$ — двовимірний компактний орієнтовний підмноговид, який трансверсально перетинає $i(U)$. Існує така орієнтація 1-циклу $w' = i^{-1}(i(U) \cap W)$, що для довільного 1-циклу c' на U виконується рівність $I(i(c'), W) = I(c', w')$.*

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо, що W ортогональний $i(U)$. Нехай $x \in i(w')$. Компоненту зв'язності 1-циклу w', яка містить x, орієнтуємо ортом $\eta \in T_x i(w')$ так, щоб пара ортів η, ζ, де ζ — орт вектора $Y(x)$, визначала позитивну орієнтацію на W. Тоді для довільного $\xi \in T_x i(U)$, трансверсального η, трійка (ξ, η, ζ) визначає позитивну орієнтацію на N тоді і тільки тоді, коли пара $(i_*^{-1}\xi, i_*^{-1}\eta)$ визначає позитивну орієнтацію на U.

Без обмежень загальності вважаємо, що b_i^2 ортогонально перетинає a^2. Нехай a_i' — 1-цикл на U, для якого $i(a_i') = b_i^2 \cap a^2$. Орієнтуємо a_i' у відповідності з лемою 1. Тоді для довільного циклу c' на U маємо

$$I(i(c'), b_i^2) = I(c', a_i') = [\beta_i']([c']), \quad i = 1, \dots, k, \tag{15}$$

зокрема, $I(b_j', a_i') = \delta_{ij}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, 2g$.

Звідси одержуємо наступне твердження.

Твердження 9. *Клас $[a_i'] \in H_1(U)$ є образом класу $[\beta_i']$ при ізоморфізмі Пуанкаре $D_U^1 : H^1(U; \mathbf{Z}) \mapsto H_1(U)$.*

Твердження 10. *Набір $\{[a_i']\}_{i=1}^k$ утворює в. с. т. у $\ker[F_* - 1 : H_1(U) \mapsto \mapsto H_1(U)]$.*

Доведення випливає з рівності $F_*^{-1} D_U^1 = D_U^1 F^*$, яка, в свою чергу, є наслідком збереження форми перетину дифеоморфізмом F.

Нарешті, у вільній частині $H^2(N; \mathbf{Z})$ введемо в. с. т.

$$[\alpha^2] = \left(D_N^2\right)^{-1}[\alpha], \quad [\beta_i^2] = \left(D_N^2\right)^{-1}[b_i], \quad i = 1, \dots, k,$$

де $D_N^2 : H^2(N; \mathbf{Z}) \mapsto H_1(N)$ — ізоморфізм Пуанкаре. Ми можемо вважати, що $i^*\alpha^2$ є F-інваріантною формою площі на U, причому $\iota(Y)\alpha^2 = 0$.

6. Коефіцієнтна умова точності 3-форми $\theta \wedge \Omega$. Нехай (M, ω^2) — симплектичний 4-вимірний многовид, що має структуру головного S^1-розшарування $\pi : M \mapsto N$, причому 2-форма ω^2 — S^1-інваріантна, Ω — форма кривини на N, θ — 1-форма на N така, що векторне поле $\mathfrak{J}\pi^*\theta$ генерує дію кола S^1 на M.

Відомо [21], що для довільних цілочислових 1-форми γ та 2-форми δ^2 на N виконується рівність

$$\int_N \gamma \wedge \delta^2 = I\left(D_N^1[\gamma], D_N^2[\delta^2]\right).$$

Враховуючи розклади

$$[\theta] = \lambda_0[\alpha] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i[\beta_i], \tag{16}$$

$$[\Omega] = l_0[\alpha^2] + \sum_{i=1}^{k} l_i[\beta_i], \tag{17}$$

де $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $l_i \in \mathbf{Z}$, $i = 0, \dots, k$, — відповідно періоди форм θ і Ω, необхідну й достатню умову точності 3-форми $\theta \wedge \Omega$ (ця умова фігурувала у твердженні 1) з урахуванням (14) можна подати у вигляді

$$\int_N \theta \wedge \Omega = \sum_{i=0}^{k} l_i \lambda_i = 0. \tag{18}$$

Тепер безпосередньо перейдемо до доведення теореми 7. Для чисел l_i, λ_i, $i = 0, \dots, k$, які фігурують у формулюванні теореми 7, визначимо форми

$$\theta = \lambda_0 \alpha + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \beta_i,$$

$$\Omega = l_0 \alpha^2 + \sum_{i=1}^{k} l_i \beta_i^2.$$

Оскільки Ω цілочислова, то головне S^1-розшарування над N, про яке йдеться в теоремі 7, існує, а умова $\sum_{i=0}^{k} l_i \lambda_i = 0$ гарантує існування такої 2-форми σ_0^2 на N, що $\theta \wedge \Omega = d\sigma_0^2$. З невиродженості форми α випливає, що для досить великого $B > 0$ форма θ невироджена кожного разу, коли $|\lambda_0| = |Q| > B$. Симплектичну структуру на M задаємо у вигляді $\omega^2 = \pi^*\sigma^2 + \pi^*\theta \wedge \omega$, де

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \chi_0' \alpha^2 + \sum_{i=1}^{k} \chi_i' \beta_i^2,$$

а χ_i', $i = 0, \dots, k$, — дійсні числа, причому $\chi_0' >> \chi_i'$, $i = 1, \dots, k$. Легко бачити, що ω^2 замкнена. Покажемо, що при досить великому χ_0' обмеження σ^2 на кожну інтегральну поверхню рівняння $\theta = 0$ є формою невиродженою. Дійсно, в локальних координатах (u_1, u_2, φ) на $U \times \mathbf{R}$ маємо $\Pr^*\alpha^2 = A_0(u_1, u_2)\, du_1 \wedge du_2$, де гладка функція $A_0(u_1, u_2)$ у своїй області визначення не змінює знака, а рівняння $\Pr^*\theta = 0$ має вигляд

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{2} f_i(u_1, u_2, \lambda_0, \dots, \lambda_k)\, du_i,$$

де гладкі функції f_i мають властивість $f_i \to 0$ при $\lambda_0 \to \infty$. Оскільки поверхня U компактна, то при досить великих χ_0' 2-форма σ^2 має потрібну властивість невиродженості, яка одночасно забезпечує невиродженість форми ω^2.

Тепер для заданого набору $\chi_0, \ldots, \chi_k$ числа $\chi_0', \ldots, \chi_k'$ можна вибрати так, щоб виконувалися рівності (1).

7. Структура регулярних множин рівня функції, на яких 1-форма θ невироджена. У цьому пункті буде пояснено конструкцію, яка передувала формулюванню теореми 8.

Нехай η — регулярне значення функції $h: N \mapsto \mathbf{R}$ і на множині $h^{-1}(\eta)$ 1-форма θ невироджена. Без обмеження загальності можна вважати, що таку ж властивість має 1-форма α (див. п. 1). Отже, $h^{-1}(\eta)$ трансверсально перетинає многовид $\mathrm{p}^{-1}(z)$ для всіх $z \in S^1$. Покладемо $\tilde{h}(u, \varphi) = h(\Pr(u, \varphi))$. Для кожного $\varphi \in [0, 1]$ множина $U_\eta(\varphi) = \{ u \in U : \tilde{h}(u, \varphi) = \eta \}$ є об'єднанням циклів $\bigcup_{i=1}^{p} c_i'(\varphi)$, що гладко залежать від φ і не перетинаються між собою. Оскільки $\tilde{h}(F(u), \varphi - 1) = \tilde{h}(u, \varphi)$, то $U_\eta(0) = F^{-1}(U_\eta(1))$, тобто

$$(F^{-1}(c_1(1), \ldots, F^{-1}(c_p(1))) = (c_{i_1}'(0), \ldots, c_{i_p}'(0)).$$

Одержуємо перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix},$$

в якій розглянемо довільний нерозкладний цикл довжини q. Будемо вважати, що ним є цикл $1 \mapsto 2 \mapsto \ldots \mapsto q \mapsto 1$. Він виділяє зв'язну компоненту в множині $h^{-1}(\eta)$ — двовимірний тор $\mathcal{T}^2$, який перетинає $i(U)$ по циклах $c_1, \ldots, c_q$, де $c_i = i(c_i'(0))$, $c_{i+1}'(0) = F^{-1}(c_i'(1))$, $i = 1, \ldots, q-1$, $F^{-1}\big(c_q'(1)\big) = c_1(0)$.

Твердження 11. *Має місце розклад*

$$[c_1'(0)] + \ldots + \big[c_q'(0)\big] = \sum_{i=1}^{k} m_i [a_i'], \tag{19}$$

де

$$m_i = \sum_{i=1}^{q-1} I\Big(F_*^j [b_1'], [c_1'(0)]\Big).$$

Доведення. Оскільки $[c_i'(1)] = [c_i'(0)]$, то $\big[c_{i+1}'(0)\big] = F_*^{-1}[c_i'(0)]$, $i = 1, \ldots, q-1$, $F^{-1}\big[c_q'(0)\big] = [c_1'(0)]$. Звідси випливає F-інваріантність класу гомологій у лівій частині (19). Тоді

$$m_i = I\left([b_i'], \sum_{j=1}^{q} [c_i'(0)]\right) = I\left([b_i'], \left(\sum_{j=0}^{q-1} F_*^{-j}\right)[c_1'(0)]\right).$$

На основі цієї рівності легко одержуємо потрібний вираз для m_i.

На торі $\mathcal{T}^2$ можна вибрати базис циклів d_1, d_2 так, щоб $d_1 = c_1$, $I(d_1, d_2) = 1$, $\int_{d_2} \alpha = q$. Для $[d_1]$ маємо розклад

$$[d_1] = \sum_{j=1}^{k} r_j [b_j], \qquad r_j = I\big(c_1'(0), a_j'\big) = \big[\beta_j'\big]([c_1'(0)]), \tag{20}$$

а клас $[d_2]$ можна подати у вигляді

$$[d_2] = q[a] + [f_2] = q[a] + \sum_{j=1}^{k} s_j [b_j],$$

де

$$s_j = I\left(f_2', a_j'\right) = \left[\beta_j'\right]([f_2']), \quad i_*[f_2'] = [f_2]. \tag{21}$$

Дослідимо детальніше будову класу $[f_2]$. Цикл d_2 можна подати у вигляді $d_2 = \Pr\left(\tilde{C}_2\right)$, де $\tilde{C}_2$ — крива в $U \times \mathbf{R}$ з початком у точці $\{u_0\} \times \{0\}$, $u_0 \in c_1'(0)$, і кінцем у точці $\{u_1\} \times \{q\}$, де $u_1 = F^{-q} u_0$. Крім того, вздовж $\tilde{C}_2$ функція $\tilde{h}(u, \varphi)$ обертається в сталу η. Позначимо через C_2' проекцію $\tilde{C}_2$ на U, через C_1' — довільну криву на U, яка з'єднує кінець C_2' (точку u_1) з нерухомою точкою u_* дифеоморфізму F.

Твердження 12. *Справедлива рівність* $[f_2] = i_*\left[C_2' + C_1' - F^q(C_1')\right]$.

Доведення. Нехай $\tilde{C}_3$ — відрізок з початком у точці $\{u_*\} \times \{q\}$ і кінцем у точці $\{u_*\} \times \{0\}$. Тоді

$$\tilde{f}_2 = \tilde{C}_2 + \{C_1'\} \times \{q\} + \tilde{C}_3 - \{F^q(C_1')\} \times \{0\}$$

являє собою цикл у $U \times \mathbf{R}$. Гомотопією його можна перевести в цикл $\{C_2' + C_1' - F^q(C_1')\} \times \{0\}$. Отже,

$$\left[\Pr\left(\tilde{f}_2\right)\right] = i_*\left[C_2' + C_1' - F^q(C_1')\right].$$

З іншого боку,

$$\Pr\left(\tilde{f}_2\right) = d_2 + i\left(F^q(C_1')\right) - qa - i\left(F^q(C_1')\right),$$

а тому $\left[\Pr\left(\tilde{f}_2\right)\right] = [d_2] - q[a] = [f_2]$.

Твердження 13. *Має місце розклад*

$$[\mathcal{T}^2] = m_0[a^2] + \sum_{i=1}^{k} m_i\left[b_i^2\right], \tag{22}$$

де m_i *визначені в твердженні* 11, $m_0 = -q^{-1}\sum_{j=1}^{k} s_j m_j$, *а* s_j *визначені формулою* (21). *Коефіцієнти* r_j *в* (20) *пов'язані з* m_j *співвідношеннями*

$$q r_j = \sum_{i=1}^{k} m_i I\left(a_i', a_j'\right). \tag{23}$$

Доведення. Враховуючи лему 1 та твердження 11, коефіцієнт при $\left[b_i^2\right]$ в розкладі $[\mathcal{T}^2]$ за твірними, побудованими в п. 5, дорівнює

$$I\left(b_i, \mathcal{T}^2\right) = I\left(b_i', c_1(0) + \ldots + c_q(0)\right) = m_i.$$

З умови $I\left(d_2, \mathcal{T}^2\right) = 0$ легко знаходимо вираз для m_0.

Далі, завдяки F^*-інваріантності $\left[\beta_j'\right]$, враховуючи доведення твердження 11, знаходимо

$$[\beta'_j]\left(\sum_{i=1}^{q}[c'_i(0)]\right) = q[\beta'_j]([c'_1(0)]) = qr_j.$$

З іншого боку, на основі того ж твердження маємо

$$[\beta'_j]\left(\sum_{i=1}^{q}[c'_i(0)]\right) = \sum_{i=1}^{k} m_i[\beta'_j]([a'_j]) = \sum_{i=1}^{k} m_i I(a'_i, a'_j).$$

8. Про періоди форм θ, Ω. Враховуючи розклади (16), (17), (20), (21), можна легко перевірити виконання умов теорем 5, 6.

Так, для періодів 1-форми θ, які визначають арифметичні властивості чисел ν_1, ν_2, одержуємо вирази

$$\tilde{\nu}_1 = \int_{d_1}\theta = \sum_{j=1}^{k} r_j\lambda_j; \quad \tilde{\nu}_2 = \int_{d_2}\theta = q\lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} s_j\lambda_j.$$

Число n, яке визначає тип многовиду M_η, обчислюється за формулою

$$n = \int_{\mathcal{T}_2}\Omega = \sum_{i=0}^{k} m_i l_i. \tag{24}$$

При цьому у випадку, коли виконуються умови теореми 8, число m_0 дорівнює 0.

9. Приклад. Розглянемо випадок, коли в теоремі 8 U — поверхня роду 2. Нехай $\{g_i\}_{i=1}^4$ — базис 1-циклів на U, для якого $I(g_i, g_{i+2}) = 1$, $i = 1, 2$, $I(g_i, g_j) = 0$, $|i-j| \neq 2$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^4$ — спряжений базис 1-форм на U, $[\gamma_i]([g_i]) = \delta_{ij}$ (тут і надалі штрихи в позначеннях циклів і 1-форм на U опускаємо). Припустимо, що F — це скрут Дена навколо циклу e, гомологічного $g_1 - g_2$. Поверхню U вкладемо в $\mathbf{R}^3$ так, щоб функція висоти $\hat{h}$: $U \mapsto \mapsto \mathbf{R}$ була F-інваріантною і цикли g_1, g_2, e були її лініями рівня. Легко бачити, що матриця ізоморфізму F_*: $H_1(U) \mapsto H_1(U)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матриця ізоморфізму F^*: $H^1(U; \mathbf{Z}) \mapsto H^1(U; \mathbf{Z})$ одержується з неї транспонуванням. Таким чином, $k = \dim\ker(F_* - 1) = 3$. Конструкція з теореми 1 можлива для довільних цілих чисел $L_0, \ldots, L_3$ і довільних $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ таких, що

$$L_0 + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i L_i = 0.$$

Обчислимо набори чисел r_j, s_j, m_j у випадках, коли компонента зв'язності $c \subset \hat{h}^{-1}(\eta)$ гомологічна: 1) $\pm g_1$; 2) $\pm e$.

Знаходимо системи твірних. У $\ker(F^* - 1)$: $[\beta_1] = [\gamma_3]$, $[\beta_2] = [\gamma_4]$, $[\beta_3] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$. У $\ker(F_* - 1)$: $[a_i] = D_U^1[\beta_i]$, а саме, $[a_1] = -[g_1]$, $[a_2] = -[g_2]$, $[a_3] = [g_3] + [g_4]$. У $\mathrm{im}(F_* - 1)$: $[g_2] - [g_1] := [b_4]$. Тоді $[b_1] = [g_3]$, $[b_2] = [g_4]$, $[b_3] = [g_1]$.

Нехай тепер $[c]=[a_1]$. Для цього класу $q=1$, $m_1=1$, $m_0=m_2=m_3=0$, $r_1=r_2=0$, $r_3=-1$, $s_j=0$, $j=1,\ldots,3$. Отже, $n=m_1 l_1=QL_1$, $\tilde{\nu}_1=-\lambda_3$, $\tilde{\nu}_2=Q$. Таким чином, у даному випадку конструкції з теорем 7, 8 дозволяють одержати гамільтонову систему на 4-вимірному симплектичному многовиді, яка генерує квазіперіодичний $(L_1=0)$ або нільпотентний $(L_1\neq 0)$ потік на ізоенергетичній поверхні, визначеній значенням η. Ергодичність потоку на ній залежить від арифметичних властивостей числа λ_3.

У випадку, коли $[c]=[e]=[a_3]-[a_1]$, маємо $m_1=1$, $m_2=-1$, $r_j=0$, $j=1,\ldots,3$, $s_j=0$, $j=1,2,3$, $n=Q(L_1-L_2)$. Оскільки $\tilde{\nu}_1=0$, то потік на M_η не є ергодичним.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во ВУ АН, 1934. – 112 с.
2. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.
3. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527–530.
4. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 6. – С. 91–192.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев.: Наук. думка, 1969. – 248 с.
6. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. – 1967. – **169**. – P. 136–176.
7. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 314 p.
8. *Митропольский Ю. А.* О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего „ускоренную" сходимость // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 4. – С. 475–501.
9. *Митропольский Ю. А.* Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной маханики // Funkc. Ekvac. – 1966. – **9**, № 1–3. – С. 27–42.
10. *Митропольский Ю. А.* О построении решений и приводимости дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. – М.: Наука, 1968. – С. 212–213.
11. *Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф.* Потоки на однородных пространствах. – М.: Мир, 1966. – 208 с.
12. *McDuff D.* The moment map for circle action on symplectic manifolds // J. Geometr. Phys. – 1988. – **5**. – P. 149–161.
13. *Audin M.* Hamiltoniens periodique sur les varietes symplectique compactes de dimension 4 // Lect. Notes Math. – 1990. – **1416**. – P. 1–25.
14. *Ahara K., Hattori A.* 4-dimensional symplectic S^1-manifolds admitting moment map // J. Fac. Sci. Univ. Tokio. – 1991. – **38**, № 2. – P. 251–298.
15. *Fernandes M., Gray A., Morgan J. W.* Compact symplectic manifolds with free circle action, and Massey products // Mich. Math. J. – 1991. – **38**, № 2. – P. 271–283.
16. *Парасюк І. О.* Про ізоенергетичні поверхні S^1-інваріантних гамільтонових систем на 4-вимірних компактних симплектичних многовидах // Допов. Ан України. – 1993. – № 11. – С. 13–16.
17. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, вып. 5. – С. 3–49.
18. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Мир, 1970. – 104 с.
19. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
20. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
21. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – 528 с.
22. *Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О.* Лінійні простори. – К.: Вища шк., 1971. – 344 с.

Одержано 03.07.96