УДК 512.949.8

М. Х. ШХАНУКОВ, д-р физ.-мат. наук,
А. А. КЕРЕФОВ, канд. физ.-мат. наук (Кабардино-Балк. ун-т),
А. А. БЕРЕЗОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

The boundary-value problems for the heat equation are considered in the case where the boundary conditions contain a fractional derivative. The problems of these type arise when the heat processes are estimated by a nonstationary heat flow by using the one-dimensional thermal model of a two-layer system (coating – base). It is proved that the problem considered is correct. A one-parameter family of difference schemes is constructed and the stability and convergence of difference schemes in the uniform metric is proved.

Розглядаються крайові задачі для рівняння теплопровідності з дробовою похідною в крайових умовах. Задачі такого типу одержуємо при оцінюванні теплових процесів з допомогою одновимірної теплофізичної моделі двошарової системи (покриття–основа) нестаціонарною тепловою течією. Доведена коректність розглядуваної задачі, побудована однопараметрична сім'я різницевих схем, встановлена стійкість і збіжність різницевих схем у рівномірній метриці.

1. Пусть $\Omega = \{(x, t)\colon 0 < x < +\infty,\ 0 < t < T\}$ — область независимых переменных x и t из R^2. Рассмотрим следующую задачу: найти ограниченное в области Ω решение $u(x, t)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ уравнения

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u_x(0, t) - \alpha_1 D_{0t}^{1/2} u(0, t) = -\varphi_1(t), \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

где $f(x, t)$ и $\varphi_1(t)$ — заданные непрерывные функции, $\varphi_1(0) = 0$, а $D_{0t}^{1/2} f$ — оператор дробного дифференцирования [1] порядка $\alpha = 1/2$. Используя свойства операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования для $\nu(t) \in L(0, T)$, имеем

$$D_{0t}^{1/2}(D_{0t}^{-1/2}\nu(t)) = \nu(t). \tag{4}$$

Предположим, что решение задачи (1) – (3) существует. Тогда решение смешанной краевой задачи $u(x, 0) = 0$, $u_x(0, t) = \nu(t)$ для уравнения (1) допускает представление [2]

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\nu(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} d\xi \int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)\right] f(\xi, \eta)d\eta.$$

Переходя в полученном представлении $u(x, t)$ к пределу при $x \to 0+$ и вводя обозначение $u(0, t) = \tau(t)$, находим

$$\tau(t) = -D_{0t}^{-1/2}\nu(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} d\xi \int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right) f(\xi, \eta)d\eta. \tag{5}$$

Действуя на обе части равенства (5) оператором дробного дифференцирования порядка $\alpha = 1/2$ и используя равенство (4), имеем

$$D_{0t}^{1/2}\tau(t) = -\nu(t) + \Phi(t), \tag{6}$$

где

$$\Phi(t) = D_{0t}^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} d\xi \int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right)\right] f(\xi,\eta)d\eta.$$

В силу граничного условия (3) заключаем, что

$$D_{0t}^{1/2}\tau(t) = \alpha^{-1}[\nu(t) + \varphi_1(t)],$$

и тогда

$$(1/\alpha_1 + 1)\nu(t) = \Phi(t) - \varphi_1(t).$$

Следовательно, при $\alpha_1 \neq -1$ функция $\nu(t) = u_x(0, t)$ существует и определяется однозначно, а задача (1) – (3) редуцируется к хорошо изученной первой краевой задаче для уравнения (1) в полуполосе Ω.

Пусть $\Omega = \{(x, t)\colon 0 < x < l, 0 < t < T\}$ и для уравнения (1) рассмотрим задачу: найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \Phi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

$$\alpha_{11}u_x(0, t) - \alpha_{12}D_{0t}^{1/2}u(0, t) = -\varphi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\alpha_{21}u_x(l, t) = \alpha_{22}D_{0t}^{1/2}u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

где α_{ij}, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, — постоянные, $\Phi_0(x) \in C^1[0, l]$, причем не нарушая общности считаем $\Phi_0(0) = 0$, $\Phi_0(l) = 0$, $\varphi_i(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям согласования: $\alpha_{11}\Phi_0'(0) = -\varphi_1(0)$, $\alpha_{21}\Phi_0'(l) = -\varphi_2(0)$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (7), допускает представление [3]

$$\begin{aligned} u(x, t) = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x}{4(t-\eta)}\right)\left[u_\xi(0,\eta) - \frac{x}{2(t-\eta)}u(0,\eta)\right]d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-1/2}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\Phi_0(\xi)d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}\right)\left[u_\xi(l,\eta) - \frac{x-l}{2(t-\eta)}u(l,\eta)\right]d\eta + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^l d\xi\int_0^t f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta. \end{aligned} \tag{10}$$

Исследуем выражение

$$\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2}u(0,\eta)\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta$$

при $x \to 0+$. Предварительно выполнив замену переменной интегрирования по формуле $2\sqrt{t-\eta}\ \beta = x$, получим

$$\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(0,\eta) \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{+\infty} u\left(0, t - \frac{x^2}{4\beta^2}\right) e^{-\beta^2} d\beta,$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(0,\eta)\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta = \frac{1}{2}u(0,t). \tag{11}$$

Аналог ично можно показать, что

$$\lim_{x\to l-} -\frac{x-l}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(l,\eta) \exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta = \frac{1}{2}u(l,t). \tag{12}$$

Переходя в выражении (10) к пределу при $x \to 0+$ и $x \to l-$ последовательно с учетом (11) и (12), находим

$$u(0,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} u_\xi(0,\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{l}{4(t-\eta)}\right) u_\xi(l,\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{l}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(l,\eta) \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-1/2}\Phi_0(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l d\xi \int_0^t f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta, \tag{13}$$

$$u(l,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) u_\xi(0,\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-1/2} \exp\left(-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right) \Phi_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{l}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(0,\eta) \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} u_\xi(l,\eta) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l d\xi \int_0^t f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right) d\eta. \tag{14}$$

С учетом граничных условий (8) и (9) выражения (13) и (14) принимают вид

$$u(0,t) = -\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\pi}\alpha_{11}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} D_{0\eta}^{1/2} u(0,\eta)d\eta +$$

$$+\frac{l}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(l,\eta)\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta +$$

$$+\frac{\alpha_{22}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{21}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)D_{0\eta}^{1/2} u(l,\eta)d\eta + F_1(t), \tag{15}$$

$$u(l,t) = -\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)D_{0\eta}^{1/2} u(0,\eta)d\eta +$$

$$+\frac{l}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} u(0,\eta)\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta -$$

$$-\frac{\alpha_{22}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{21}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} D_{0\eta}^{1/2} u(l,\eta)d\eta + F_2(t), \tag{16}$$

где

$$F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\varphi_1(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{21}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)\varphi_2(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-1/2}\Phi_0(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l d\xi\int_0^t f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta,$$

$$F_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right)\varphi_1(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{21}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2}\,\varphi_2(\eta)d\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-1/2}\exp\left(-\frac{(l-\xi)^2}{4t}\right)\Phi_0(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l d\xi\int_0^t f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-1/2}\exp\left(-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}\right)d\eta.$$

Рассмотрим интегралы

$$I_1 = \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}}\int_0^t (t-\eta)^{-1/2} D_{0\eta}^{1/2} u(0,\eta)d\eta,$$

$$I_2 = \frac{\alpha_{22}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{21}} \int_0^t (t-\eta)^{-1/2} D_{0\eta}^{1/2} u(l,\eta)\,d\eta.$$

Так как

$$I_1 = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^t (t-\eta)^{-1/2} D_{0\eta-\varepsilon}^{1/2} u(0,\eta)\,d\eta =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t-\varepsilon} u(0,\eta)\,d\eta \frac{d}{d\eta} \int_{\eta+\varepsilon}^t (\eta_1-\eta)^{-1/2} \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}} (t-\eta)^{-1/2} d\eta_1 =$$

$$= -\frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\pi}\,\alpha_{11}} \int_0^t u(0,\eta)\,d\eta \frac{d}{d\eta} \int_\eta^t (t-\eta_1)^{-1/2} (\eta_1-\eta)^{-1/2} d\eta_1,$$

то, выполняя под знаком внутреннего интеграла замену переменной интегрирования по формуле $\eta_1 = \eta + (t-\eta)z$ и пользуясь определением бета-функции, получаем $I_1 = 0$. Аналогично находим, что и $I_2 = 0$.

Ввиду того что

$$\int_0^t K_1(t,\eta) D_{0\eta}^{1/2} u(l,\eta)\,d\eta = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^t u(l,t) D_{\eta t}^{1/2} K_1(t,\eta)\,d\eta,$$

$$\int_0^t K_2(t,\eta) D_{0\eta}^{1/2} u(0,\eta)\,d\eta = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^t u(0,t) D_{\eta t}^{1/2} K_2(t,\eta)\,d\eta,$$

где

$$K_1(t,\eta) = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}\sqrt{\pi}} (t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) \in C([0,T]\times[0,T]),$$

$$K_2(t,\eta) = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\sqrt{\pi}} (t-\eta)^{-1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) \in C([0,T]\times[0,T]),$$

$\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ и $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

С учетом изложенного выше равенства (15) и (16) принимают вид

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_0^t u(l,\eta) n_1(t,\eta)\,d\eta + F_1(t), \\ u(l,t) &= \int_0^t u(0,\eta) n_2(t,\eta)\,d\eta + F_2(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь

$$n_1(t,\eta) = \Gamma(1/2) D_{\eta t}^{1/2} K_1(t,\eta) + \frac{l}{2\sqrt{\pi}} (t-\eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) \in$$

$$\in C([0,T]\times[0,T]).$$

$$n_2(t, \eta) = -\Gamma(1/2) D_{\eta t}^{1/2} K_2(t, \eta) + \frac{l}{2\sqrt{\pi}} (t - \eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{l^2}{4(t-\eta)}\right) \in$$

$$\in C([0, T] \times [0, T]).$$

Из системы (7) в силу непрерывности $F_i(t)$ и $n_i(t, \eta)$, $i = 1, 2$, функции $u(0, t)$ и $u(l, t)$ определяются однозначно и, следовательно, задача (1), (7), (8), (9) редуцируется ко второй краевой задаче для уравнения (1), когда на нехарактеристических участках границы $x = 0$ и $x = l$ области Ω задаются производные $u(x, t)$ по направлению внутренней нормали.

2. На полубесконечной полосе $x > 0, 0 < t < T$, рассмотрим задачу

$$u_t = (k u_x)_x, \tag{18}$$

$$k_1 u_x(0, t) = \beta_1(t) u(0, t) - \mu_1(t), \tag{19}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad |u(x, t)| \le M, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 \le t \le T, \tag{20}$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \le x_1, \\ k_2, & x > x_1. \end{cases}$$

В точке разрыва коэффициента теплопроводности $k(x)$ выполнены условия непрерывности температуры и теплового потока

$$[u]_{x = x_1} = u(x_1 + 0, t) - u(x_1 - 0, t) = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x = x_1} = 0. \tag{21}$$

Решение задачи (18) – (20) $u = u^+$ в области $x > x_1$, $t > 0$ имеет вид

$$u^+(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2 \pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left(-\frac{(x - x_1)^2}{4k_2(t - \tau)}\right) d\tau,$$

$$\nu(t) = k_2 u_x^+(x_1, t).$$

Отсюда при $x = x_1$ получаем

$$u^+(x_1 + 0, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2 \pi}} \int_0^t \frac{k_2 u_x^+(x_1 + 0, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

На основании (21) из последнего находим

$$u^-(x_1 - 0, t) = -\frac{1}{\sqrt{k_2 \pi}} \int_0^t \frac{k_1 u_x^-(x_1 - 0, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \tag{22}$$

$u^-(x, t)$ — решение задачи (18) – (20) в области $0 < x < x_1$, $0 < t \le T$. Обращая интегральное уравнение Абеля (22), получаем

$$-k_1 u_x^-(x_1 - 0, t) = \sqrt{\frac{k_2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u^-(x_1, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \tag{23}$$

Таким образом, при вычислении температурного поля в области $0 < x < x_1$, $t > 0$ влияние полубесконечной области $x > x_1$, $t > 0$ можно учесть, поставив при $x = x_1$ нелокальное условие (23).

Исходя из изложенного, в области $D \equiv \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ будем рассматривать задачу

$$u_t = k_1 u_{xx}, \tag{24}$$

$$k_1 u_x(0, t) = \beta_1(t) u(0, t) - \mu_1(t), \tag{25}$$

$$-k_1 u_x(l, t) = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(l, \eta)}{\sqrt{t-\eta}} d\eta, \tag{26}$$

$$u(x, 0) = 0. \tag{27}$$

Если функция $u(l, t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, T]$, то нелокальное условие (26) с учетом (27) можно представить в виде [4]

$$-k_1 u_x(l, t) = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u'(l, \eta)}{\sqrt{t-\eta}} d\eta. \tag{28}$$

3. Разностный метод решения задач вида (8), (9) будем рассматривать на примере задачи (24) – (27), хотя все рассуждения справедливы и для краевых условий вида (8), (9) и для более общих уравнений параболического типа с переменными коэффициентами.

Итак, в D введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau),\ i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$, где $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$, h, τ — шаги сетки по пространственной и временной координатам. Тогда

$$\int_0^{t_j} \frac{u'(l, \eta)}{(t-\eta)^{1/2}} d\eta = \sum_{s=1}^{j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{u'(l, \eta)}{(t_j-\eta)^{1/2}} d\eta =$$

$$= \sum_{s=1}^{j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{u^s_{\bar{t},N}\, d\eta}{(t_j-\eta)^{1/2}} + \sum_{s=1}^{j} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{d\eta}{(t_j-\eta)^{1/2}} O(\tau), \tag{29}$$

где $u^s_{\bar{t},N} = (u^s_N - u^{s-1}_N)/\tau = \dot{u}(t_s) + O(\tau)$.

В дальнейшем будем предполагать, что решение искомой задачи имеет требуемую гладкость. На основании (29) условие (28) перепишем так:

$$-k_1 u_x(l, t_j) = \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=1}^{j} u^s_{\bar{t},N} \left(\sqrt{t_j - t_{s-1}} - \sqrt{t_j - t_s}\right) - \mu_2,\ \mu_2 = O(\tau). \tag{30}$$

Задаче (24), (25), (30), (27) поставим в соответствие однопараметрическое семейство разностных схем:

$$y_t = \Lambda y^{(\sigma)}, \quad y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma) y, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \tag{31}$$

$$(k_1 y_{x,0} - \beta_1 y_0)^{(\sigma)} = 0{,}5\, h\, y_{t,0} - \mu_1(\bar{t}), \tag{32}$$

$$-\left(k_1 y_{\bar{x},N} + \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=1}^{j} y^s_{\bar{t},N} \left(\sqrt{t_j - t_{s-1}} - \sqrt{t_j - t_s}\right)\right)^{(\sigma)} = 0{,}5\, h\, y_{t,N} + \mu_2, \tag{33}$$

$$\begin{gathered} y(x, 0) = 0, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x,i} = h^{-2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \\ y_{\bar{x},i} = h^{-1}(y_i - y_{i-1}), \quad y_{x,i} = h^{-1}(y_{i+1} - y_i), \quad y_t = \tau^{-1}(y^{j+1} - y^j), \end{gathered} \tag{34}$$

σ — произвольный вещественный параметр.

Обозначим $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в (31) – (34), получаем задачу для погрешности :

$$z_t = \Lambda z^{(\sigma)} + \Psi, \quad \Psi = \begin{cases} O(h^2 + \tau), & \sigma \neq 1/2, \\ O(h^2 + \tau^2), & \sigma = 1/2, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} (k_1 z_{\bar{x},0} - \beta_1 z_0)^{(\sigma)} = 0{,}5 h z_{t,0} - \nu_1(t), \\ -\left(k_1 z_{\bar{x},N} + \dfrac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \sum\limits_{s=1}^{j} z_{\bar{t},N}^{s} \left(\sqrt{t_j - t_{s-1}} - \sqrt{t_j - t_s} \right) \right)^{(\sigma)} = 0{,}5 h z_{t,N} - \nu_2(t), \end{cases} \tag{36}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \nu_1, \nu_2 = O(h^2 + \tau). \tag{37}$$

Чтобы получить оценку для погрешности, задачу (35) – (37) приведем к каноническому виду [5]

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma k_1}{h^2} \right) \hat{z}_i = \frac{\sigma k_1}{h^2} (\hat{z}_{i+1} + \hat{z}_{i-1}) + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)k_1}{h^2} \right) z_i +$$

$$+ \frac{(1-\sigma)k_1}{h^2} (z_{i+1} + z_{i-1}) + \Psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{38}$$

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma k_1}{h^2} + \frac{2\sigma\beta_1}{h} \right) \hat{z}_0 = \frac{2\sigma k_1}{h^2} \hat{z}_1 + \frac{2(1-\sigma)k_1}{h^2} z_1 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)k_1}{h^2} - \frac{2(1-\sigma)\beta_1}{h} \right) z_0 + \Psi_0, \quad \Psi_0 = \nu_1 / 0{,}5h, \tag{39}$$

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\sigma k_1}{\kappa h} \right) \hat{z}_N = \frac{\sigma k_1}{\kappa h} \hat{z}_{N-1} + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\sigma}{\kappa} \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (\sqrt{2} - 1) - \frac{(1-\sigma)k_1}{\kappa h} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\sigma}{\kappa} \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) z_N + \frac{1-\sigma}{\kappa} \frac{k_1}{h} z_{N-1} + \Psi_N, \quad \kappa = 0{,}5h + \frac{2\sigma\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau}, \tag{40}$$

где

$$\Psi_N = -\frac{\sigma}{\kappa} \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} [(\sqrt{j+1} - 2\sqrt{j} + \sqrt{j-1}) z_N^1 + \ldots + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) z_N^{j-1}] -$$

$$- \frac{1-\sigma}{\kappa} \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} [(\sqrt{j} - 2\sqrt{j-1} + \sqrt{j-2}) z_N^1 + \ldots + (\sqrt{2} - 2) z_N^{j-1}] + \frac{\nu_2}{\kappa}. \tag{41}$$

Для оценки $z(x_i, t_j)$ будем производить “расслоение” сетки [5] на подмножества меньшего числа измерений и оценивать на слое z_i^{j+1}.

Оценим суммы, стоящие в квадратных скобках в соотношении (41):

$$\begin{aligned} \sigma[\ \ldots\ ] &\le \frac{\sigma}{\kappa} \beta_2 \frac{1}{\sqrt{\tau}} (\sqrt{j} - \sqrt{j+1} + \sqrt{2} - 1) \max_{1 \le k \le j-1} \left| z_N^k \right|, \\ (1-\sigma)[\ \ldots\ ] &\le \frac{(1-\sigma)}{\kappa} \beta_2 \frac{1}{\sqrt{\tau}} (\sqrt{j-1} - \sqrt{j} + 1) \max_{1 \le k \le j-1} \left| z_N^k \right|. \end{aligned} \tag{42}$$

Таким образом, задачу для погрешности мы привели к виду

$$A(P) z(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P, Q) z(Q) + F(P),$$

где $Ш'(P)$ — окрестность узла P (подмножество сетки ω, не содержащее узел P).

Решение задачи (38) – (40) ищем в виде $z = z^0 + z^*$, где z^0 — решение задачи (38) – (40) с $\Psi_0 = \Psi_N = 0$, а z^* — решение той же задачи с $\Psi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Так как

$$D'(P(0, t_{j+1})) = A(P_{j+1}) - \sum_{Q \in Ш'_{j+1}} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\tau} + \frac{2\sigma\beta_1}{h} > 0,$$

$$D'(P(l, t_{j+1})) = \frac{1}{\tau}, \quad 0 \le \sigma \le 1, \quad Ш'(P(x, t_{j+1})) = Ш'_{j+1} + Ш''_j,$$

где $Ш'_{j+1}$ — множество узлов $Q(x, t_{j+1}) \in Ш'(P(x, t_{j+1}))$, $Ш''_j$ — множество узлов $Q(x, t_j) \in Ш'(P(x, t_{j+1}))$,

$$\sum_{Q \in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\tau} - \frac{2(1-\sigma)\beta_1}{h} > 0, \quad \tau < \frac{h}{2(1-\sigma)\beta_1}, \quad x = 0,$$

$$\sum_{Q \in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\tau} - \frac{\beta_2(1+\sigma(\sqrt{2}-2))}{\sqrt{\tau}(0{,}5h + \sigma\beta_2\sqrt{\tau})} > 0, \quad \tau < \frac{h^2}{4\beta_2^2\left[1-\sigma(2-\sqrt{2})\right]},$$

$$\beta_2 = \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}}, \quad x = l, \quad \frac{1}{D'} \sum_{Q \in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) \le 1, \quad \sum_{Q \in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\tau} > 0,$$

то на основании теоремы 4 [5, с. 347] имеем

$$\| z^0(t_{j+1}) \|_C \le M \sum_{j'=0}^{j} \tau \| \Psi^{j'} \|_C, \quad \| f \|_C = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |f(x)|. \tag{43}$$

Перейдем к оценке z^*. Исходя из представления (38) – (40), получаем

$$D(P(x_i, t_{j+1})) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$D(P(0, t_{j+1})) = \frac{2}{h}\beta_1 \ge \frac{2}{h}\beta_* > 0, \quad D(P(l, t_{j+1})) = \frac{1}{\kappa}\frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}[1 -$$

$$-\sigma(2-\sqrt{2})] > 0, \quad 0 \le \sigma \le 1; \quad B(P, Q) \ge 0$$

при

$$\tau \le \min\left\{\frac{h^2}{2(1-\sigma)(k_1 + \beta_* h)}, \frac{h^2}{\left(\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 2k_1}\right)^2}\right\}, \ \beta_2 = \frac{2\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}}, \ \beta_1 \ge \beta_* > 0.$$

Поэтому, пользуясь теоремой 3 [5, с. 344], оценками (42), находим

$$\| z^*(t_{j+1}) \|_C \le \max_{0 \le k \le j} \left(\frac{|\nu_1(t_k)|}{\beta_*} + \frac{|\nu_2(t_k)|\sqrt{\tau}}{\left[1-\sigma\left(2-\sqrt{2}\right)\right]\beta_2} \right) + \kappa_1 \max_{0 \le k \le j} |z_N(t_k)|, \tag{44}$$

$$\kappa_1 = 1 - \frac{\sqrt{\tau}}{2\sqrt{T}\left(1-\sigma\left(2-\sqrt{2}\,\right)\right)}.$$

Объединяя оценки (43), (44), получаем

$$\| z^{j+1} \|_C \le M \sum_{j'=0}^{j} \| \Psi^{j'} \|_C + \max_{0 \le k \le j} | \rho(t_k) | + \kappa_1 \max_{0 \le k \le j} \| z(t_k) \|_C,$$

где

$$| \rho(t_k) | = \frac{|\nu_1(t_k)|}{\beta_*} + \frac{|\nu_2(t_k)|\sqrt{\tau}}{[1-\sigma(2-\sqrt{2})]\beta_2}.$$

Отсюда следует оценка

$$\| z^{j+1} \|_C \le \frac{2M\sqrt{T}}{\sqrt{\tau}} \sum_{j'=0}^{j} \tau \| \Psi^{j'} \|_C + \frac{2\sqrt{T}}{\beta_* \sqrt{\tau}} \max_{0 \le k \le j} | \nu_1(t_k) | + \frac{2\sqrt{T}}{\beta_2} \max_{0 \le k \le j} | \nu_2(t_k) |. \quad (45)$$

Таким образом, из оценки (45) в классе достаточно гладких решений ($u \in C_2^4$ при $\sigma \ne 1/2$; $u \in C_3^4$ при $\sigma = 1/2$, где C_n^m — класс функций, имеющих m непрерывных в $\overline{D}$ производных по x и n непрерывных в $\overline{D}$ производных по t) при выполнении условий

$$0 \le \sigma \le 1, \quad \tau \le \min \left\{ \frac{h^2}{2(1-\sigma)(k_1 + \beta_* h)}, \; \frac{h^2}{\left(\sqrt{\beta_2^2 + 2k_1} + \beta_2\right)^2} \right\},$$

$$\tau = 0(h)$$

следует сходимость решения разностной задачи (31) – (34) к решению исходной задачи (24) – (27) в равномерной метрике со скоростью $O(h^{3/2} + \tau)$ при $\sigma = 1/2$, $O(h^{3/2} + \tau^{1/2})$ при $\sigma \ne 1/2$.

Согласно теореме Лакса об эквивалентности [6] можно утверждать, что разностная схема является устойчивой в смысле той же метрики. Нахождение решения сеточных уравнений на каждом временном слое осуществляется методом прогонки.

1. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 1985. – 479 с.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 238 с.
3. *Гурса Э.* Курс математического анализа: В 3-х т. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 3. – 276 с.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – М.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
7. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.

Получено 11. 06. 92