УДК 519. 64

Ю. К. Подлипенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ. I

Изучаются краевые задачи, возникающие при исследовании дифракции акустических волн на бесконечном цилиндре с произвольной формой поперечного сечения, расположенном внутри клина так, что ось цилиндра параллельна ребру клина. Развита теория потенциала, позволяющая свести указанные краевые задачи к интегральным уравнениям на одномерном контуре — границе сечения цилиндра.

Доказаны теоремы существования и единственности решений краевых задач и соответствующих им интегральных уравнений. Установлен принцип предельного поглощения в данной ситуации. Для вычисления ядер интегральных операторов построены эффективные алгоритмы.

Вивчаються крайові задачі, що виникають при дослідженні дифракції акустичних хвиль на нескінченному циліндрі із довільною формою поперечного перерізу, який розташований в середині клина так, що вісь циліндра паралельна до ребра клина. Розвинуто теорію потенціала, що дозволяє звести вказані крайові задачі до інтегральних рівнянь на одновимірному контурі — межі перерізу циліндра.

Доведено теореми існування та єдиності розв'язків крайових задач і відповідних їм інтегральних рівнянь. Встановлено принцип граничного поглинання для даної ситуації. Для обчислення ядер інтегральних операторів побудовано ефективні алгоритми.

1. Постановка задач. Теоремы единственности. Введем в $\mathbb{R}^2$ полярную систему координат r, φ, угол φ будем отсчитывать по часовой стрелке в сторону его убывания. Обозначим через $\Omega := \{(r, \varphi) \in R^2 \mid 0 < r < +\infty, -\Phi < \varphi < 0\}$ угловую область, представляющую собой сечение клина $0 < r < +\infty$, $-\Phi < \varphi < 0$, $-\infty < z < +\infty$ плоскостью $z = \text{const}$ $(0 < \Phi < 2\pi)$. Пусть D — ограниченная область с границей ∂D, состоящей из конечного числа непересекающихся замкнутых поверхностей, принадлежащих классу C^2, такая, что $\overline{D} \subset \Omega$ и область $\Omega \setminus \overline{D}$ связна.

Обозначим через $\Re(\Omega \setminus \overline{D})$ линейное пространство комплекснозначных функций $u \in C^2(\Omega \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{\Omega} \setminus D)$, для которых в любой точке $P \in \partial D$ существует равномерный по P предел

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n_p} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(\vec{n}_p, \operatorname{grad} u(p + h\vec{n}_p)\right).$$

где $\vec{n}_p$ — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке P.

Положим $\Omega_R := \{(r, \varphi) \in \Omega \mid r < R\}$, $C_R := \{(r, \varphi) \in R^2 \mid -\Phi \le \varphi \le 0, r = R\}$, причем R будем считать достаточно большим $(R \ge R_0)$, так что справедливо включение $\overline{D} \subset \Omega_R$.

В настоящей работе исследуются три краевые задачи.

Задача I. Определить функцию $u(r, \varphi) \in C^2(\Omega \setminus \overline{D}) \cap C(\overline{\Omega} \setminus D)$, удовлетворяющую в $\Omega \setminus \overline{D}$ уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, \varphi) + k^2 u(r, \varphi) = 0, \quad \operatorname{Im} k \ge 0, \tag{1}$$

условию излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} - iku(r, \varphi) = o(r^{-1/2}), \quad r \to \infty, \tag{2}$$

равномерно по φ; условию на ребре

$$\int_{\delta \cap \Omega} \left(|u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2\right) dS < \infty \tag{3}$$

и граничным условиям

$$u(r, 0) = u(r, -\Phi) = 0, \quad 0 < r < +\infty, \tag{4}$$

$$u = f \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{5}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

— оператор Лапласа в полярных координатах, $k = \mathrm{const}$ — волновое число, f — заданная непрерывная функция на ∂D, δ — некоторая окрестность начала координат.

Задача II. Определить функцию $u \in \Re(\Omega\setminus\overline{D})$, удовлетворяющую (1) — (4) и граничному условию

$$\partial u/\partial n = g \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{6}$$

где g — заданная непрерывная функция на ∂D.

Задача III. Определить функцию $u \in \Re(\Omega\setminus\overline{D})$, удовлетворяющую (1) — (4) и граничному условию

$$\partial u/\partial n + \lambda u = g, \tag{7}$$

где g и λ — заданные непрерывные на ∂D функции.

С физической точки зрения функция $u(r, \varphi)$ имеет смысл потенциала скоростей в задачах дифракции звука на цилиндре (в установившемся режиме) и в наших предположениях, очевидно, не зависит от координаты z. При этом $k^2 = \omega(\omega + i\gamma)/c^2$ — волновое число, $\lambda = i\rho(\omega + i\gamma)/\chi$, где ω — частота, ρ — плотность среды, заполняющей область $\Omega\setminus\overline{D}$, c — скорость распространения звука, γ — коэффициент поглощения, χ — акустический импеданс цилиндра. Краевые условия (4) выражают тот факт, что поверхность клина акустически мягкая. Условие (3) обеспечивает отсутствие потока энергии поля из ребра клина, а условие излучения Зоммерфельда (2) исключает существование волн, приходящих из бесконечности (рассматривается волновой процесс, зависящий от времени по закону $e^{-i\omega t}$).

Для некоторых других типов областей с бесконечными границами и краевых условий аналогичные задачи изучались иным способом в работах [1 – 7] (см. также указанную там литературу).

Для доказательства единственности решения сформулированных выше краевых задач потребуется следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $u \in \Re(\Omega\setminus\overline{D})$ — решение уравнения Гельмгольца* (1), *удовлетворяющее граничным условиям* (4), *условию* (3) *и такое, что*

$$\operatorname{Im}\left(k\int_{\partial D} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\,dl\right) \ge 0. \tag{8}$$

Тогда $u = 0$ в $\Omega\setminus D$.

Доказательство. Выберем число $R \ge R_0$ и применим в области $\Omega_R\setminus\overline{D}$ первую формулу Грина к функциям $u(P)$ и $\overline{u}(P)$, учитывая при этом (1), (3) и (4). В результате получим

$$k\int_{C_R} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\,dl = k\int_{C_R} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}\,dl - \overline{k}|k|^2\int_{\Omega_R\setminus\overline{D}}|u|^2\,dS + k\int_{\Omega_R\setminus\overline{D}}|\operatorname{grad}u|^2\,dS. \tag{9}$$

Законность применения формулы Грина в области $\Omega_R\setminus\overline{D}$ вытекает из того факта, что в силу условия на ребре (3) и уравнения (1) u, $|\operatorname{grad}u|$, $\Delta u \in$

$\in L_2(\Omega_R \setminus \overline{D})$, а также из теорем 3. 27 и 3. 5 из [5].

Из условия излучения (2) следует соотношение

$$0 = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 dl =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 + 2\,\mathrm{Im}\left(ku \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} \right) \right\} dl. \tag{10}$$

Взяв мнимую часть соотношения (9) и подставив ее в (10), найдем

$$\lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{C_R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right) dl + \right.$$

$$\left. + 2\,\mathrm{Im}\, k \int_{\Omega_R \setminus \overline{D}} \left(|k|^2 |u|^2 + |\mathrm{grad}\, u|^2 \right) dS \right\} = -2\,\mathrm{Im}\left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} dl \right). \tag{11}$$

Все члены в левой части (11) неотрицательны, поскольку $\mathrm{Im}\ k \ge 0$. Отсюда следует, что если $\mathrm{Im}\, k > 0$, то $\int_{\Omega_R \setminus \overline{D}} |u|^2 dS \to 0$, $R \to \infty$. Значит, $u = 0$ в $\Omega \setminus D$. Если $\mathrm{Im}\ k = 0$, то из (11) получим

$$\int_{C_R} |u|^2 dl = \int_{-\Phi}^{0} R \left| u(R, \varphi) \right|^2 d\varphi \to 0, \quad R \to \infty. \tag{12}$$

Положим $u_m(r, \varphi) := H^{(1)}_{\nu_m}(kr) \sin(\nu_m \varphi)$, где $\nu_m = m\pi / \Phi$, $H^{(1)}_{\nu}(z)$ — функция Ханкеля I рода порядка ν. Применяя вторую формулу Грина в области $\Omega_R \setminus \overline{\Omega}_{R_0}$ к функциям $u(r, \varphi)$ и $u_m(r, \varphi)$ и учитывая, что в этой области $u_m(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям (4), получаем

$$0 = \int_{C_{R_0}} \left\{ u(r, \varphi) \frac{\partial u_m(r, \varphi)}{\partial n} - u_m(r, \varphi) \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial n} \right\} dl +$$

$$+ \int_{-\Phi}^{0} \left\{ u(R, \varphi) \frac{dH^{(1)}_{\nu_m}(kR)}{dR} - H^{(1)}_{\nu_m}(k, R) \frac{\partial u(R, \varphi)}{\partial R} \right\} \sin(\nu_m \varphi) R d\varphi := I_{R_0} + I_R. \tag{13}$$

Но легко видеть, что

$$I_R = \int_{-\Phi}^{0} u(R, \varphi) \left\{ \frac{dH^{(1)}_{\nu_m}(kR)}{dR} - ikH^{(1)}_{\nu_m}(kR) \right\} \sin(\nu_m \varphi) R d\varphi -$$

$$- \int_{-\Phi}^{0} H^{(1)}_{\nu_m}(kR) \left\{ \frac{\partial u(R, \varphi)}{\partial R} - iku(R, \varphi) \right\} \sin(\nu_m \varphi) R d\varphi := I_1 + I_2. \tag{14}$$

Оценим интеграл I_1. Принимая во внимание тот факт, что [8]

$$\frac{dH^{(1)}_{\nu}(kr)}{dr} - ikH^{(1)}_{\nu}(kr) = O\left(r^{-3/2}\right), \quad r \to \infty, \tag{15}$$

и используя неравенство Шварца и соотношение (12), находим

$$|I_1| \le \left| \frac{dH^{(1)}_{\nu_m}(kR)}{dR} - ikH^{(1)}_{\nu_m}(kR) \right| R \int_{-\Phi}^{0} |u(R, \varphi)| d\varphi \le$$

$$\le 0\left(R^{-3/2}\right) R\left(\int\limits_{-\Phi}^{0}\left|u(R,\varphi)\right|^2 d\varphi\right)^{1/2} \Phi^{1/2} =$$

$$= 0\left(\frac{1}{R}\right)\left(\int\limits_{-\Phi}^{0} R\left|u(R,\varphi)\right|^2 d\varphi\right)^{1/2} = o\left(\frac{1}{R}\right),\quad R \to \infty. \tag{16}$$

Для интеграла I_2 в силу условия излучения (2) и оценки $H_\nu^{(1)}(kR) = O\left(R^{-1/2}\right)$, $R \to \infty$, получаем

$$\left|I_2\right| \le \left|H_\nu^{(1)}(kR)\right| R \int\limits_{-\Phi}^{0}\left|\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial R} - iku(R,\varphi)\right| d\varphi =$$

$$= O(R^{-1/2}) R\, o(R^{-1/2}) = o(1),\quad R \to \infty. \tag{17}$$

Из оценок (16), (17) видно, что второе слагаемое I_R в правой части (13) стремится к нулю при $R \to \infty$. Так как первый интеграл I_{R_0} в (13) не зависит от R, то отсюда следует $I_{R_0} = 0$ и, значит, $I_R = 0$ при любом R, т. е.

$$\frac{dH_{\nu_m}^{(1)}(kR)}{dR} R \int\limits_{-\Phi}^{0} u(R,\varphi)\sin(\nu_m\varphi)\,d\varphi - RH_{\nu_m}^{(1)}(kR)\int\limits_{-\Phi}^{0}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial R}\sin(\nu_m\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Введя обозначение

$$\alpha_m(kR) := \int\limits_{-\Phi}^{0} u(R,\varphi)\sin(\nu_m\varphi)\,d\varphi, \tag{18}$$

последнее равенство перепишем в виде

$$\alpha_m(kR)\frac{dH_{\nu_m}^{(1)}(kR)}{dR} - H_{\nu_m}^{(1)}(kR)\frac{d\alpha_m(kR)}{dR} = 0,$$

откуда находим $\alpha_m(kR) = a_m H_{\nu_m}^{(1)}(kR)$, где a_m — постоянный множитель. Соотношение (18) означает, что $\alpha_m(kR)$, $m = 1, 2, \ldots$, являются коэффициентами Фурье функции $u(R,\varphi)$ по полной системе функций $\left\{\sin(\nu_m\varphi)\right\}_{m=1}^{\infty}$ на промежутке $[-\Phi, 0]$. Поэтому в силу равенства Парсеваля имеем

$$\int\limits_{-\Phi}^{0} R\left|u(R,\varphi)\right|^2 d\varphi = \frac{\Phi}{2}\sum_{m=1}^{\infty} R\left|\alpha_m(kR)\right|^2 = \frac{\Phi}{2}\sum_{m=1}^{\infty} R\left|a_m\right|^2\left|H_{\nu_m}^{(1)}(kR)\right|^2. \tag{19}$$

Отсюда и из формулы (12) получаем $R\left|a_m\right|^2\left|H_{\nu_m}^{(1)}(kR)\right|^2 \to 0$ при $R \to \infty$. Однако согласно асимптотической формуле

$$H_{\nu_m}^{(1)}(kR) \sim \left(\frac{2}{\pi kR}\right)^{1/2} e^{i(kR - \pi\nu_m/2 - \pi/4)},\quad R \to \infty,$$

и произведение $R\left|H_{\nu_m}^{(1)}(kR)\right|^2$ остается по модулю больше некоторого положительного числа при больших значениях R, поэтому $a_m = 0$, т. е. $\alpha_m(kR) \equiv 0$. Следовательно, в силу (19) $u \equiv 0$ на дуге C_R достаточно большого радиуса и, значит, $u(P) = 0$ во всех точках $P(r_p, \varphi_p) \in \Omega$, для которых $r_p \ge R_0$. Отсюда в силу аналитичности решения $u(r,\varphi)$ уравнения Гельмгольца (см. [5], теорема

3. 5) заключаем, что $u \equiv 0$ всюду в области $\Omega \setminus D$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следуют результаты, связанные с единственностью решения краевых задач I — III.

Теорема 2. *Краевые задачи* I *и* II *имеют не более одного решения. Задача* III *имеет не более одного решения, если* $\operatorname{Im}(\bar{k}\lambda) \geq 0$ *на* ∂D.

Доказательство. Для задач I и II утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 1. Пусть u — решение задачи III, удовлетворяющее однородному граничному условию $\partial u / \partial n + \lambda u = 0$. Тогда требуемый результат следует из соотношения

$$\operatorname{Im}\left(k \int\limits_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\, dl\right) = \operatorname{Im}\left(\bar{k} \int\limits_{\partial D} \lambda |u|^2 dl\right) \quad \text{на} \quad \partial D$$

и теоремы 1.

2. Функция $G(M, P)$ и ее свойства. Важную роль в построении дальнейшей теории будет играть функция $G(M, P)$, заданная на $\overline{\Omega}$ и определяемая соотношением

$$G(M,P) = \begin{cases} \dfrac{i\pi}{\Phi} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu_m}(kr_P) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) \sin(\nu_m \varphi_P) \sin(\nu_m \varphi_M), \ r_P \leq r_M, & (20а) \\ \dfrac{i\pi}{\Phi} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu_m}(kr_M) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_P) \sin(\nu_m \varphi_P) \sin(\nu_m \varphi_M), \ r_P \geq r_M, & (20б) \end{cases}$$

где $\nu_m = \dfrac{m\pi}{\Phi}$, $J_{\nu_m}(z)$ и $H_{\nu_m}^{(1)}(z)$ — соответственно функция Бесселя и функция Ханкеля I рода порядка ν_m, r_P, φ_P и r_M, φ_M — полярные координаты соответственно точек P и M, принадлежащих Ω. Очевидно, что $G(M, P) = 0$ при $P \in \partial\Omega$. Покажем, что при $P \neq M$ ряды в правых частях сходятся, а при совпадении аргументов функция $G(M, P)$ имеет логарифмическую особенность. С этой целью, а также для исследования и ускорения сходимости рассматриваемых ниже рядов потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Для функций Бесселя* $J_\nu(z)$ *и Ханкеля* $H_\nu^{(1)}(z)$ *при фиксированном* z, $|\arg z| < \pi/2$, *справедливы следующие асимптотические оценки*:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{(2\pi\nu)^{1/2}} \left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{1+3z^2}{12\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right), \quad \nu \to +\infty, \tag{21}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{2\nu}{ez}\right)^{\nu} \left(1 + \frac{1+3z^2}{12\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right), \quad \nu \to +\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Чтобы получить формулу (21), воспользуемся следующим интегральным представлением функции Бесселя (см., например, [9, с. 182]):

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + (1/2))} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\nu - (1/2)} \cos zt\, dt, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \ |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Интеграл в правой части (23) представим в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\nu - (1/2)} \cos zt\, dt = \left(\int\limits_{-1}^{-1+\delta} + \int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} + \int\limits_{1-\delta}^{1}\right) e^{\nu S(t)} f(t)\, dt, \tag{24}$$

где

$$S(t) = \ln(1 - t^2), \quad f(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \cos zt, \quad 0 < \delta < 1/2. \tag{25}$$

Поскольку $\max\limits_{-1+\delta\le t\le 1-\delta} S(t) = \max\limits_{-1+\delta\le t\le 1-\delta} \ln\left(1-t^2\right) = S(0) = 0,\ S''(0) = -2,$ то, применяя ко второму интегралу в (24) теорему 1. 3 из [10, с. 39], получаем

$$\int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} e^{\nu S(t)} f(t)\,dt = c_0\nu^{-1/2} + c_1\nu^{-3/2} + O\left(\nu^{-5/2}\right),\quad \nu\to+\infty, \tag{26}$$

где

$$c_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(t)\left(\frac{S(0)-S(t)}{t^2}\right)^{-1/2}\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{\pi}\left[\left(1-t^2\right)^{-1/2}\cos zt\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{3}+\ldots\right)\right]\Bigg|_{t=0} = \sqrt{\pi}, \tag{27}$$

$$c_1 = \frac{\Gamma(3/2)}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[f(t)\left(\frac{S(0)-S(t)}{t^2}\right)^{-3/2}\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\Gamma(3/2)}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\left(1-t^2\right)^{-1/2}\cos zt\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{3}+\ldots\right)^{-3/2}\right]\Bigg|_{t=0} = -\sqrt{\pi}\,\frac{1+2z^2}{8}. \tag{28}$$

Оценим третий интеграл в правой части (24). Имеем

$$\left|\int\limits_{1-\delta}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt\right| \le c\int\limits_{1-\delta}^{1}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \le$$

$$\le 2^{\nu-\frac{1}{2}}c\int\limits_{1-\delta}^{1}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = (2\delta)^{\nu-\frac{1}{2}}c\frac{2\delta}{2\nu+1} = O(2\delta)^{\nu} = O\left(\nu^{-5/2}\right),\ c = \text{const}. \tag{29}$$

Эта же оценка справедлива и для интеграла по промежутку $(-1, -1+\delta)$ в силу четности подынтегральной функции.

Применяя формулу Стирлинга к $\Gamma(\nu+1/2)$, получаем

$$\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right) = e^{-1/2}\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)^{\nu}e^{-\nu}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right). \tag{30}$$

Подставив теперь в (23) разложение (30), с учетом соотношений (26) – (29) и равенства

$$\left(1+(2\nu)^{-1}\right)^{-\nu} = e^{-\nu\ln(1+(2\nu)^{-1})} = e^{-1/2+(8\nu)^{-1}+O(1/\nu^2)} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)$$

находим, что при $\nu\to+\infty$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}e^{\nu}e^{1/2}\left(1-\frac{1+2z^2}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)}{\sqrt{\pi}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^{\nu}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\frac{e^{\nu}e^{1/2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\nu^{\nu}(1+1/(2\nu))^{\nu}}\left(1-\frac{1+2z^2}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{12\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{\nu}e^{1/2}e^{-1/2}\left(1+\frac{1}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{12\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1+2z^2}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{\nu}\left(1-\frac{1+3z^2}{2\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right). \tag{31}$$

Равенство (21) доказано.

Докажем с помощью метода Лапласа соотношение (22). Для этого воспользуемся формулой [11, с. 137]

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\nu t - z\operatorname{sh}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{(-\nu t + z\sin t)i}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{-\nu\pi i}e^{-\nu t - z\operatorname{sh}t}\,dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{32}$$

Полагая в первом интеграле в (32) $t = t' + \ln(2\nu/z)$, так что при изменении t от 0 до $+\infty$ t' пробегает полупрямую $l := \{w \mid w = -\ln(2\nu/|z|) + t + i\arg z,\ 0 \le t < +\infty\}$, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} e^{\nu t - z\operatorname{sh}t}\,dt = \frac{e^{\nu\ln(2\nu/z)}}{\pi i}\int_l \exp\left(\nu(t-e^t)+\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)dt. \tag{33}$$

Оценим интеграл

$$J_a := \int_{I_a}\exp\left(\nu(t-e^t)+\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)dt, \quad a\in\mathbb{R},$$

по отрезку $a + iu\arg z$, $0\le u\le 1$. Полагая $t = a + iu\arg z$, имеем

$$|J_a| = \left| i\arg z\int_0^1 \exp\left(\nu\left(a + iu\arg z - e^{a+iu\arg z}\right) + \frac{z^2e^{-(a+iu\arg z)}}{4\nu}\right)du\right| \le$$
$$\le \frac{\pi}{2}\int_0^1 \exp\left(\nu\left(a - e^a\cos(u\arg z)\right) + \frac{|z|^2e^{-a}}{4\nu}\right)du \le$$
$$\le \frac{\pi}{2}\exp\left(\nu\left(a - e^a\cos(\arg z)\right)+\frac{|z|^2e^{-a}}{4\nu}\right). \tag{34}$$

Из (34) видим, что $J_a\to 0$ при $a\to+\infty$. Поэтому, используя теорему Коши, находим

$$\int_l \exp\left(\nu\left(t-e^t\right)+\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)dt = -J_{-\ln\left(\frac{2\nu}{|z|}\right)} + \int_{-\ln(2\nu/|z|)}^{+\infty}\exp\left(\nu\left(t-e^t\right)+\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)dt. \tag{35}$$

Оценим первое слагаемое в (35) при $\nu\to+\infty$. Из (34) при $a = -\ln(2\nu/|z|)$ получаем

$$\left|J_{-\ln\left(\frac{2\nu}{|z|}\right)}\right| \le \frac{\pi}{2}\exp\left(\nu\left(-\ln\frac{2\nu}{|z|}-\frac{|z|}{2\nu}\cos\arg z\right)+\frac{|z|}{2}\right) =$$
$$= O\left[\left(\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu}\right] = O\left(e^{-c\nu}\right), \quad \nu\to+\infty, \quad c = \text{const} > 1. \tag{36}$$

Оценим теперь второе слагаемое в (35). Имеем

$$\int_{-\ln(2\nu/|z|)}^{+\infty}\exp\left(\nu\left(t-e^t\right)+\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)dt = \left(\int_{-\ln(2\nu/|z|)}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)f(t,\nu)e^{\nu S(t)}\,dt. \tag{37}$$

где $S(t) = t - e^t$, $f(t,\nu) = \exp\left(\frac{1}{4}z^2e^{-t}\nu^{-1}\right)$.

Так как $\max\limits_{-\infty<t<+\infty} S(t) = S(0) = -1$, $S''(0) = -1$, то, применяя теорему 1. 3 из [10] к интегралу

$$\Phi(\nu) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t,\nu)e^{\nu S(t)}\,dt,$$

получаем

$$\Phi(\nu) = e^{-\nu}\left(c_0\nu^{-1/2} + c_1\nu^{-3/2} + O\left(\nu^{-5/2}\right)\right), \quad \nu \to +\infty, \tag{38}$$

где

$$c_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)f(t,\nu)\left(\frac{S(0)-S(t)}{t^2}\right)^{-1/2}\Bigg|_{t=0} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)\left(\frac{-1-t+e^t}{t^2}\right)^{-1/2}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{\pi}e^{z^2/4\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}t+\frac{1}{24}t^2+\ldots\right)^{-1/2}\Bigg|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\left(1+\frac{z^2}{4\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right), \tag{39}$$

а для c_1, учитывая, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[f(t,\nu)\left(\frac{S(0)-S(t)}{t^2}\right)^{-3/2}\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left[\exp\left(\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}t+\frac{1}{24}t^2+\ldots\right)^{-3/2}\right]\Bigg|_{t=0} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right),$$

имеем

$$c_1 = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[f(t,\nu)\left(\frac{S(0)-S(t)}{t^2}\right)^{-3/2}\right]\Bigg|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{12}+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right). \tag{40}$$

Подставляя соотношения (39) и (40) в (38), находим

$$\Phi(\nu) = e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\left(1+\frac{1+3z^2}{12\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right). \tag{41}$$

Оценим теперь первый интеграл в (37) (пояснения ниже):

$$\left|\int\limits_{-\ln\frac{2\nu}{|z|}}^{-\varepsilon}\exp\left(\frac{z^2e^{-t}}{4\nu}+\nu\left(t-e^t\right)\right)dt\right| \le e^{S(-\varepsilon)\nu}\int\limits_{e^\varepsilon}^{2\nu/|z|}\frac{\exp(z^2v/4\nu)}{v}\,dv \le$$

$$\le e^{S(-\varepsilon)\nu}e^{-\varepsilon}\int\limits_{e^\varepsilon}^{2\nu/|z|}\exp(z^2v/4\nu)\,dv = e^{S(-\varepsilon)\nu}e^{-\varepsilon}\frac{4\nu}{|z|^2}\left(e^{\frac{|z|}{2}} - e^{\frac{|z|^2e^\varepsilon}{4\nu}}\right) =$$

$$= O(e^{-c\nu}), \quad \nu\to+\infty, \quad c = \mathrm{const} > 1. \tag{42}$$

Здесь первое неравенство получено в результате подстановки вместо функции $S(t) = t - e^t$ ее максимального значения на промежутке $(-\ln(2\nu/|z|), -\varepsilon)$, равного $S(-\varepsilon)$, и замены переменной $v = e^{-t}$. Переход ко второму неравенству в (42) и последующему равенству очевиден. Последнее равенство в (42) следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ $S(-\varepsilon) < -1$.

Аналогично показывается, что третье слагаемое в (37) убывает со скоростью $O(e^{-c\nu})$ при $\nu\to+\infty$, $c = \mathrm{const} > 1$. Отсюда и из (33), (35) – (37), (41), (42) вытекает соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} e^{\nu t - z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(\frac{2\nu}{ez}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1+3z^2}{12\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right). \tag{43}$$

Учитывая (43) и тот факт, что для второго и третьего слагаемых в (32) справедливы оценки

$$\left|\int_0^{\pi} e^{(-\nu t + z\sin t)i}\,dt\right| = O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \nu\to+\infty,$$

и

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-\nu\pi i}e^{-\nu t - z\,\mathrm{sh}\,t}\,dt\right| \le \int_0^{\infty} e^{-\nu t}\,dt = \frac{1}{\nu},$$

получаем (22). Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Пусть $Q\subset\mathbb{C}$ — произвольный компакт в комплексной плоскости. Нетрудно показать, что оценки (21) и (22) являются равномерными по $z\in Q$ (в процессе доказательства достаточно сослаться на теорему 2. 1 из [10] вместо 1. 3 из [10]). При этом в случае оценки (22) компакт Q не должен содержать точку $z=0$.

Подставим теперь асимптотические формулы (21) и (22) в соотношение (20). Тогда при $r_P\le r_M$ получим

$$G(M,P) = \frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty} H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)J_{\nu_m}(kr_P)\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P) =$$

$$= \frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{i}\left(\frac{2\nu_m}{ekr_M}\right)^{\nu_m}\left(\frac{2}{\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1+3k^2r_M^2}{12\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\frac{1}{(2\pi\nu_m)^{1/2}}\left(\frac{ekr_P}{2\nu_m}\right)^{\nu_m}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1+3k^2r_P^2}{12\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P) =$$

$$= \frac{1}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\nu_m}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P)+\left(\frac{k^2(r_M^2-r_P^2)}{4\nu_m^2}+O\left(\frac{1}{\nu_m^3}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(r_P r_M^{-1}\right)^{\nu_m}\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P)\right\}. \tag{44}$$

Воспользовавшись теперь формулой [12, с. 55]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k\cos kx}{k} = -\frac{1}{2}\ln(1-2p\cos x+p^2), \quad p\le 1,$$

просуммируем ряд в правой части (44). В результате будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_m}\left(r_P r_M^{-1}\right)^{\nu_m}\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P) =$$

$$= \frac{\Phi}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(r_P r_M^{-1}\right)^{\pi/\Phi}\right]^m\left\{\cos m\left[\frac{\pi}{\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)\right]-\cos m\left[\frac{\pi}{\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\Phi}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{2\pi/\Phi}-2\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\pi/\Phi}\cos(\varphi_P-\varphi_M)\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{2\pi/\Phi} - 2\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\pi/\Phi}\cos(\varphi_P+\varphi_M)\right]\Bigg\} =$$

$$= \frac{\Phi}{4\pi}\ln\left[\frac{1+(r_P/r_M)^{2\pi/\Phi}-2(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\cos(\varphi_P+\varphi_M)}{1+(r_P/r_M)^{2\pi/\Phi}-2(r_P/r_M)^{\pi/\Phi}\cos(\varphi_P-\varphi_M)}\right] =$$

$$= \frac{\Phi}{4\pi}\ln\frac{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln\frac{r_M}{r_P}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln\frac{r_M}{r_P}\right)}. \tag{45}$$

Случаю, когда $r_P \geq r_M$, отвечают соотношения (44), (45), в которых следует r_P и r_M поменять местами в силу симметрии формулы (20). В результате из (44) и (45) для функции $G(M,P)$ получим представление

$$G(M,P) = G_0(M,P) + \frac{1}{4\pi}\ln\Psi(M,P) \tag{46}$$

где $G_0(M,P)$ — регулярная в Ω функция, определяемая в виде ряда

$$G_0(M,P) =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{i\pi}{\Phi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left\{J_{\nu_m}(kr_P)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)+\frac{i}{\pi\nu_m}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P),\ r_P\leq r_M; & (47а)\\ \dfrac{i\pi}{\Phi}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left\{J_{\nu_m}(kr_M)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_P)+\frac{i}{\pi\nu_m}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_M)\sin(\nu_m\varphi_P),\ r_P\geq r_M, & (47б)\end{cases}$$

общий член которого убывает со скоростью $O(1/\nu_m^3)$, $m\to\infty$, а функция $\Psi(M,P)$ имеет явное выражение

$$\Psi(M,P) = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}(\varphi_P+\varphi_M)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln\frac{r_M}{r_P}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln\frac{r_M}{r_P}\right)}. \tag{48}$$

Нетрудно видеть, что при совпадении аргументов $\Psi(M,P)$ имеет особенность вида $1/r^2_{M,P}$, так что справедливо соотношение

$$\frac{1}{4\pi}\ln\Psi(M,P) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M,P}} + \varphi(M,P), \tag{49}$$

где через $r_{M,P}$ обозначено расстояние между точками M и P, а $\varphi(M,P)$ — аналитическая по переменным M и P функция.

Действительно, используя тейлоровское разложение в степенной ряд, имеем

$$\ln\left[\sin^2\frac{\pi}{2\Phi}(\varphi_P-\varphi_M)+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2\Phi}\ln\frac{r_M}{r_P}\right)\right] =$$

$$= \ln r^2_{M,P} + \ln\left[1+\frac{O\left((r_P-r_M)(\varphi_P-\varphi_M)^2\right)+O(r_P-r_M)^3+O(\varphi_P-\varphi_M)^4}{r^2_{M,P}}\right]+O(1) =$$

$$= \ln r^2_{M,P} + O(1),\ |M-P|\to 0,\ (\varphi_M-\varphi_P\to 0,\ r_M-r_P\to 0).$$

Отсюда и из (48), используя известную теорему о стирании особенностей [13, с. 400] и теорему Хартогса [14, с. 41], легко заключаем, что

$$\varphi(M, P) := (4\pi)^{-1} \ln \Psi(M, P) - (2\pi)^{-1} \ln r_{M,P}^{-1}$$

является аналитической функцией по совокупности переменных. Из представления (46), очевидно, вытекает также сходимость (20а) и (20б) при $P \neq M$.

Лемма 2. *Пусть* $G(P, M)$ *— функция, представимая соотношением* (46). *Тогда при любом фиксированном* $M \in \Omega$ $G(M, P) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{M\}) \cap$ $\cap\, C^2(\Omega \setminus \{M\})$ *и удовлетворяет в* $\Omega \setminus \{M\}$ *уравнению Гельмгольца* (1).

Доказательство. Из представления (46) непосредственно вытекает, что $G(M, P) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{M\})$. Покажем непрерывность первых частных производных $\partial G_0(M, P)/\partial r_P$ и $\partial G_0(M, P)/\partial \varphi_P$ в области $\Omega \setminus \{M\}$. Из соотношения (47) при $r_P \leq r_M$ имеем

$$\frac{\partial G_0(M,P)}{\partial r_P} = \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ kJ'_{\nu_m}(kr_P) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} \right\} \sin(\nu_m \varphi_M) \sin(\nu_m \varphi_P), \quad (50)$$

$$\frac{\partial G_0(M,P)}{\partial \varphi_P} = \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \nu_m J_{\nu_m}(kr_P) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} \right\} \sin(\nu_m \varphi_M) \cos(\nu_m \varphi_P), \quad (51)$$

а при $r_P \geq r_M$

$$\frac{\partial G_0(M,P)}{\partial r_P} = \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ kH^{(1)\prime}_{\nu_m}(kr_P) J_{\nu_m}(kr_M) - \frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} \right\} \sin(\nu_m \varphi_M) \sin(\nu_m \varphi_P), \quad (52)$$

$$\frac{\partial G_0(M,P)}{\partial \varphi_P} = \frac{i\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \nu_m H^{(1)}_{\nu_m}(kr_P) J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} \right\} \sin(\nu_m \varphi_M) \cos(\nu_m \varphi_P), \quad (53)$$

поскольку ряды в правых частях равенств (50), (51) и (52), (53), полученные почленным дифференцированием рядов (47а) (47б), сходятся равномерно соответственно в областях $K^1_{M,\varepsilon} := \{(r, \varphi) \in \Omega \mid \varepsilon \leq r \leq r_M\}$ и $K^2_{M,R} := \{(r, \varphi) \in \Omega \mid r_M \leq$ $\leq r \leq R\}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число, $R > 0$. Действительно, воспользовавшись равенствами (21), (22), формулами [9, с. 182]

$$Z'_\nu(z) = -\nu z^{-1} Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z), \quad Z'_\nu(z) = \nu z^{-1} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z) \quad (54)$$

для цилиндрических функций $Z_\nu(z)$ и соотношениями

$$\left(\frac{\nu_m}{\nu_m - 1}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right), \quad m \to \infty,$$

$$\left(\frac{\nu_m}{\nu_m - 1}\right)^{\nu_m - 1} = e\left(1 - \frac{1}{2\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right), \quad m \to \infty,$$

для общих членов рядов (50) – (53), опуская множители $\sin(\nu_m \varphi_M)\sin(\nu_m \varphi_P)$ и $\sin(\nu_m \varphi_M)\cos(\nu_m \varphi_P)$, получаем

$$kJ'_{\nu_m}(kr_P) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= -\frac{\nu_m}{r_P} J_{\nu_m}(kr_P) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + kJ_{\nu_m - 1}(kr_P) H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= -\frac{\nu_m}{r_P}\left(\frac{1}{2\pi\nu_m}\right)^{1/2}\frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)+$$

$$+k\left(\frac{1}{2\pi(\nu_m-1)}\right)^{1/2}\left(\frac{ekr_P}{2(\nu_m-1)}\right)^{\nu_m-1}\frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{2\nu_m}{ekr_M}\right)^{\nu_m}\left(1-\frac{1+3k^2r_P^2}{12(\nu_m-1)}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1+3k^2r_M^2}{12\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)+\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}=$$

$$=\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)-\frac{2i\nu_m}{\pi e r_P}\left[\frac{1}{(\nu_m-1)\nu_m}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{\nu_m}{\nu_m-1}\right)^{\nu_m-1}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)+\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}=$$

$$=\frac{2i}{r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}+\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right)-$$

$$-\frac{2i}{\pi r_P e}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{1}{2\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)e\left(1-\frac{1}{2\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)=-\frac{ik^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\pi r_P\nu_m}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right), \quad (55)$$

$$\nu_m J_{\nu_m}(kr_P)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)+\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}=$$

$$=\nu_m\left(\frac{1}{2\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{ekr_P}{2\nu_m}\right)^{\nu_m}\frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{2\nu_m}{ekr_M}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}=-\frac{i}{\pi}\frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right), \quad (56)$$

$$kH^{(1)\prime}_{\nu_m}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M)-\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}=$$

$$=\frac{\nu_m}{r_P}H^{(1)}_{\nu_m}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M)-kH^{(1)}_{\nu_m+1}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M)-\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}=$$

$$=\frac{\nu_m}{r_P}\frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{2\nu_m}{ekr_P}\right)^{\nu_m}\left(\frac{1}{2\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{ekr_M}{2\nu_m}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)-$$

$$-k\frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi(\nu_m+1)}\right)^{1/2}\left(\frac{2(\nu_m+1)}{ekr_P}\right)^{\nu_m+1}\times$$

$$\times\left(1+\frac{3k^2r_P^2}{12(\nu_m+1)}+O\left(\frac{1}{(\nu_m+1)^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2\pi\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{ekr_M}{2\nu_m}\right)^{\nu_m}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1+3k^2r_M^2}{12\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)-\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}=-\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)+\frac{2i}{\pi e r_P}\left(\frac{\nu_m+1}{\nu_m}\right)^{1/2}\left(\frac{\nu_m+1}{\nu_m}\right)^{\nu_m}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)-$$

$$-\frac{i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}=-\frac{2i}{\pi r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}-\frac{i}{\pi r_P}\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right)+$$

$$+\frac{2i}{\pi e r_P}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\left(1+\frac{1}{2\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)e\left(1-\frac{1}{2\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{i}{\pi r_P}\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right), \tag{57}$$

$$\nu_m H_{\nu_m}^{(1)}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M)+\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}=-\frac{i}{\pi}\frac{k^2\left(r_P^2-r_M^2\right)}{4\nu_m}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}+O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right). \tag{58}$$

Оценки (57) и (58) равномерны по $r_P\le R$. Из равенств (55) — (58) видно, что ряды (50), (51) и (52), (53) сходятся равномерно соответственно в областях $K^1_{M,\varepsilon}$ и $K^2_{M,R}$. Поэтому в силу соотношения

$$\partial G(M,P)/\partial r_P=\partial G_0(M,P)/\partial r_P+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r_P}\ln\Psi(M,P) \tag{59}$$

и произвольности ε и R для существования и непрерывности производных $\partial G/\partial r_P$ и $\partial G/\partial\varphi_P$ в области $\Omega\setminus\{M\}$ достаточно установить, что общие члены рядов в представлениях (50), (52) и (51), (53) при $r_P=r_M$ совпадают. Для рядов (51), (53) это очевидно, а совпадение общих членов рядов (50) и (52) при $r_P=r_M$, как нетрудно видеть, вытекает из соотношения [11, с. 120]

$$J_\nu(z)H_\nu^{(1)\prime}(z)-J'_\nu(z)H_\nu^{(1)}(z)=\frac{2i}{\pi z}. \tag{60}$$

Покажем теперь непрерывность вторых частных производных $\dfrac{\partial^2 G}{\partial r_P^i\partial\varphi_P^{2-i}}$, $i=0,1,2$, в области $\Omega\setminus\{M\}$. Для этого, дифференцируя ряды (50) – (53) почленно при $r_P\le r_M$, имеем

$$\frac{\partial^2 G_0(M,P)}{\partial r_P^2}=\frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{k^2J''_{\nu_m}(kr_P)H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M)+\frac{i(\nu_m-1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M), \tag{61}$$

$$\frac{\partial^2 G_0(M,P)}{\partial\varphi_P^2}=-\frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m\left\{\nu_m J_{\nu_m}(kr_P)H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M)+\frac{i}{\pi}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M), \tag{62}$$

а при $r_P \ge r_M$

$$\frac{\partial^2 G_0(M,P)}{\partial r_P^2} = \frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{k^2 H_{\nu_m}^{(1)\prime\prime}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i(\nu_m+1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M). \tag{63}$$

$$\frac{\partial^2 G_0(M,P)}{\partial \varphi_P^2} = -\frac{i\pi}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty}\nu_m\left\{\nu_m H_{\nu_m}^{(1)}(kr_P)J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i}{\pi}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}\right\}\sin(\nu_m\varphi_P)\sin(\nu_m\varphi_M). \tag{64}$$

Ряды (61), (62) и (63), (64) сходятся равномерно соответственно в областях $K_{M,r_1}^{\varepsilon,\delta} := \{(r,\varphi) \mid \delta \le r \le r_1, |\varphi-\varphi_M| < \varepsilon\} \cup \{(r,\varphi) \mid \delta \le r \le r_M, \varphi \in (-\Phi,0)\setminus(\varphi_M-\varepsilon, \varphi_M+\varepsilon)\}$ и $K_{M,r_2}^{\varepsilon,R} := \{(r,\varphi) \mid R \ge r \ge r_2, |\varphi-\varphi_M| < \varepsilon\} \cup \{(r,\varphi) \mid r_M \le r \le R, \varphi \in (-\Phi,0)\setminus(\varphi_M-\varepsilon,\varphi_M+\varepsilon)\}$, где $r_1, r_2 > 0$ — произвольные числа такие, что $r_1 < r_M < r_2$, а $\delta, \varepsilon > 0$ — произвольные достаточно малые числа, $R > r_M$ (и, значит, почленное дифференцирование в указанных областях законно). В самом деле, используя асимптотические формулы (21), (22) и учитывая, что асимптотические разложения функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ имеют вид

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{(2\pi\nu)^{1/2}}\left(\frac{ez}{2\nu}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\nu^{-k},$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \frac{1}{i}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(\frac{2\nu}{ez}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\nu^{-k}, \quad \nu \to +\infty,$$

а также соотношения [9, с. 183]

$$Z_\nu''(z) = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{z^2}-1\right)Z_\nu(z) - \frac{1}{z}Z_{\nu-1}(z), \tag{65}$$

$$Z_\nu''(z) = \left(\frac{\nu(\nu-1)}{z^2}-1\right)Z_\nu(z) + \frac{1}{z}Z_{\nu+1}(z), \tag{66}$$

для общих членов рядов (61) – (64) получаем

$$k^2 J_\nu''(kr_P)H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) + \frac{i(\nu_m-1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(\frac{\nu_m(\nu_m+1)}{r_P^2} - k^2\right)J_{\nu_m}(kr_P)H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) -$$

$$-\frac{k}{r_P}J_{\nu_m-1}(kr_P)H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) + \frac{i(\nu_m-1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= -\left(\frac{\nu_m(\nu_m+1)}{r_P^2} - k^2\right)\frac{i}{\pi\nu_m}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}\left(1 + \frac{k^2\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\nu_m} + \frac{c_0}{\nu_m^2} + O\left(\frac{1}{\nu_m^3}\right)\right) +$$

$$+\frac{k}{r_P}\left(\frac{2i}{\pi r_P k} + \frac{ik\left(r_M^2-r_P^2\right)}{2\pi r_P\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_M^2}\right)\right)\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} + \frac{i(\nu_m-1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(-\frac{ik\left(r_M^2-r_P^2\right)}{4\pi r_P^2} + \frac{c_1}{\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}, \tag{67}$$

$$\nu_m^2 J_{\nu_m}(kr_P) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) + \frac{i\nu_m}{\pi}\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(-\frac{ik^2\left(r_M^2 - r_P^2\right)}{4\pi} + \frac{c_2}{\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\left(\frac{r_P}{r_M}\right)^{\nu_m}, \tag{68}$$

$$k^2 H_{\nu_m}^{(1)''}(kr_P) J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i(\nu_m + 1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(\frac{\nu_m(\nu_m - 1)}{r_P^2} - k^2\right) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_P) J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{k}{r_P} H_{\nu_m+1}^{(1)}(kr_P) + \frac{i(\nu_m + 1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} =$$

$$= -\left(\frac{\nu_m(\nu_m - 1)}{r_P^2} - k^2\right)\frac{i}{\pi\nu_m}\left(1 + \frac{k^2\left(r_P^2 - r_M^2\right)}{4\nu_m} + \frac{c_3}{\nu_m^2} + O\left(\frac{1}{\nu_m^3}\right)\right)\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} -$$

$$- \frac{k}{r_P}\frac{2i}{\pi k r_P}\left(1 + \frac{k^2\left(r_P^2 - r_M^2\right)}{4\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} + \frac{i(\nu_m + 1)}{\pi r_P^2}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(\frac{ik^2\left(r_M^2 - r_P^2\right)}{4r_P^2} + \frac{c_4}{\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}, \tag{69}$$

$$\nu_m^2 H_{\nu_m}^{(1)}(kr_P) J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i\nu_m}{\pi}\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m} =$$

$$= \left(-\frac{ik^2\left(r_P^2 - r_M^2\right)}{4\pi} + \frac{c_5}{\nu_m} + O\left(\frac{1}{\nu_m^2}\right)\right)\left(\frac{r_M}{r_P}\right)^{\nu_m}, \tag{70}$$

где $c_i, i = 0, 1, \ldots, 5,$ — константы, зависящие от r_M и r_P, а оценки (69), (70) равномерны по $r_P \le R$. Из соотношений (67) – (70) вытекает равномерная сходимость рядов (61), (62) в области $K_{M,r_1}^{\varepsilon\delta}$ и рядов (63), (64) в области $K_{M,r_2}^{\varepsilon R}$. Отсюда в силу равенства (59) и произвольности r_1, r_2, ε, R и δ непрерывность производной $\partial^2 G / \partial r_P^2$ в $\Omega \setminus \{M\}$ следует из совпадения общих членов рядов (61) и (63) при $r_P = r_M, \varphi_P \ne \varphi_M$, т. е. из равенства

$$k^2 J_{\nu_m}''(kr_M) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) + \frac{i(\nu_m - 1)}{\pi r_M^2} = k^2 H_{\nu_m}^{(1)''}(kr_M) J_{\nu_m}(kr_M) + \frac{i(\nu_m + 1)}{\pi r_M^2}. \tag{71}$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего соотношения, перепишем его в виде

$$J_{\nu_m}''(kr_M) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) - H_{\nu_m}^{(1)''}(kr_M) J_{\nu_m}(kr_M) = \frac{2i}{\pi r_M^2 k^2}$$

и воспользуемся формулами (65), (66) и (60). Тогда

$$J_{\nu_m}''(kr_M) H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) - H_{\nu_m}^{(1)''}(kr_M) J_{\nu_m}(kr_M) =$$

$$= \left\{\left(\frac{\nu_m(\nu_m + 1)}{k^2 r_M^2} - 1\right) J_{\nu_m}(kr_M) - \frac{1}{kr_M} J_{\nu_m - 1}(kr_M)\right\} H_{\nu_m}^{(1)}(kr_M) -$$

$$-\left\{\left(\frac{\nu_m(\nu_m+1)}{k^2r_M^2}-1\right)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)-\frac{1}{kr_M}H^{(1)}_{\nu_m-1}(kr_M)\right\}J_{\nu_m}(kr_M)=$$

$$=\frac{1}{kr_M}\left(H^{(1)}_{\nu_m-1}(kr_M)J_{\nu_m}(kr_M)-J_{\nu_m-1}(kr_M)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)\right)=$$

$$=\frac{1}{kr_M}\left\{\left(H^{(1)\prime}_{\nu_m}(kr_M)+\frac{\nu_m}{kr_M}H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)\right)J_{\nu_m}(kr_M)-\right.$$

$$\left.-\left(J'_{\nu_m}(kr_M)+\frac{\nu_m}{kr_M}J_{\nu_m}(kr_M)\right)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)\right\}=\frac{1}{kr_M}\left(H^{(1)\prime}_{\nu_m}(kr_M)J_{\nu_m}(kr_M)-\right.$$

$$\left.-J'_{\nu_m}(kr_M)H^{(1)}_{\nu_m}(kr_M)\right)=\frac{2i}{\pi k^2r_M^2}.$$

Равенство (71) установлено. Непрерывность производной $\partial^2G(M,P)/\partial\varphi_P^2$ при $r_P=r_M$, $\varphi_P\neq\varphi_M$ очевидна. Аналогично можно показать, что производная $\partial^2G/\partial r_P\partial\varphi_P$ непрерывна в области $\Omega\setminus\{M\}$.

Покажем теперь, что функция $G(M,P)$, определяемаяпредставлением (46), удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1) в области $\Omega\setminus\{M\}$. Действительно, в случае, когда $r_P\neq r_M$, ряды (20а) и (20б), а также ряды, полученные их двукратным почленным дифференцированием по переменным r_P и φ_P, сходятся равномерно соответственно в областях $K^{\varepsilon}_{r_1}:=\{(r,\varphi)\in\Omega\mid\varepsilon\le r\le\le r_1\}$ и $K^{R}_{r_2}:=\{(r,\varphi)\in\Omega\mid r_2\le r<R\}$, где $\varepsilon, R, r_1, r_2>0$ — произвольные числа такие, что $r_1<r_M<r_2$. Кроме того, общие члены рядов (20а), (20б) являются решениями уравнения (1), что легко проверить непосредственным вычислением. Поэтому $G(M,P)$ удовлетворяет уравнению (1) при $r_P\neq r_M$. Из представления (46) вытекает по непрерывности, что $G(M,P)$ удовлетворяет (1) также и при $r_P=r_M$, $\varphi_P\neq\varphi_M$. Лемма доказана.

1. *Свешников А. Г.* О принципе излучения // Докл. АН СССР. – 1950. – **75**, № 5. – С. 917 – 920.
2. *Эйдус Д. М.* О принципе предельного поглощения // Мат. сб. – 1962. – **57**, № 1. – С. 13 – 44.
3. *Morgenröther K., Werner P.* On the instability of resonances in parallel-plane waveguides // Math. Methods Appl. Sci. – 1989. – **11**, № 3. – P. 279 – 315.
4. *Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В.* Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 184 с.
5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
6. *Подлипенко Ю. К.* Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в некоторых областях с бесконечными границами. – Киев, 1990. – 59 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.47).
7. *Подлипенко Ю. К.* Принцип предельного поглощения для краевых задач дифракции в клине // Докл. РАН.– 1992.– **327**, № 4 – 6.– С. 485 – 488.
8. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний.– М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950.– 280 с.
9. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
10. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
11. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. – 241 с.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
13. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т. – М.: Наука, 1967.– Т. 1.– 488 с.
14. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1985. – Ч. 2. – 464 с.

Получено 28. 09. 92