УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

СКЛАДНІ ПУАССОНІВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ДВОСТОРОННІМ ВІДБИТТЯМ

We consider a compound oscillating Poisson process with two-sided reflection. This process is given by an upper semi-continuous compound Poisson process $\xi(t)$ and its functionals: the time of the first exit of $\xi(t)$ from an interval and the times of first exits of $\xi(t)$ through the upper and lower levels. We study the principal characteristics of oscillating process of this kind in terms of potential and resolvent of the process $\xi(t)$ that are introduced by V. S. Korolyuk. To do this, we define more exactly the Pecherskii identities and some other results for upper semi-continuous Poisson process.

Розглядається складний осцилюючий пуассонівський процес із двостороннім відбиттям. Він задається за допомогою неперервного зверху складного пуассонівського процесу $\xi(t)$ та його функціоналів: моменту першого виходу $\xi(t)$ з інтервалу та моментів першого виходу за верхній та нижній рівні. Основні характеристики такого осцилюючого процесу вивчаються у введених В. С. Королюком термінах потенціалу й резольвенти процесу $\xi(t)$. Для цього уточнюються тотожності Є. А. Печерського та деякі інші результати для неперервних зверху пуассонівських процесів.

У роботах [1 – 3] розглядались задачі ризику для складного пуассонівського процесу з верхнім відбиваючим бар'єром. У роботах [2, 4 – 6] задача ризику розв'язувалась у термінах потенціалу й резольвенти пуассонівського процесу. Тут замість класичного процесу ризику

$$\xi_u(t) = u + \xi(t), \quad u > 0, \quad t \ge 0, \quad \xi(0) = 0,$$

$$\mathrm{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)}, \quad \psi(\alpha) = i\alpha a + \lambda(\varphi(\alpha) - 1), \quad a > 0, \quad \lambda > 0,$$

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} dF(x), \quad F(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\} \ (x \le 0), \quad F(-0) = 1,$$

розглядається модифікований процес ризику, який задається за допомогою відбиття в середину інтервалу $[0, B]$ від обох бар'єрів $x = 0$ та $x = B$. Щоб ввести цей процес, будемо користуватись такими позначеннями для функціоналів першого виходу процесу $\xi_u(t)$:

$$\begin{gathered} \tau_B(u) = \inf\{t : \xi_u(t) \,\overline{\in}\, [0; B]\}, \quad 0 \le u \le B, \\ \tau^+(v) = \inf\{t : \xi(t) \ge v\}, \quad v = B - u, \\ \tau^-(-u) = \inf\{t : \xi(t) \le -u\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Тоді модифікований процес $\zeta_{B,u}(t)$ задається як осцилюючий пуассонівський процес, що описується стохастичним співвідношенням

$$\zeta_{B,u}(t) \doteq \begin{cases} \xi_u(t), & \tau_B(u) > t; \\ \zeta_{B,0}\big(t - \tau^-(-u)\big), & \tau_B(u) < t, \ \tau^-(-u) < \tau^+(v); \\ \zeta_{B,u}\big(t - \tau^+(v)\big), & \tau_B(u) < t, \ \tau^+(v) < \tau^-(-u). \end{cases} \tag{2}$$

Для вивчення цього процесу нам потрібні деякі допоміжні результати для неперервних зверху пуассонівських процесів, пов'язані з уточненням компонент основної факторизаційної тотожності та розподілу їх значень до моменту першого виходу з інтервалу.

Сформулюємо необхідні допоміжні результати для неперервного знизу пуассонівського процесу $\xi(t)$ з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \quad a > 0, \quad \int_{-\infty}^{0} |x|\Pi(dx) < \infty. \tag{3}$$

Крім функціоналів (1) розглянемо екстремальні значення $\xi(t)$:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \le u \le t} (\inf)\xi(u), \quad \xi^{\pm} = \sup_{0 \le t < \infty} (\inf)\xi(t),$$

і θ_s — показниково розподілену випадкову величину, не залежну від $\xi(t)$: $P\{\theta_s > t\} = \exp\{-st\}$, $t \ge 0$, $s > 0$. Нехай

$$P(s,x) = \mathrm{P}\{\xi(\theta_s) < x\}, \quad \overline{P}(s,x) = 1 - P(s,x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$P_{\pm}(s,x) = \mathrm{P}\{\xi^{\pm}(\theta_s) < x\}, \quad \pm x > 0,$$

— розподіли,

$$\varphi(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - \psi(\alpha)}, \quad \varphi_{\pm}(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)}$$

— відповідні їм характеристичні функції (х. ф.).

Введемо також позначення

$$\rho(s) = \frac{P'(s,+0)}{\overline{P}(s,0)}$$

— корінь рівняння $\psi(i\rho) = s$,

$$K(s,x) = \rho(s) \int_{-\infty}^{x} e^{-\rho(s)(x-y)}\Pi(y)dy, \quad x \le 0, \quad s \ge 0,$$

$$\mathcal{K}(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} K(s,x)dx, \quad k(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)dK(s,x) = -i\alpha\mathcal{K}(s,\alpha).$$

Лема 1. *Для неперервного зверху процесу $\xi(t)$ з кумулянтою* (3) *в основній факторизаційній тотожності*

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \quad \mathrm{Im}\,\alpha = 0, \tag{4}$$

компоненти факторизації визначаються так:

$$\varphi_+(s,\alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s) + i\alpha}, \quad \psi(i\rho) = s, \quad \rho(s)p_-(s) = \frac{s}{a},$$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \begin{cases} \left[1 + i\alpha s^{-1}\mathcal{K}(s,\alpha)\right]^{-1}; \\ \left[1 - s^{-1}k(s,\alpha)\right]^{-1}, \qquad p_-(s) = \mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s) = 0\right\} > 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathcal{K}(s,\alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s) - i\alpha} \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha y} - e^{\rho(s)y})\Pi(y)dy, \quad \Pi(y) = \int_{-\infty}^{y} \Pi(dz), \quad y \le 0.$$

Якщо $m_1 = \mathrm{E}\xi(1) > 0$, *то* $\rho(s) \to 0$ *при* $s \to 0$, $\rho(s)s^{-1} \to \rho'(0) = m_1^{-1} > > 0$, *і абсолютний мінімум* ξ^- *має невироджений розподіл*

$$\varphi_-(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi^-} = \left[1 - \rho'(0)\int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha y} - 1)\Pi(y)dy\right]^{-1}. \tag{6}$$

Доведення другої формули в (5) випливає з наслідку 1 в [7] (див. (14) [7]).

Звідси при $s \to 0$ граничним переходом встановлюється формула (6), з якої легко одержати формулу Полячека – Хінчіна для $\varphi_-(\alpha)$. Інтеграл в (6) можна розглядати як кумулянту монотонно незростаючого процесу $\xi_*(t)$

$$\psi_*(\alpha) = \rho'(0) \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(y)dy.$$

Якщо θ_1 — показниково розподілена величина з параметром $s = 1$, то (6) можна записати так:

$$\varphi_-(\alpha) = \frac{1}{1-\psi_*(\alpha)} = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi_*(\theta_1)} = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{t\psi_*(\alpha)}dt. \tag{7}$$

Нам потрібні ще допоміжні твердження, пов'язані з розподілом напівнеперервного процесу до моменту першого виходу його з обмеженого інтервалу. Нехай $\xi(t)$ — неперервний зверху процес з кумулянтою (3) ($\xi(t)$ може включати й вінерівську компоненту, тоді в (3) входить відповідна складова $-\sigma^2\alpha^2/2$, $\sigma^2 \geq 0$).

Позначимо згідно з [4] (див. також [5, 6]) момент першого виходу $\xi(t)$ з інтервалу $[x-T, x]$, $0 < x < T$,

$$\tau(u,T) = \inf\{t>0: \xi(t) \overline{\in} [x-T; x]\} = \begin{cases} \tau^+(x,T), & \tau^+(x) < \tau^-(x-T); \\ \tau^-(x,T), & \tau^-(x-T) \leq \tau^+(x), \end{cases}$$

і зображення резольвенти для неперервного зверху процесу $\xi(t)$ (див. [5], а також [6, 8])

$$R_s(x) = s^{-1}\rho(s) \int_{-0}^{x} e^{\rho(s)(x-y)} d\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s) < y\right\}, \tag{8}$$

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x), \qquad x > 0.$$

Розглянемо характеристичні функції (х. ф.)

$$V(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau(x,T) > \theta_s\right] = s\int_0^{\infty} e^{-st}\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(t)},\ \tau(x,T) > t\right]dt,$$

$$V_+(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\tau^+(x,T)) - s\tau^+(x,T)},\ \mathcal{A}_+(x) = \left\{\tau^+(x) < \tau^-(x-T)\right\}\right],$$

$$V_-(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\tau^-(x,T)) - s\tau^-(x,T)},\ \mathcal{A}_-(x) = \left\{\tau^-(x) \leq \tau^+(x-T)\right\}\right],$$

які відповідають розподілам, зосередженим на інтервалах $[x-T, T]$, $[x, +\infty)$ і $(-\infty, x-T]$, $0 < x < T$.

Введемо позначення для інтегральних перетворень функцій $G(x)$ з носіями I: $\left\{G(x),\ x \in I,\ \int_I |G(x)|dx < \infty\right\}$, $\mathcal{R}_I$: $\left\{c + \int_I e^{i\alpha x}G(x)dx\right\}$ (I — довільний інтервал на R).

Якщо $I = R = (-\infty, \infty)$, то для кільця функцій

$$\mathcal{R}_R: \left\{c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}G(x)dx\right\}, \qquad \int_R |G(x)|dx < \infty,$$

введемо операцію проектування

$$[g(\alpha)]_I = c + \int_I G(x)e^{i\alpha x}dx, \qquad I \subset R.$$

Зауважимо, що для східчастих процесів $\xi(t)$ х. ф. для $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та $\xi(\theta_s)$ задовольняють такі умови:

$$\varphi_+^{\pm 1}(s,\alpha) \in \mathcal{R}_{[0,\infty)}, \qquad \varphi_-^{\pm 1}(s,\alpha) \in \mathcal{R}_{(-\infty,0]}, \qquad \varphi(s,\alpha) \in \mathcal{R}(-\infty,\infty),$$

$$\varphi(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dP(s,x),$$

$$\varphi_\pm(s,\alpha) = p_\pm(s) + \int_{R_\pm} e^{i\alpha x}\frac{\partial}{\partial x}P_\pm(s,x)dx, \qquad R_+ = [0,+\infty), \qquad R_- = (-\infty,0],$$

$$p_\pm(s) = \mathrm{P}\left\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\right\}.$$

Сформулюємо лему про розподіл процесу до моменту його виходу з обмеженого інтервалу (див. [9]).

Лема 2. *Для довільного однорідного процесу з незалежними приростами мають місце тотожності*

$$V_+(s,\alpha,x,T) = \varphi_+^{-1}(s,\alpha)\left[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x,T))\right]_{[x,\infty)}, \qquad \operatorname{Im}\alpha \geq 0,$$
$$V(s,\alpha,x,T) = \varphi_-(s,\alpha)\left[\varphi_+(s,\alpha)(1 - V_-(s,\alpha,x,T))\right]_{(-\infty,x]}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0. \tag{9}$$

Справедливі аналогічні тотожності з проектуванням на $(-\infty, x-T]$ *і* $[x-T,\infty)$

$$V_-(s,\alpha,x,T) = \varphi_-^{-1}(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x,T))\right]_{(-\infty,x-T]}, \qquad \operatorname{Im}\alpha \leq 0,$$
$$V(s,\alpha,x,T) = \varphi_+(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)(1 - V_+(s,\alpha,x,T))\right]_{[x-T,\infty)}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{10}$$

які допускають уточнення для неперервних зверху процесів $\xi(t)$, *оскільки для них*

$$V_+(s,\alpha,x,T) = e^{i\alpha x}\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)}, \mathcal{A}_+(x)\right] = Q^T(s,T-x)e^{i\alpha x}. \tag{11}$$

Тоді для процесів $\xi(t)$ *з кумулянтою* (3) *згідно з* (10) *та* (11) *справедливі тотожності*

$$V_-(s,\alpha,x,T) = \varphi_-^{-1}(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1 - Q^T(s,T-x)e^{i\alpha x}\right)\right]_{(-\infty,x-T]},$$
$$V(s,\alpha,x,T) = \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1 - Q^T(s,T-x)e^{i\alpha x}\right)\right]_{[x-T,\infty)}, \tag{12}$$

де $\varphi_-(s,\alpha)$ *визначено в* (5), $Q^T(s,T-x) = V_+(s,0,x,T)$.

Доведення. Справедливість тотожностей (9) доведено в [9]. Із співвідношення зв'язку між $V(s,\alpha)$ та $V_\pm(s,\alpha)$

$$V(s,\alpha,x,T) = \varphi(s,\alpha)\left[1 - V_+(s,\alpha,x,T) - V_-(s,\alpha,x,T)\right] \tag{13}$$

з урахуванням факторизаційної тотожності (4) після відповідного проектування доводяться не наведені в [9] тотожності (10). Для неперервних зверху процесів $\xi(\tau^+(x,\tau)) = x$, $\varphi_+(s,\alpha) = \rho(s)(\rho(s)-i\alpha)^{-1}$, тому для $V_+(s,\alpha,x,T)$

справедлива формула (11), на підставі якої з (10) виводяться тотожності (12).

Тотожності (9) також допускають уточнення для неперервних знизу процесів, якщо врахувати, що $\xi\big(\tau^-(x,T)\big) = x - T,\ \varphi_-(s,\alpha) = \rho_-(s)/(\rho_-(s)+i\alpha)$:

$$V_-(s,\alpha,x,T) = e^{i\alpha(x-T)}Q_T(s,T-x), \qquad Q_T(s,T-x) = V_-(s,0,x,T).$$

Введемо позначення, пов'язані з блуканням процесу $\xi_u(t)$ в інтервалі $[0,B]$ $(0<u\le B,\ v=B-u)$ і процесу $\zeta_{B,u}(t)$ (див. (2)):

$$\tau_B(u) = \begin{cases} \tau_B^+(u)=\tau^+(v), & \left\{\tau^+(v)<\tau^-(-u)\right\}=A_B^+; \\ \tau_B^-(u)=\tau^-(-u), & \left\{\tau^-(-u)\le\tau^+(v)\right\}=A_B^-, \end{cases}$$

$$Q^B(s,u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_B^+(u)}, A_B^+\right] = V_+(s,\alpha,B-u,B)\big|_{\alpha=0},$$

$$Q_B(s,u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau_B^-(u)}, A_B^-\right] = V_-(s,\alpha,B-u,B)\big|_{\alpha=0}.$$

Очевидно, що

$$Q(B,s,u) = \mathrm{E}e^{-s\tau_B(u)} = Q^B(s,u) + Q_B(s,u),$$

$$P(B,s,u) = \mathrm{P}\{\tau_B(u)>\theta_s\} = s\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{P}\{\tau_B(u)>t\}dt =$$

$$= 1 - Q(B,s,u) = \mathrm{P}\left\{\xi^+(\theta_s)<B-u,\ \xi^-(\theta_s)\ge -u\right\}.$$

Лема 3. *Для довільного неперервного зверху процесу* $\xi(t)$ (*навіть тоді, коли він має вінерівську складову* $\sigma w(t)$) *справедливі співвідношення*

$$Q^B(s,u) = R_s(u)R_s^{-1}(B), \qquad 0\le u\le B, \tag{14}$$

$$Q(B,s,u) = \begin{cases} 1-s\left(Q^B(s,u)\int_0^B R_s(y)dy - \int_0^u R_s(y)dy\right); \\ \mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s)<-u\right\}+Q^B(s,u)\mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s)\in[-B,0]\right\}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)},\ \tau_B(u)>\theta_s\right] = \frac{\rho(s)e^{i\alpha u}}{\rho(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-Q^B(s,u)e^{i\alpha v}\right)\right]_{[-u,v]}, \tag{16}$$

$$P(B,s,u) = \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,u]\right\}-Q^B(s,u)\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,B]\right\}, \tag{17}$$

$$Q_B(s,u) = \mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s)<-u\right\} - Q^B(s,u)\mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s)<-B\right\}, \tag{18}$$

$$\mathrm{P}\left\{\xi^-(\theta_s)\ge -B\right\} = s\rho^{-1}(s)R_s(B) - s\int_0^B R_s(y)dy \quad \forall B>0. \tag{19}$$

Доведення. Співвідношення (14) та першу частину рівності в (15) (з урахуванням позначень $B=T,\ x=B-u$) встановлено у роботі [8]. З другої тотожності в (12) та з (11) одержуємо співвідношення

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau_B(u)>\theta_s\right] = \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-Q^B(s,u)e^{i\alpha v}\right)\right]_{[-u,v]},$$

з якого випливає (16). Зауважимо, що проекціям

$$\varphi_-(s,\alpha)_{[-u,\infty)} = \left[\varphi_-(s,\alpha)\right]_{[-u,0]}, \qquad 0\le u\le B,$$

$$\left[\varphi_-(s,\alpha)e^{i\alpha v}\right]_{[-u,\infty)} = \left[\varphi_-(s,\alpha)e^{i\alpha v}\right]_{[-u,v]}, \qquad v = B-u,$$

відповідають урізані розподіли значень $\xi^-(\theta_s)\in[-u,0]$ і $\eta = \eta_{s,v} = v + \xi^-(\theta_s)\in[-u,v]$. Тому з (16) при $\alpha=0$ випливає співвідношення (17). Згідно з (14) при $\alpha=0$ з (11) випливає $V_+(s,0,x,T) = R_s(T-x)R_s^{-1}(T)$, а з першої тотожності в (12) при $\alpha=0$ — (18). Додавши $Q^B(s,u)$ і (18), одержимо другу частину (15). З (15) при $u=0$ випливає (19), що узгоджується з теоремою 2.1 (див. [8, с. 136]).

Щоб довести узгодженість обох частин в (15), слід врахувати, що

$$I_u = s\int_0^u R_s(y)dy = \int_0^u \rho(s)\int_0^u e^{\rho(s)(y-z)}d\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)<z\right\}dy$$

після зміни порядку інтегрування запишеться так:

$$I_u = \rho(s)\int_0^u d\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)<z\right\}\int_z^u e^{\rho(s)(y-z)}dy =$$

$$= \int_0^u\left(e^{\rho(s)(u-z)}-1\right)d\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)<z\right\} = \frac{s}{\rho(s)}R_s(u) - \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,u]\right\},$$

$$I_B = \frac{s}{\rho(s)}R_s(B) - \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,B]\right\}.$$

Тому вираз у круглих дужках першої частини (15), який визначає $P(B,s,u)$, запишеться так, як і права частина (17).

Дійсно, після підстановки в цей вираз значень I_u та I_B одержимо

$$\frac{R_s(u)}{R_s(B)}\left[s\rho^{-1}(s)R_s(B) - \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,B]\right\}\right] + \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,u]\right\} -$$

$$- s\rho^{-1}(s)R_s(u) = \mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,u]\right\} - Q^B(s,u)\mathrm{P}\left\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,B]\right\}.$$

Очевидно, що після заміни $B=T$, $x=B-u$ (12) набере вигляду

$$V(s,\alpha,B-u,B) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau_B(u)>\theta_s\right] =$$

$$= \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-Q^B(s,u)e^{i\alpha v}\right)\right]_{[-u,v]}. \tag{20}$$

Звідси оберненням по α можна знайти розподіл $\xi(\theta_s)$ до моменту першого виходу з інтервалу в термінах резольвенти та $Q^B(s,u)$.

Наслідок 1. *Для неперервного зверху процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (3) *щільність розподілу* $\xi(\theta_s)$ *і* $\xi_u(\theta_s)$ *до моменту першого виходу з інтервалу визначається співвідношеннями* $(-u\le x<v)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\left\{\xi(\theta_s)<x,\ \tau_B(u)>\theta_s\right\} &= sQ^B(s,u)R_s(v-x) - sR_s(-x)\delta(x<0),\\ \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\left\{\xi_u(\theta_s)<x,\ \tau_B>\theta_s\right\} &= sQ^B(s,u)R_s(B-x) - sR_s(u-x)\delta(u>x).\end{aligned} \tag{21}$$

Функція розподілу виражається через резольвенту та $Q^B(s,u)$:

$$\mathrm{P}\{\xi(\theta_s)<z,\ \tau_B(u)>\theta_s\} = \frac{s}{\rho(s)}R_s(-z)\delta\,(z\le 0) + \mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s)\in[-u;\min(z,0)]\} -$$

$$- Q^B(s,u)\left[\frac{s}{\rho(s)}R_s(v-z)+\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)\in[v-z,B]\}\right], \quad -u \le z < v, \quad (22)$$

$$\mathrm{P}\{\xi(\theta_s)<v,\ \tau_B(u)>\theta_s\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s)\ge -u\} - Q^B(s,u)\left[p_-(s)+\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)\in[0,B]\}\right], \quad z = v. \quad (23)$$

Доведення. Легко здійснити обернення першого доданка справа в (20)

$$I_1(u,x) = \rho(s)\int_{-u}^{\min[x,0]} e^{-\rho(s)(x-y)}d\mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s)<y\} =$$

$$= \int_{\max[0,-x]}^{u} p_+(s,x+y)d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)<y\} = se^{-\rho(s)(x+u)}R_s(u) - sR_s(-x)\delta(x<0).$$

Для оберненого другого доданка (без множника $-Q^B(s,u)$)

$$I_2(u,x) = \int_{-u}^{x} p_+(s,x-y)dF_\eta(y), \qquad \eta = \xi^-(\theta_s)+v,$$

$$p_+(s,y) = \rho(s)e^{-\rho(s)y}, \qquad y\ge 0,$$

після відповідних перетворень знаходимо

$$I_2(u,x) = \int_{-u}^{x}\rho(s)e^{-\rho(s)(x-y)}d\mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s)<y-v\} =$$

$$= \rho(s)\int_{v-x}^{B} e^{\rho(s)(v-x-z)}d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)<z\} = se^{-\rho(s)(u+x)}R_s(B) - sR_s(v-x).$$

Додавши одержані доданки

$$I_1(u,x) - Q^B(s,u)I_2(u,x) = sQ^B(s,u)R_s(v-x) - sR_s(-x)\delta(x<0),$$

одержимо (21). Щоб довести (22), проінтегруємо $R_s(-x)$ та $R_s(v-x)$ у правій частині (21):

$$s\int_{-u}^{z} R_s(v-x)dx = \int_{-u}^{z}\rho(s)\int_0^{v-x} e^{\rho(s)(v-x-y)}d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)<y\} =$$

$$= \int_0^{v-z} d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)<y\}\rho(s)\int_{-u}^{z} e^{\rho(v-x-y)}dx +$$

$$+ \rho(s)\int_{v-z}^{B} d\mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)<y\}\int_{-u}^{v-y} e^{\rho(v-x-y)}dx =$$

$$= s\rho^{-1}(s)[R_s(B)-R_s(v-z)] - \mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)\in[v-z,B]\},$$

$$s\int_{-u}^{z} R_s(-x)dx = s\rho^{-1}(s)[R_s(u)-R_s(-z)] - \mathrm{P}\{-\xi^-(\theta_s)\in[-z,u]\}, \quad z\le 0.$$

Домноживши знайдений вираз для

$$\int_{-u}^{z} R_s(v-x)\,dx$$

на $Q^B(s,u)$, згідно з (21) одержимо (22). З (22) випливає (23), якщо $z \to v-0$. Враховуючи співвідношення (17) та (23), знаходимо

$$\mathrm{P}\{\tau_B(u)>\theta_s\} = \mathrm{P}\{\xi(\theta_s)<v,\ \tau_B(u)>\theta_s\} + C(s,u),$$

$$C(s,u) = p_-(s)Q^B(s,u), \quad C(s,0) = p_-(s)Q^B(s,0).$$

Для модифікованого процесу $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ позначимо х. ф. та щільність розподілу так:

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}(\theta_s)},$$

$$p_{B,u}(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta_{B,u}(\theta_s)<x\}, \quad 0 \le x \le B,$$

і доведемо твердження.

Теорема. *Х. ф.* $\varphi_{B,0}(s,\alpha)$ *визначається співвідношенням*

$$\varphi_{B,0}(s,\alpha) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau_B(0)>\theta_s\right]P^{-1}(B,s,0) =$$

$$= \frac{\rho(s)}{\rho(s)-i\alpha}\left\{p_-(s) - \frac{1}{aR_s(B)}\mathrm{E}\left[e^{i\alpha(\xi^-(\theta_s)+B)},\ \xi^-(\theta_s)\in[-B,0]\right]\right\}P^{-1}(B,s,0). \quad (24)$$

При $u>0$ $(u\in[0,B])$ *х. ф.* $\varphi_{B,u}(s,\alpha)$ *має вигляд*

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \left(1-Q^B(s,u)\right)^{-1}\left\{Q_B(s,u)\varphi_{B,0}(s,\alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho(s)e^{i\alpha u}}{\rho(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-Q^B(s,u)e^{i\alpha v}\right)\right]_{[-u,v]}\right\}, \quad (25)$$

де $Q^B(s,u)$, $Q_B(s,u)$, $P(B,s,u)$ *визначаються в лемі 3, а* $\varphi_-(s,\alpha)$ — *в (5).*

Щільності розподілу для $\zeta_{B,0}(\theta_s)$ *та* $\zeta_{B,u}(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями* $(0<x<B)$

$$p_{B,0}(s,x) = sQ^B(s,0)R_s(B-x)P^{-1}(B,s,0), \quad (26)$$

$$p_{B,u}(s,x) = \left(1-Q^B(s,u)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left\{Q_B(s,u)p_{B,0}(s,x) + sQ^B(s,u)R_s(B-x) - sR_s(u-x)\delta(x<u)\right\}. \quad (27)$$

Доведення. На основі стохастичного співвідношення (2) для х. ф.

$$\varphi^t_{B,u}(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}(t)}$$

виводиться рівняння

$$\varphi^t_{B,u}(\alpha) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi_u(t)},\ \tau_B(u)>t\right] +$$

$$+ \int_0^t \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\zeta_{B,0}(t-y)},\ \tau^-(-u)\in dy,\ \tau^+(v)>y\right] +$$

$$+\int_0^t \mathrm{E}\Big[e^{i\alpha\zeta_{B,u}(t-y)},\ \tau^+(v)\in dy,\ \tau^-(-u)>y\Big],$$

з якого для $\varphi_{B,u}(s,\alpha)$ встановлюється співвідношення

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \mathrm{E}\Big[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)},\ \tau_B(u)>\theta_s\Big] +$$

$$+\ \varphi_{B,0}(s,\alpha)Q_B(s,u) + \varphi_{B,u}(s,\alpha)Q^B(s,u). \tag{28}$$

Зауважимо, що після попадання $\zeta_{B,u}(t)$ (див. (2)) в 0 всі відбиття від B спрямовані також у 0. Тому з (28) при $u=0$ знаходимо

$$\varphi_{B,0}(s,\alpha)\big(1-Q_B(s,0)-Q^B(s,0)\big) = \mathrm{E}\Big[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau_B(0)>\theta_s\Big]. \tag{29}$$

Враховуючи співвідношення (16) при $u=0$, з (29) одержуємо х. ф. (24). Якщо врахувати (21), то шляхом обернення середньої частини в (24) визначається щільність $p_{B,0}(s,x)$ і доводиться (26). Після обернення співвідношення

$$\varphi_{B,u}(s,\alpha) = \Big\{\varphi_{B,0}(s,\alpha)Q_B(s,u)+\mathrm{E}\Big[e^{i\alpha\xi_u(\theta_s)},\ \tau_B(u)>\theta_s\Big]\Big\}\big(1-Q^B(s,u)\big)^{-1},$$

яке випливає з (28), з урахуванням (21) знаходиться щільність (27).

У задачах ризику, як правило, вважають, що $m_1=\mathrm{E}\xi(1)>0$. При цій умові існує невироджений розподіл абсолютного мінімуму

$$\lim_{s\to 0} p_-(s) = p_- = \mathrm{P}\big\{\xi^-=0\big\} = m_1 a^{-1}, \qquad \lim_{s\to 0} s^{-1}\rho(s) = m_1^{-1},$$

і потенціал визначається за допомогою граничного переходу $(s\to 0)$

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R_s(x) = m_1^{-1}\mathrm{P}\big\{-\xi^-<x\big\}, \qquad x>0. \tag{30}$$

Х. ф. для ξ^- визначається в лемі 1 (див. (6)). Має місце наслідок.

Наслідок 2. *Якщо для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3) $m_1>0$, то справедливі граничні співвідношення $(0\le u\le B)$*

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}P(B,s,u) = \mathrm{E}\tau_B(u) = Q^B(u)\int_0^B R(y)dy - \int_0^u R(y)dy,$$

$$\mathrm{E}\tau_B(0) = Q^B(0)\int_0^B R(y)dy, \tag{31}$$

$$\varphi_{B,0}(\alpha) = \lim_{s\to 0}\mathrm{E}e^{i\alpha\zeta_{B,0}(\theta_s)} = \lim_{s\to 0}\mathrm{E}e^{i\alpha\zeta_{B,u}(\theta_s)} = \varphi_{B,u}(\alpha) =$$

$$= (-i\alpha m_1\mathrm{E}\tau_B(0))^{-1}\Big\{p_- - Q_B(0)\mathrm{E}\Big[e^{i\alpha(\xi^-+B)},\ \xi^-+B\ge 0\Big]\Big\}. \tag{32}$$

Граничні щільності визначаються одним і тим же співвідношенням

$$p_{B,0}(x) = \lim_{s\to 0} p_{B,0}(s,x) = Q^B(0)\,R(B-x)[\,\mathrm{E}\tau_B(0)\,]^{-1}, \tag{33}$$

$$p_{B,u}(x) = \lim_{s \to 0} p_{B,u}(s, x) = p_{B,0}(x) = R(B-x)\left[\int_0^B R(y)dy\right]^{-1},$$

$$0 \le x \le B. \tag{34}$$

Доведення. Співвідношення (31) випливає з (15) після граничного переходу $s \to 0$. Формула (32) для $\varphi_{B,0}(\alpha)$ випливає з (24) і (29), якщо врахувати граничну поведінку $p_-(s)$ і $\rho(s)$ при достатньо малих s. Якщо перейти до границі в (25) при $s \to 0$, то одержимо

$$\varphi_{B,u}(\alpha) = \lim_{s \to 0} \varphi_{B,u}(s, \alpha) = \lim_{s \to 0} \left(1 - Q^B(s, u)\right)^{-1} Q_B(s, u) \varphi_{B,0}(s, \alpha) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(1 - Q^B(u)\right)^{-1} Q_B(u) \varphi_{B,0}(s, \alpha) = \varphi_{B,0}(\alpha).$$

Отже, границі $\varphi_{B,0}(\alpha)$ та $\varphi_{B,u}(\alpha)$ ідентичні й (32) доведено повністю. Шляхом граничного переходу $(s \to 0)$ з (26), (27) встановлюється справедливість (33), (34).

Зауважимо, що задача про розподіл вінерівського процесу до виходу з інтервалу $[a; b]$, $a < 0 < b$, $T = b - a$, розглядалась у [10, с. 461 – 463] (див. гл. IV, § 2), де було одержано співвідношення для вінерівського процесу $w(t)$

$$Q(t, a, b; \alpha, \beta) = \mathrm{P}\{\alpha < w(t) < \beta,\ \tau(b, T) > t\}, \qquad [\alpha; \beta] \subset [a; b].$$

1. *Bühlmann H.* Mathematical methods in risk theory. – Berlin etc.: Springer, 1970.
2. *Gusak D. V.* On modifications of ruin processes // Theor. Probab. and Math. Statist. – 1998. – № 56. – P. 87 – 95.
3. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – **14**, № 1. – С. 15 – 23.
4. *Гусак Д. В.* Про момент першої руїнації для модифікованого процесу ризику з миттєвим відбиттям // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1419 – 1425.
5. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 136 с.
6. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
7. *Гусак Д. В.* Про розподіл перестрибкових функціоналів однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 303 – 322.
8. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 258 с.
9. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 104 – 109.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 640 с.

Одержано 26.03.2002