УДК 517.98

М. Ф. Городний, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОМУ РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследован вопрос о существовании и единственности решений краевых разностных задач, соответствующих одному линейному разностному уравнению в банаховом пространстве.

Досліджено питання про існування і єдиність розв'язків крайових різницевих задач, відповідних одному лінійному різницевому рівнянню в банаховому просторі.

В статье [1] доказана теорема о существовании и единственности ограниченных решений линейного разностного уравнения в банаховом пространстве, частным случаем которой является следующее утверждение.

Пусть X — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом $\overline{0}$; $\mathcal{L}(X)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X; I, O — соответственно единичный и нулевой операторы из $\mathcal{L}(X)$. Пусть A, B, C — фиксированные операторы, принадлежащие $\mathcal{L}(X)$.

Теорема 1. *Разностное уравнение*

$$A\,x_{n+1} - B\,x_n + C\,x_{n-1} = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

имеет для любой ограниченной в пространстве X последовательности $\{y_n: n \in \mathbb{Z}\}$ единственное ограниченное решение $\{x_n: n \in \mathbb{Z}\}$ тогда и только тогда, когда для каждого комплексного числа z, удовлетворяющего условию $|z| = 1$, оператор

$$f(z) := A\,z - B + Cz^{-1} \tag{2}$$

имеет ограниченный обратный оператор $f^{-1}(z)$.

Для доказательства теоремы 1 используется метод, с помощью которого в работе [2] доказано существование стационарных и периодических решений стохастического аналога уравнения (1). О задачах, приводящих к таким уравнениям, также см. [2].

Естественным для приложений является вопрос о возможности приближения ограниченного решения уравнения (1) решениями соответствующих ему краевых разностных задач вида

$$A\,x_{n+1} - B\,x_n + C\,x_{n-1} = y_n, \; -p + 1 \le n \le q - 1, \; x_{-p} = a, \; x_q = b, \tag{3}$$

где p, q — натуральные числа, a, b — элементы пространства X. В работе [3] рассмотрен следующий частный случай разностного уравнения (1):

$$x_{n+1} - B\,x_n + x_{n-1} = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Установлено, что выполнение предположения теоремы 1 обеспечивает как существование и единственность решения соответствующей уравнению (4) краевой задачи вида (3) для любых натуральных p, q и любого набора $\{a, b; y_{-p+1}, y_{-p+2}, \ldots, y_{q-1}\}$ элементов X, так и сходимость решений этих краевых задач к ограниченному решению уравнения (4) при $p, q \to +\infty$. В данной статье получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решений краевых разностных задач (3), а также приведены примеры, показывающие, что в общем случае эти условия и предположение теоремы 1 взаимно независимы.

1. Существование и единственность решений краевых разностных задач. Пусть $\{P_n : n \geq 1\}$ — последовательность операторов из $L(X)$, элементы которой удовлетворяют соотношению

$$P_{k+1} = B P_k - A C P_{k-1}, \quad k \geq 2, \quad P_1 = I, \quad P_2 = B. \tag{5}$$

Обозначим через M следующее множество действительных чисел:

$$M := \left\{ \left(4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)^{-1} ; 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]; n \geq 2 \right\}.$$

Ответ на вопрос о существовании и единственности решений краевых задач (3) содержит следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что A, B, C — попарно коммутирующие операторы. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *для любых натуральных чисел p, q и любого набора $\{a, b; y_{-p+1}, y_{-p+2}, \ldots$ $\ldots, y_{q-1}\}$ элементов X краевая разностная задача* (3) *имеет единственное решение $\{x_n : -p \leq n \leq q\}$;*

2) *для каждого $n \geq 1$ существует ограниченный обратный оператор P_n^{-1} для оператора P_n;*

3) *операторы A, B, C удовлетворяют условиям:*

3.1) *оператор B имеет ограниченный обратный оператор B^{-1};*

3.2) *множество M содержится в резольвентном множестве оператора ACB^{-2}.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть натуральные числа p, q и элементы y, b пространства X фиксированы. Положим

$$y_{-p+1} = y; \quad y_n = \overline{0}, \quad -p+2 \leq n \leq q-1 \; ; \; x_{-p} = \overline{0}, \quad x_q = b. \tag{6}$$

С помощью метода математической индукции можно проверить, что решение $\{x_n : -p \leq n \leq q\}$ краевой задачи (3) с граничными условиями (6) удовлетворяет соотношению

$$A^{k-1} x_{-p+k} = P_k x_{-p+1} + P_{k-1} y, \; 2 \leq k \leq p+q. \tag{7}$$

С помощью формулы (7) существование операторов P_k^{-1}, $k \geq 1$, устанавливается по индукции следующим образом. Поскольку $P_1 = I$, то оператор P_1^{-1} существует. Докажем существование оператора P_2^{-1}. Пусть $p = q = 1$. С учетом (7) единственное решение $\{x_{-1} = \overline{0}, x_0, x_1 = b\}$ краевой задачи (3) с граничными условиями (6) удовлетворяет уравнению

$$P_2 x_0 = A b - y. \tag{8}$$

В силу условия 1 теоремы 2 операторное уравнение (8) имеет единственное решение x_0 для произвольной пары y, b элементов X. Поэтому существование оператора P_2^{-1} следует из теоремы Банаха о гомеоморфизме [4, с. 122].

Предположим теперь, что оператор P_k имеет ограниченный обратный оператор P_k^{-1}. Положим $p = 1$, $q = k$. Вследствие (7) для решения $\{x_{-1} = \overline{0}, x_0,$

$x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = b\}$ задачи (3) с граничными условиями (6) справедливо соотношение

$$P_{k+1}x_0 = A^k b - P_k y. \tag{9}$$

Поскольку оператор P_k^{-1} определен, то, меняя y в правой части уравнения (9), можно получить любой элемент пространства X. Поэтому из условия 1 теоремы 2 и теоремы Банаха о гомеоморфизме следует существование оператора P_{k+1}^{-1}.

2) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем натуральные числа p, q, положим $m := p + q + 1$ и обозначим через X^m декартово произведение m экземпляров пространства X; X^m является банаховым пространством с покоординатным сложением и умножением на скаляр и нормой

$$\|\bar{x}\|_m := \max_{-p \le k \le q} \|x_k\|, \quad \bar{x} = \left(x_{-p}, x_{-p+1}, \ldots, x_q\right) \in X^m.$$

Краевую задачу (3) можно рассматривать как операторное уравнение $H\bar{x} = \bar{y}$, в котором

$$\bar{x} := \left(x_{-p}, x_{-p+1}, \ldots, x_q\right), \ \bar{y} := \left(a, y_{-p+1}, y_{-p+2}, \ldots, y_{q-1}, b\right),$$

H — линейный ограниченный оператор, действующий из X^m в X^m по правилу, указанному в левой части (3). Вследствие теоремы Банаха о гомеоморфизме вопрос о существовании для фиксированных p, q и произвольного набора $\left\{a, b; y_{-p+1}, y_{-p+2}, \ldots, y_{q-1}\right\}$ элементов X единственного решения краевой задачи (3) эквивалентен вопросу о существовании ограниченного обратного оператора H^{-1} для оператора H.

Докажем, что из условия 2 теоремы 2 следует существование оператора H^{-1}. С учетом правил матричного исчисления уравнение $H\bar{x} = \bar{y}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} I & O & O & & \\ A & -B & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & -B & C \\ & & O & O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ x_{q-1} \\ \vdots \\ x_{-p+1} \\ x_{-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ y_{q-1} \\ \vdots \\ y_{-p+1} \\ a \end{pmatrix}, \tag{10}$$

оговорив при этом, что на незаполненных местах матрицы в левой части (10) находятся нулевые операторы. Обозначим эту матрицу через $\mathcal{N}$. Вследствие коммутируемости операторов A, B, C определитель $\mathcal{N}$, найденный по правилам матричного исчисления, равен $(-1)^m P_{m-1}$. Поскольку условие 2 обеспечивает существование оператора P_{m-1}^{-1}, то тем же способом, что и для числовой матрицы, для $\mathcal{N}$ можно построить обратную матрицу $\mathcal{N}^{-1}$. Непосредственно проверяется, что оператор соответствующий $\mathcal{N}^{-1}$, является обратным для H.

2) $\Rightarrow$ 3). Определим последовательность полиномов от двух комплексных переменных по рекуррентной формуле

$$\varphi_{k+1}(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)\varphi_k - t_1 t_2 \varphi_{k-1}, \quad k \ge 2, \quad \varphi_1(t_1, t_2) = 1, \quad \varphi_2(t_1, t_2) = t_1 + t_2. \tag{11}$$

По индукции проверяется, что

$$\varphi_{k+1}(t_1 + t_2) = \begin{cases} (k+1)\, t_1^k, & t_1 = t_2; \\ \dfrac{t_1^{k+1} - t_2^{k+1}}{t_1 - t_2}, & t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

Положим

$$\alpha := t_1 + t_2, \quad \beta := t_1 t_2. \tag{12}$$

После несложных преобразований получим

$$\varphi_{k+1}(t_1, t_2) = 1/2^k \cdot \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k+1}{2j+1} \alpha^{k-2j} \left(\alpha^2 - 4\beta\right)^j, \quad k \geq 1. \tag{13}$$

В силу условия 2 оператор $P_2^{-1} = B^{-1}$ существует, т. е. условие 3. 1 выполнено. Учитывая также формулы (5), (12) и (13), получаем следующее представление для операторов $P_{k+1}, k \geq 1$:

$$P_{k+1} = \frac{B^k}{2^k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k+1}{2j+1} \left(I - 4ACB^{-2}\right)^j. \tag{14}$$

Формула (14) справедлива, в частности, для случая $A = C = I$, соответствующего разностному уравнению (4). С другой стороны, из результатов работы [3] следует, что в этом случае

$$P_{k+1} = \prod_{j=1}^{k} \left(B - 2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right) I \right) = B^k \prod_{j=1}^{[k/2]} \left(I - 4\cos^2\left(\frac{j\pi}{k+1}\right) B^{-2} \right). \tag{15}$$

Сравнивая формулы (14) и (15), заключаем, что в общем случае также выполняется соотношение

$$P_{k+1} = B^k \prod_{j=1}^{[k/2]} \left(I - 4\cos^2\left(\frac{j\pi}{k+1}\right) ACB^{-2} \right). \tag{16}$$

С учетом (16) выполнение условия 3.2 следует из приводимого ниже утверждения.

Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_l$ — набор попарно коммутирующих операторов из $\mathcal{L}(X)$; $T := T_1 T_2 \ldots T_l$. Оператор T имеет ограниченный обратный оператор T^{-1} в том и только в том случае, когда для любого $1 \leq k \leq l$ существует ограниченный обратный оператор T_k^{-1}.

Это утверждение и представление (16) обеспечивают также справедливость импликации 3) $\Rightarrow$ 2). Теорема 2 доказана.

2. Примеры, раскрывающие связь между предположением теоремы 1 и условием 3 теоремы 2. Отметим, что для выполнения условия 3 теоремы 2 достаточно, чтобы для любого $\theta \in (0; \pi/2]$ оператор $q(\theta) := B^2 - 4A\,C\cos^2\theta$ имел ограниченный обратный оператор $q^{-1}(\theta)$.

Представим функцию $f(z)$, определенную соотношением (2), в более удобном для последующего анализа виде:

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = (A + C)\cos\theta - B + i\,(A - C)\sin\theta, \quad \theta \in [0; 2\pi]. \tag{17}$$

Приведенные ниже примеры показывают, что предположение теоремы 1 и условие 3 теоремы 2 в общем случае независимы.

***Пример* 1.** Пусть $A = B = 2I$, $C = I$. Тогда предположение теоремы 1 выполнено, а условие 3 теоремы 2 нарушается.

Действительно, для любого $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$, вследствие (17) имеем

$$f(z) = (3\cos\theta - 2 + i\sin\theta)I,$$

причем $3\cos\theta - 2 + i\sin\theta \neq 0$, $\theta \in [0; 2\pi]$, а значит, оператор $f^{-1}(z)$ существует. В то же время

$$q(\theta) = (4 - 8\cos^2\theta)I, \quad \theta \in (0; \pi/2].$$

Следовательно, $q(\pi/4) = O$, т. е. условие 3 теоремы 2 не выполняется.

***Пример* 2.** Если $A = C = I$, $B = 2I$, то условие 3 теоремы 2 выполняется, а предположение теоремы 1 нарушается.

Для проверки условия 3 теоремы 2 заметим, что в этом случае $q(\theta) = (4 - 4\cos^2\theta)I$, и поэтому для каждого $\theta \in (0; \pi/2]$ определен оператор $q^{-1}(\theta)$. Предположение теоремы 1 не выполнено для $z = 1$.

Следующее утверждение показывает, в каком случае условие 3 теоремы 2 является следствием предположения теоремы 1.

Теорема 3. *Если $C = A$ или $C = -A$, то из предположения теоремы 1 следует выполнение условия 3 теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $C = A$. Вследствие (17) имеем

$$f(e^{i\theta}) = 2A\cos\theta - B, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

Отсюда $f(e^{i\theta})f(e^{i(\pi-\theta)}) = B^2 - 4\cos^2\theta A^2 = q(\theta)$, а значит,

$$q^{-1}(\theta) = f^{-1}(e^{i\theta})f^{-1}(e^{i(\pi-\theta)}), \quad \theta \in (0; \pi/2].$$

С учетом замечания для случая $C = A$ утверждение теоремы 3 доказано. Случай $C = -A$ исследуется аналогично.

Теорема 3 доказана.

1. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн.– 1991.– **41**, № 1.– С. 41 – 46.

2. *Дороговцев А. Я.* Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 35 – 42.

3. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 1992.– **51**, вып. 4. – С. 17 – 22.

4. *Люстерник Л. А., Соболев Л. И.* Краткий курс функционального анализа.– М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.

Получено 18. 04. 91