УДК 510.21

Г. М. Перун, научн. сотр. (Черновиц. филиал Киев. ин-та автоматики),
В. К. Ясинский, канд. физ.-мат. наук (Черновиц. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

It is found that the solutions of stochastic linear parabolic equations with Poisson perturbations are stabilized in square mean. The problem of determining the stability margin of a rod under random perturbations is studied.

Встановлена стабілізація в середньому квадратичному розв'язків стохастичних лінійних рівнянь параболічного типу з пуассоновими збуреннями та розглянута задача визначення запасу стійкості стержня під дією випадкових збурень.

В работе [1] рассматривается задача Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа, коэффициенты которого не зависят от фазовой переменной и являются функциями типа "белого шума", и на модельном примере показаны достаточные условия существования решения как первого, так и второго момента.

В предлагаемой работе для стохастических дифференциальных уравнений параболического типа с постоянными действительными коэффициентами при наличии винеровских и пуассоновских возмущений при младших членах с помощью преобразования Фурье и интегрального признака для линейных стохастических уравнений относительно переменной t получены достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости в среднем квадратичном решений изучаемых уравнений.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}\, \mathbb{P})$ и поток σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$. Будем рассматривать случайную функцию $\{u(t, x, \omega), (t, x, \omega) \in [0, T] \times \mathbb{D} \times \Omega\}$, которую назовем $\mathfrak{F}_t$-согласованной, если при фиксированных $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{D}$ случайная величина $u(t, x, \omega)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима для любых $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ — некоторая область пространства $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ [2]. Обозначим через $\mathbb{M}_T$ пространство функций $\{u(t, x, \omega)\}$, измеримых при почти всех ω по t и x относительно σ-алгебры борелевских множеств на плоскости, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\} dx < \infty$$

при любых $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — знак математического ожидания [3].

Пусть в дальнейшем функции $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}^1$ суммируемы по v с квадратом

$$\int_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv < +\infty,$$

где $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^1$ [4].

Обозначим через $L_{2\mathbb{R}^1}$, L_{2T} пространства функций $\{u(t, x, \omega)\}$, имеющие нормы

$$\| u(t, x, \omega)\|^2_{L_{2\mathbb{R}^1}} := \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx, \quad | u(t, x, \omega)\|^2_{L_{2T}} := \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt,$$

$$\mathbb{E}_u(t) := \mathbb{E}\{\| u(t, x, \omega)\|^2_{L_{2\mathbb{R}^1}}\}.$$

В $\mathbb{M}_T$ введем норму равенством

$$\| u(t, x, \omega) \|^2 := \int_0^T \mathbf{E}_u(t)dt$$

для любого $T > 0$. Обозначим

$$Q(A, q, p) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj} q^k p^j,$$

где A — действительная матрица порядка $(n+1) \times (m+1)$, составленная из $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим подпространство $\mathbf{M}_{1T} \subset \mathbf{M}_T$, для элементов которого при любой матрице A выполняется

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \in \mathbf{M}_T.$$

Пусть задана стохастическая задача Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) =$$

$$= \left[Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] \dot{\alpha}(t, \omega) +$$

$$+ \int_{\mathbf{V}} \left[Q\left(G, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) f(v) u(t, x, \omega) \right] \dot{\tilde{\nu}}(dv, t), \tag{1}$$

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \tag{2}$$

где $\{\alpha(t, \omega)\}$ — винеровский процесс, $\tilde{\nu}(dv, t) = \nu(dv, t) - \Pi(dv)t$ — центрированная пуассоновская мера, $\mathbf{E}\{\tilde{\nu}(dv, t)\} = \Pi(dv)t$; ν не зависит от α и ν, α согласованы с потоком σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$.

Под решением (1), (2) понимаем функцию $\{u(t, x) := u(t, x, \omega)\}$, согласованную с потоком σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}$ и удовлетворяющую почти наверное при каждых (t, x) уравнению [1]

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) = [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s, x) ds +$$

$$+ \int_0^t Q\left(C, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s, x) d\alpha(s, \omega) + \int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(C, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s, x) f(v) \tilde{\nu}(dv, ds).$$

Отметим, что $\{u(t, x)\}$ не имеет разрывов второго рода по t, непрерывна справа по t [5].

Будем рассматривать задачу о существовании в $\mathbf{M}_{IT}$ решения задачи Коши уравнения (1), (2), а также вопрос об устойчивости в среднем квадратичном этого решения при $t \to \infty$ [6].

Лемма 1. *Преобразование Фурье по x функции $\{u(t, x)\}$*

$$v(t, \sigma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \tag{3}$$

не выводит ее из $\mathbf{M}_T$ *для любого конечного значения* T.

Доказательство. Существование преобразования Фурье почти наверное вытекает из того, что $\{u(t, x, \omega)\}$ почти наверное принадлежит $L_{2\mathbb{R}^1}$ при всех t, так как

$$\mathbb{P}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx > N \right\} \leq \frac{\mathbf{E}_u(t)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Поскольку по теореме Планшереля [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx,$$

а T имеет конечную меру, то лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть:*

А) *корни полинома* $P(\lambda, i\sigma) = \lambda Q(A, \lambda, i\sigma) = Q(B, \lambda, i\sigma)$ *при всех* σ *удовлетворяют неравенству* $\operatorname{Re} \lambda \leq \varphi(\sigma) \leq 0$, *причем* $\varphi(\sigma) \to -\infty$ *при* $|\sigma| \to +\infty$ *и равенство* $\varphi(\sigma) = 0$ *выполняется только при* $\sigma = 0$;

В) *при каждом* $t \in (0, T)$ (T*-конечной меры и* $C = 0$, $G = 0$) *для детерминированного уравнения* (1), (2) *существует единственное решение задачи Коши в* $L_{2\mathbb{R}^1}$.

Тогда решение задачи Коши для стохастического уравнения (1), (2) *параболического типа* ($C \neq 0$, $G \neq 0$) *существует в* $\mathbf{M}_{1T}$.

Доказательство. Поскольку преобразование Фурье сохраняет норму в $\mathbf{M}_{1T}$, достаточно показать, что существует решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] = Q\left(B, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) +$$

$$+ \left[Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] \dot{\alpha}(t, \omega) +$$

$$+ \int_{\mathbb{V}} \left[Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) f(v) \right] \dot{\tilde{\nu}}(dv, t) \tag{4}$$

такое, что для любой матрицы D

$$Q\left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathbf{M}_{1T}.$$

Решение $\{v(t, \sigma, \omega)\}$ стохастического дифференциального уравнения (4) при каждом $\sigma \neq 0$ существует и единственно с точностью до стохастической эквивалентности [4].

Остается доказать, что существует $\mathbf{E}_v(t)$ при каждом $t \in [0, T]$. Для этого запишем уравнение (4) в интегральной форме [7, 8]

$$v(t, \sigma, \omega) = v_0(t, \sigma) + \int_0^t \mathbf{H}(t-s, \sigma) Q\left(C, \frac{d}{ds}, i\sigma \right) v(s, \sigma, \omega)\, d\alpha(s, \omega) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{V}} \mathbf{H}(t-s, \sigma) Q\left(G, \frac{d}{ds}, \sigma \right) v(s, \sigma, \omega) f(v) \nu(dv, ds), \tag{5}$$

где $\{v_0(t,\sigma)\}$ — решение задачи Коши (4) при $C=0$, $G=0$, $\mathbf{H}(t,\sigma)$ — фундаментальное решение, которое имеет вид [9]

$$\mathbf{H}(t,\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}d\lambda}{P(\lambda, i\sigma)}, \tag{6}$$

где Γ — контур, охватывающий все нули полинома $P(\lambda, i\sigma)$.

Применяя оператор $Q(C, d/dt, i\sigma)$ к обеим частям (5), возводя по модулю в квадрат обе части полученного уравнения, применяя операцию математического ожидания и используя свойства интеграла по процессу броуновского движения и интеграла по пуассоновской мере [4], получаем

$$Z_1(t,i\sigma) = \left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2 +$$
$$+\int_0^t\left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)\mathbf{H}(t-s,\sigma)\right|^2[Z_1(s,\sigma)+Z_2(s,\sigma)]ds, \tag{7}$$

где

$$Z_1(t,\sigma) = \mathbf{E}\left\{\left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, \sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\right\},$$

$$Z_2(t,\sigma) = \mathbf{E}\left\{\left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, \sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\right\}\int_{\mathbf{V}}\frac{f^2(v)}{v^2}dv.$$

Аналогично, применяя $Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)$ к обеим частям (5), возводя по модулю в квадрат и применяя операцию математического ожидания, можно записать

$$\mathbf{E}\left\{\left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\right\} = \left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2 +$$
$$+\int_0^t\left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)\mathbf{H}(t-s,\sigma)\right|^2[Z_1(s,\sigma)+Z_2(s,\sigma)]ds. \tag{8}$$

Умножая обе части (8) на $\int_{\mathbf{V}}\frac{f^2(v)}{v^2}dv$ и складывая с соответствующими частями уравнения (7), имеем

$$Z(t,i\sigma) = \left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2 +$$
$$+\left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2\int_{\mathbf{V}}\frac{f^2(v)}{v^2}dv + \int_0^t\left\{\left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)\mathbf{H}(t-s,\sigma)\right|^2 +\right.$$
$$\left.+\left|Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)\mathbf{H}(t-s,\sigma)\right|^2\int_{\mathbf{V}}\frac{f^2(v)}{v^2}dv\right\}Z(s,i\sigma)ds, \tag{9}$$

где $Z(t,i\sigma) = Z_1(t,i\sigma)+Z_2(t,i\sigma)$.

В силу условия А) теоремы 1

$$\left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2 \le K_1; \quad \left|Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma\right)\mathbf{H}(t,\sigma)\right| \le L_1,$$

$$\left| Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v_0(t, \sigma) \right|^2 \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \le K_2,$$

$$\left| Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t, \sigma) \right|^2 \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \le L_2$$

для всех $t \in (0, T)$ и любых матриц C и G. Тогда

$$Z(t, i\sigma) \le K + L \int\limits_0^t Z(s, i\sigma) ds,$$

где $K = K_1 + K_2$, $L = L_1 + L_2$. По лемме Гронуолла [4] имеем

$$Z(t, i\sigma) \le Ke^{Lt}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathbf{M}_T,$$

$$Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \in \mathbf{M}_T.$$

Применяя к (5) оператор $Q\left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right)$, легко записать

$$\mathbb{E}\left\{ \left| Q\left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \right\} = \left| Q\left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v_0(t, \sigma) \right|^2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \left| Q\left(D, \frac{d}{ds}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t - s, \sigma) \right|^2 Z(s, i\sigma) ds. \tag{11}$$

Так как интеграл по t в (11) существует для каждого $t \in (0, T)$, то в силу неравенства (10) и условия А) сразу следует справедливость теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* А) *теоремы* 1. *Тогда для любого* $\sigma \ne 0$ *и любых матриц* C *и* G *справедливо включение*

$$\left[Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t, \sigma) + \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \, Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t, \sigma) \right] \in L_{2(0, \infty)}$$

и для нормы выполняется соотношение

$$\left\| Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t, \sigma) \right\|^2_{L_{2t}} + \left\| Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \mathbb{H}(t, \sigma) \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \right\|^2_{L_{2t}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|Q(C, i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|Q(G, i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv =: S(\sigma). \tag{12}$$

Доказательство. В силу условия А) и формулы (6) легко получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \left[Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) + Q\left(G, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \right] \mathbb{H}(t, \sigma) e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Q(C, i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)} + \frac{Q(G, i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)} \int\limits_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \right).$$

Далее, применяя теорему Планшереля [11], получаем утверждение (12) леммы 2.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* А) *теоремы* 1. *Если* $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma) < 1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(t) = 0$, *где*

$$\mathbb{W}(t, x, \omega) := Q\left(D, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega)$$

при любой матрице D.

Если $S(\sigma) > 1$ *на множестве положительной меры Лебега* Λ, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{W}}(t) = \infty$.

Доказательство. Из уравнения (9) в силу положительного убывания ядра при $t \to \infty$ имеем условие стремления к нулю $Z(t, i\sigma)$ (при $\dot{\sigma} \neq 0$, $S(\sigma) < 1$).

Если $S(\sigma) > 1$, то из (11) заключаем, что модуль преобразования Фурье $\mathbb{W}(t, x, \omega)$ при любой матрице D будет стремиться к нулю при $t \to +\infty$. Причем это стремление равномерно по σ, если $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma) < 1$. Далее перейдем к пределу под знаком интеграла Лебега. Первая часть теоремы 2 доказана.

Для доказательства второй части в силу (11) достаточно показать, что

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(t, i\sigma) d\sigma = \infty.$$

Пусть $S(\sigma) > 1$ на Λ, тогда $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t, i\sigma) = \infty$ в силу положительности $Z(t, i\sigma)$, и теорема 2 доказана.

В работе [10] авторы исследуют потерю устойчивости стержня, на который действует "белый шум"

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dot{\alpha}(t, \omega), \tag{13}$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0;$$

$$u(0, x) = f_1(x); \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x). \tag{14}$$

Аналогично дискретному случаю [11] можно определить статистический запас устойчивости S_a^2 по параметру a как наибольшую допустимую интенсивность процессов с взаимно независимыми значениями, при которой система устойчива в среднем квадратичном, т. е. решение стабилизируется к нулю в указанном выше смысле.

Тогда легко найти статистический запас устойчивости $S_{k_1k_2}$ системы

$$\sum_{k_1+k_2=k=0}^{m} a_{k_1k_2} \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} = 0$$

по параметрам $a_{k_1k_2}$. Обозначим

$$P(\lambda, \sigma) = \sum_{k=0}^{m} a_{k_1k_2} \lambda^{k_1} (i\sigma)^{k_2},$$

тогда согласно [11] вычисляем $S_{k_1 k_2}$:

$$S_{k_1 k_2} = \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda|^{k_1} |\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda, \sigma)|} d\lambda \right]^{-1}. \tag{15}$$

Вопрос, поставленный авторами работы [10] для уравнений (13), (14), в указанной работе не был решен.

Используя приведенные выше утверждения, можно записать

$$S_a = \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2\lambda^2} \right]^{-1} = 2ac$$

и система устойчива при всех интенсивностях белого шума, для которого $\varepsilon^2 S_a^{-1} < 1$, т. е. $S_a > \varepsilon^2$.

Если учесть еще пуассоновские возмущения параметра a [3]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dot{\alpha}(t, \omega) + \int_{\mathbb{V}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f(v)\dot{\tilde{\nu}}(dv, t), \tag{16}$$

то

$$S_a = 2ac\left(1 + \int_{\mathbb{V}} \frac{f^2(v)}{v^2} dv \right).$$

Система (14), (16) устойчива при всех интенсивностях белого шума и пуассоновского процесса, если $S_a^{-1}\varepsilon^2 < 1$.

Взяв $a = b = c = 1$, $1 \le \sigma \le 20$, $f(v) = \sqrt{\dfrac{v^2}{1 + v^2}}$, получим, что система (14), (16) при выбранных параметрах стабилизируется в среднем квадратичном при выполнении условия $S_a = 0{,}984 > \varepsilon^2$.

1. *Гихман Ил. И., Местечкина Т. М.* Задача Коши для параболического уравнения с коэффициентами типа "белый шум" // Теория случайн. процессов. – 1987. – Вып. 15. – С. 19 – 28.
2. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Качественные методы и исследования нелинейн. дифференц. уравнений и нелинейн. колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 25 – 59.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
5. *Ясинская Л. И., Ясинский В. К.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения стохастического функционально-дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 89 – 98.
6. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
7. *Садовяк А. М., Царьков Е. Ф.* Матрица Коши системы линейных стохастических дифференциальных уравнений // Мат. анализ и теория вероятностей. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 150 – 154.
8. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Орт, 1992. – 331 с.
9. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
10. *Samuels J. K., Eringen A. C.* On stochastic linear systems // J. Math. and Phys. – 1959. – **32**, № 2. – P. 83 – 103.
11. *Хижняк В. Н., Царьков Е. Ф.* Статистический запас устойчивости линейных стационарных систем // Вопросы динамики и прочности. – Рига: Зинатне, 1969. – Вып. 19. – С. 133 – 149.

Получено 26.11.91