УДК 517.54

Д. Д. Илмурадов, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КАТЕГОРНАЯ ТЕОРЕМА О КОНТИНГЕНЦИЯХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются проблемы углубленного изучения характеристики контингенции множества второй категории в $\mathbb{R}^{m+1}$, в частности графика липшицевой функции.

Розглядаються проблеми поглибленого вивчення характеристики контингенції множини другої категорії в $\mathbb{R}^{m+1}$, зокрема графіка ліпшицевої функції.

В настоящей статье рассматривается общая теорема о контингенциях гиперповерхности $(m+1)$-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ на множестве второй категории.

Чтобы решить вопрос о контингенции на множестве второй категории, необходимо рассмотреть лишь множества, для которых понятие второй категории имеет смысл. Такими множествами являются G_δ-множества в $\mathbb{R}^{m+1}$, например замкнутые множества или локально-компактные, т. е. такие, что для каждой их точки найдется окрестность, замыкание которой (относительно самого множества) компактно, в частности график $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ непрерывной функции $u = f(x)$, где $x \in D \subset \mathbb{R}^m$ заданный в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Известно [1], что на множестве второй категории в $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ контингенция центрально-симметрична; более точно, на графике $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ имеется открытое плотное множество Γ' со следующими свойствами:

а) либо на компоненте $\Gamma'_n \subset \Gamma$, $n = 1, 2, \ldots$, имеется множество второй категории, в точках которого контингенция есть полное пространство $\mathbb{R}^{m+1}$;

б) либо такая компонента есть график липшицевой функции относительно некоторой системы координат.

Отсюда следует, что задача о характеристике контингенции графика Γ функции $u = f(x)$ на множестве второй категории сводится к такой же задаче для липшицевых функций. Ниже предложено частичное решение этой задачи.

Теорема 1. *Если функция $u = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^m$, липшицева с липшицевой константой L, то контингенция графика $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ этой функции ограничена липшицевыми краями $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ с той же липшицевой константой, что и для $f(x)$.*

Доказательство. По условию теоремы $|f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|$, где x_1, $x_2 \in D \subset \mathbb{R}^m$. Докажем, что для любого фиксированого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\mathcal{P}(\varphi') - \mathcal{P}(\varphi'')| \le (L+\varepsilon)\,|\varphi' - \varphi''|$ для любых $\varphi', \varphi'' \in S^{m-1}$.

Предположим противное: пусть для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся направления $\varphi_0, \varphi_1 \in S^{m-1}$ такие , что $|\mathcal{P}(\varphi_0) - \mathcal{P}(\varphi_1)| > (L+\varepsilon)\,|\varphi_0 - \varphi_1|$, где $L + \varepsilon$ — положительное число. Тогда $\mathcal{P}(\varphi_0) \ne \mathcal{P}(\varphi_1)$ и предположим, что $\mathcal{P}(\varphi_0) > \mathcal{P}(\varphi_1)$. Тогда $\mathcal{P}(\varphi_0) - \mathcal{P}(\varphi_1) > (L+\varepsilon)\,|\varphi_0 - \varphi_1|$.

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность расположенных вдоль φ_0 точек, сходящаяся к x_0. Поскольку $\mathcal{P}(\varphi_0)$ — наибольшее производное число функции $f(x)$ в направлении φ_0, имеем

$$f(x_n) - f(x_0) = [\mathcal{P}(\varphi_0) + \delta_n]\,|x_n - x_0|, \tag{1}$$

где $x_n, x_0 \in \varphi_0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

© Д. Д. ИЛМУРАДОВ, 1993

Построим симметричную относительно биссектрисы угла $\alpha = [\varphi_0 \hat{,} \varphi_1]$ последовательность $\{x'_n\}$ расположенных вдоль φ_1 точек, сходящуюся к x_0. Тогда для каждого значения n

$$f(x'_n) - f(x_0) = [\rho + \delta'_n] \mid x'_n - x_0 \mid, \tag{2}$$

где $x'_n, x_0 \in \varphi_1$ и $\rho \le \mathcal{P}(\varphi_1)$, $\delta'_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Вычитая из (1) неравенство (2), получаем

$$f(x_n) - f(x'_n) = [\mathcal{P}(\varphi_0) + \delta_n] \mid x_n - x_0 \mid - [\rho + \delta'_n] \mid x'_n - x_0 \mid.$$

Далее имеем

$$\frac{f(x_n) - f(x'_n)}{\mid x_n - x'_n \mid} = [\mathcal{P}(\varphi_0) - \delta_n] \frac{\mid x_n - x_0 \mid}{\mid x_n - x'_n \mid} - [\rho + \delta'_n] \frac{\mid x'_n - x_0 \mid}{\mid x_n - x'_n \mid}.$$

С учетом равнобедренности треугольника $\Delta x_0 x_n x'_n$ находим

$$\frac{f(x_n) - f(x'_n)}{\mid x_n - x'_n \mid} = [\mathcal{P}(\varphi_0) - \rho] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + [\delta_n - \delta'_n] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \ge$$

$$\ge [\mathcal{P}(\varphi_0) - \mathcal{P}(\varphi_1)] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + [\delta_n - \delta'_n] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} >$$

$$> (L + \varepsilon) \mid \varphi_0 - \varphi_1 \mid \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + [\delta_n - \delta'_n] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= (L + \varepsilon) \frac{\alpha/2}{\sin\frac{\alpha}{2}} + [\delta_n - \delta'_n] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= (L + \varepsilon) + (L + \varepsilon) \left[\frac{\alpha/2}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1 \right] + [\delta_n - \delta'_n] \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Здесь функция $x / \sin x$ всегда больше единицы при $x \ne 0$, поэтому второй член правой части равенства всегда положителен.

Можно найти такое n, чтобы сумма последних двух членов правой части была положительной. Тогда

$$\frac{f(x_n) - f(x'_n)}{\mid x_n - x'_n \mid} > L + \varepsilon.$$

Здесь нарушается выполнимость условия Липшица, т. е. производное число неограничено сверху. Это противоречит тому предположению, что функция $f(x)$ липшицева. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство данного утверждения для функции $\mathcal{Q}(\varphi)$ проводится аналогично. Обратное утверждение этой теоремы доказывается легко.

Пусть имеется регулярный континуум K с липшицевыми краями $\mathcal{P}(\varphi)$ и $\mathcal{Q}(\varphi)$. Построим такую липшицеву функцию $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^m$, что контингенция графика этой функции в произвольной его точке совпадает с регулярным континуумом K. Возьмем функцию $\Phi(x) = x \sin(\ln x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^m$. Эта функция липшицева, т. е. производная ее ограничена: $\mid \Phi'(x) \mid = \mid \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \mid \le 2$ при любых значениях $x \in D \subset \mathbb{R}^m$.

По построению регулярный континуум K ограничен сверху краем $\mathcal{P}(\varphi)$, а снизу — $Q(\varphi)$. Для того чтобы контингенция графика функции $\Phi(x)$ совпала с регулярным континуумом K, должны выполняться следующие условия для каждого значения φ:

$$\overline{\lim}\frac{\Phi(r,\varphi)}{r} = \mathcal{P}(\varphi), \quad \underline{\lim}\frac{\Phi(r,\varphi)}{r} = Q(\varphi).$$

Возьмем $\Phi(r,\varphi) = A\, r\sin(\ln r) + Br$, где A и B — произвольные функции от φ. Тогда получим

$$A + B = \mathcal{P}(\varphi), \quad -A + B = Q(\varphi).$$

Функция $\Phi(r,\varphi)$ примет вид

$$\Phi(r,\varphi) = \frac{\mathcal{P}(\varphi) - Q(\varphi)}{2} r\sin(\ln r) + \frac{\mathcal{P}(\varphi) + Q(\varphi)}{2} r.$$

Полученная функция липшицева и контингенция графика этой функции полностью совпадает с регулярным континуумом K с липшицевыми краями $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$. Это показывает, что если функция $f(x)$ липшицева, то ограничивающие края $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ — контингенции ее графика в некоторой его точке липшицевы, причем липшицевая константа L остается инвариантной.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — произвольное локально компактное множество. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi\colon x \to \mathrm{contg}_E^s x$, где $\mathrm{contg}_E^s x$ — сферическая контингенция множества E в точке x. Докажем теорему, являющуюся обобщением теоремы Бэра о функциях первого класса, аналогичную теореме из [2].

Теорема 2. *Существует множество $E' \subset E$ всюду второй категории точек полунепрерывности сверху отображения $\Phi\colon x \to \mathrm{contg}_{E'}^s x$.*

Доказательство. Введем следующие множества для каждой точки $x \in E$:

$$E_{kl}(x) = \{y \in E\colon\ 1/k < \rho(x,y) < 1/l\},$$

$$E_l(x) = \{y \in E\colon\ 0 < \rho(x,y) < 1/l\}$$

и их проекции на сферу S^m:

$$M_{kl}(x) = \overline{\mathrm{пр}_{S^m} E_{kl}(x)}, \quad M_l(x) = \overline{\mathrm{пр}_{S^m} E_l(x)}.$$

Рассмотрим многозначные отображения из E в 2^{S^m}:

$$\Phi^{kl}(x)\colon x \to M_{kl}(x), \quad \Phi^l(x)\colon x \to M_l(x).$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Отображение $\Phi^{kl}(x)$ из E в 2^{S^m}, заданное равенством $\Phi^{kl}(x) = M_{kl}(x)$, непрерывно.*

Доказательство. Для того чтобы отображение $\Phi^{kl}(x)$ было непрерывным, необходимо, чтобы последовательность множеств $\{M_{kl}(x)\}$ образовывала непрерывное семейство множеств. Последовательность множеств $\{E_{kl}(x)\}$ будет непрерывным семейством множеств, если найдется последовательность чисел $x_n \in E$, сходящаяся к x_0, такая, что $\mathrm{lt}_n E_{kl}(x_n) = E_{kl}(x_0)$. Для этого достаточно доказать два включения: 1) $\mathrm{lt}_n E_{kl}(x_n) \subset E_{kl}(x_0)$; 2) $\mathrm{lt}_n E_{kl}(x_n) \supset E_{kl}(x_0)$.

1. Пусть $\xi \in \mathrm{lt}_n E_{kl}(x_n)$. Тогда найдется такое $N > 0$, что для всех $n > N$ пе-

ресечение $U_{1/n}(\xi) \cap E_{kl}(x_n)$ не пусто и для каждого значения $n > N$ найдется точка $x_{p_n} \in U_{1/n}(\xi) \cap E_{kl}(x_n)$. Возникающая последовательность таких точек сходится к ξ, т. е. $x_{p_n} \in E$ и $x_{p_n} \to x_0 \in E$. Тогда по построению множеств $E_{kl}(x_0)$ имеем $1/k < \rho(\xi, x_0) < 1/l$. Это означает, что $\xi \in E_{kl}(x_0)$, т. е. $\operatorname{lt}_n E_{kl}(x_n) \subset E_{kl}(x_0)$.

2. Пусть $\xi \in E_{kl}(x_0)$. По построению множеств $E_{kl}(x_0)$ имеем $1/k < \rho(\xi, x_0) < 1/l$. Тогда при достаточно больших n найдется последовательность x_n такая, чтобы выполнялось неравенство $1/k < \rho(\xi, x_n) < 1/l \ \forall n > N$. Из последнего неравенства для достаточно больших n следует $U_{1/n}(\xi) \cap E_{kl}(x_n) \neq \varnothing$. Это означает, что $\xi \in E_{kl}(x_n)$. Значит, если точка ξ принадлежит одновременно $E_{kl}(x_n)$ и $E_{kl}(x_0)$, то она будет принадлежать и $\operatorname{lt}_n E_{kl}(x_n)$. Это означает, что $E_{kl}(x_0) \subset \operatorname{lt}_n E_{kl}(x_n)$. Следовательно, $\operatorname{lt}_n E_{kl}(x_n) = E_{kl}(x_0)$. Значит, последовательность множеств $\{E_{kl}(x)\}$ образует непрерывное семейство множеств. Тогда последовательность множеств $\{M_{kl}(x)\}$ как проекция непрерывного семейства множеств на S^m будет непрерывным семейством множеств. Следовательно, отображение $\Phi^{kl}(x) = M_{kl}(x)$ непрерывно. Лемма доказана.

Имеем $\Phi^l(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \Phi^{kl}(x)$, т. е. $\Phi^l(x)$ — аналитически представимое отображение первого класса в смысле Бэра, так как $\overline{M}_l(x) = \operatorname{lt}_k M_{kl}(x)$. В этом случае [3] множество его точек разрыва есть множество первой категории в E. Следовательно, множество его непрерывности будет составлять множество второй категории. Тогда множество точек его непрерывности, по теореме Бэра, всюду плотно в E.

Теперь покажем, что в каждой точке непрерывности отображения $\Phi^l(x)$ отображение $\Phi(x)$ полунепрерывно сверху. Действительно, пусть $x_0 \in E$ — точка непрерывности отображения $\Phi^l(x)$ и x_n — последовательность точек из E, сходящаяся к $x_0 \in E$. В силу свойства верхнего топологического предела последовательности множеств имеем

$$\operatorname{ls}_n \operatorname{contg}^s_E x_n = \operatorname{ls}_n \bigcap_l \overline{M}_l(x_n) \subset \bigcap_l \operatorname{ls}_n \overline{M}_l(x_n) = \bigcap_l \overline{M}_l(x_0) = \operatorname{contg}^s_E x_0,$$

$$\operatorname{ls}_n \operatorname{contg}^s_E x_n \subset \operatorname{contg}^s_E x_0.$$

Это означает, что отображение $\Phi\colon x \to \operatorname{contg}^s_E x$ полунепрерывно сверху в каждой точке непрерывности отображения $\Phi^l(x)$, т. е. в каждой точке множества второй категории в E. Теорема доказана. Если $E = \Gamma = \{(x, u)\colon u = f(x), x \in \mathbb{R}^m\}$ — график непрерывной однозначной функции $u = f(x)$, то приведенные выше утверждения справедливы и для цилиндрической контингенции.

Лемма 2. *Пусть q — единичный квадрат и $e \subset q$ — произвольное множество полной меры в нем. Тогда найдется дуга L параболы, касающаяся оси Ox в точке O и пересекающая множество e по множеству полной линейной меры (относительно этой дуги).*

Доказательство. Рассмотрим криволинейный треугольник $d = \{(x, y)\colon 0 \leq \leq y \leq x^2\}$ и его гомеоморфизм f на прямолинейный треугольник d_1 в плоскости (u, v):

$$f:\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{y}, \end{cases} \quad \text{т. е. } f = x + i\sqrt{y}.$$

При этом семейство парабол $y = kx^2$, $0 \le k \le 1$, переходит в семейство прямых $v = \sqrt{k}\,u$. Так как якобиан обратного отображения $f^{-1} = u + i\,v^2$ внутри d_1 отличен от нуля, то оно имеет N-свойство и на каждой прямой $v = \sqrt{k}\,u$. Поэтому образ e' множества $e \cap d$ будет также полной меры в d_1. Выбирая произвольную прямую из семейства $\{v = \sqrt{k}\,u\}$, пересекающую e' по множеству полной линейной меры, получаем, что соответствующая ей парабола в d также пересекает e по такому же множеству. Лемма доказана.

Теорема 3. *Для произвольного многообразия $\Gamma^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ на множестве второй категории сферическая контингенция будет лишь двух типов:* 1) *полная сфера S;* 2) *центрально-симметричный сферический пояс с двумя сферически выпуклыми краями.*

Доказательство. По теореме 1 [1] на Γ существует множество E всюду второй категории такое, что либо контингенция множества E в каждой его точке — полное пространство, либо некоторая окрестность Γ — график липшицевой функции относительно некоторой системы координат, причем контингенция в точках $E \cap \Gamma$ этой окрестности — центрально-симметричное множество.

Для завершения доказательства этой теоремы остается доказать, что края контингенции являются (сферически) выпуклыми. Для этого докажем сначала следующую теорему, аналогичную теореме 10 из [1].

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ липшицева и $A_0 \in \Gamma$ — точка полунепрерывности сверху отображения $\Phi\colon A \to \operatorname{contg}^s_\Gamma A$. Тогда каждая граничная точка контингенции $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ является предельной для точек $\operatorname{contg}^s_\Gamma A'$, где $\text{пр}\, A' \in D$ принадлежит множеству точек дифференцируемости функции $f(x)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2 отображение Φ имеет множество второй категории точек полунепрерывности сверху. По условию функция f липшицева. Тогда контингенция $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ ограничена сверху и снизу липшицевыми краями $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$.

Пусть $B' \subset D$ — множество точек дифференцируемости функции $f(x)$. Согласно лемме 2 множество B' есть множество полной меры. Так как для липшицевой функции сферическая контингенция не содержит полюсов сферы, то доказательство этой теоремы легко сводится к случаю соответствующей цилиндрической контингенции. В этом случае $\operatorname{contg}^s_\Gamma A_0$ есть также регулярный континуум [4] с липшицевыми краями, являющимися графиками функций $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$. Для доказательства теоремы нужно показать, что для любого направления φ верхний (нижний) предел производных чисел функции f в точках ее дифференцируемости, взятых в направлении, параллельном φ, совпадает с $\mathcal{P}(\varphi)$ ($Q(\varphi)$). Из полунепрерывности сверху отображения $\Phi\colon A \to \operatorname{contg}^c_\Gamma A$ следует

$$\varlimsup_{x \to x_0} \partial f(x)/\partial\varphi \le \mathcal{P}(\varphi),$$

где $x \to x_0$ сходится по точкам дифференцируемости f. Если теорема неверна для некоторого φ, то это означает, что

$$\varlimsup_{x \to x_0} \partial f(x)/\partial\varphi < \mathcal{P}(\varphi).$$

Пусть в окрестности $U(x_0)$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\partial f(x)/\partial\varphi \le \mathcal{P}(\varphi) - \varepsilon \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0).$$

Если L — дуга параболы, пересекающая B' по множеству полной меры, а φ_0 — касательное направление к дуге в точке x_0, то

$$\int\limits_{L:[x_0,x']} \frac{\partial f}{\partial s} ds = f(x') - f(x_0). \tag{3}$$

Но $\partial f/\partial s = \partial f/\partial\varphi' = (\operatorname{grad} f, \vec{s}^{\,0})$, где φ' — направление, касательное к L, $\partial f/\partial\varphi = (\operatorname{grad} f, \vec{\varphi}^{\,0})$. Далее

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi'} - \frac{\partial f}{\partial\varphi} = (\operatorname{grad} f, \; \vec{s}^{\,0} - \vec{\varphi}^{\,0}) = |\operatorname{grad} f|\, 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = [\vec{s}^{\,0}\widehat{,}\vec{\varphi}^{\,0}]$. Поскольку $\alpha \to 0$ при $x' \to x_0, x' \in L$, то можем считать, что на дуге L

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi'} - \frac{\partial f}{\partial\varphi}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда с учетом неравенства $\partial f/\partial\varphi \le \mathcal{P}(\varphi) - \varepsilon$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial\varphi'} < \mathcal{P}(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из (3) вытекает

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} < \mathcal{P}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из предположенной полунепрерывности сверху следует, что предельная (большая) сфера для $\operatorname{contg}_\Gamma^s A'$ принадлежит $\operatorname{contg}_\Gamma^s A$. Из доказанного же следует, что каждая граничная точка $\operatorname{contg}_\Gamma^s A$ принадлежит подобной (предельной) сфере. Это же означает (сферическую) выпуклость ее краев $\mathcal{P}(\varphi)$, $Q(\varphi)$. Тем самым теоремы 3 и 4 доказаны.

Из этой теоремы и из того, что на множестве второй категории $\operatorname{contg}_\Gamma^s A$ является центрально-симметричным континуумом, вытекают такие следствия.

***Следствие* 1.** *Если в каждой точке x множества второй категории E существует направление $\varphi(x)$, для которого $\mathcal{P}(\varphi) = Q(\varphi)$, то найдется такое множество $E' \subset E$ второй категории, что и $\mathcal{P}(\varphi + \pi) = Q(\varphi + \pi)$, причем в направлении $\varphi(x)$ функция $f(x)$ дифференцируема.*

***Следствие* 2.** *Если в каждой точке x множества второй категории E существуют m направлений $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, таких, что $i \ne j$ $\varphi_i \not\equiv \varphi_j (\operatorname{mod} \pi)$, для которых $\mathcal{P}(\varphi_k) = Q(\varphi_k)$, $k = \overline{1,m}$, то найдется такое множество $E' \subset E$ второй категории, в точках которого $\mathcal{P}(\varphi) = Q(\varphi)$ для всех направлений и сферическая контингенция представляет собой большую сферу, причем функция $f(x)$ дифференцируема всюду на E_1.*

1. *Трохимчук Ю. Ю.* О дифференциальных свойствах вещественных и комплексных функций // Десятая мат. школа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С.330 – 360.
2. *Горленко С. В.* Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его приложение в теории аналитических функций // Там же. – С.260 – 269.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т.1. – 594 с.
4. *Илмурадов Д. Д.* Теорема о контингенциях гиперповерхностей евклидового пространства // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №11. – С. 1484 – 1490.

Получено 28.12.91