УДК 517.5

П. В. Задерей, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ $(\overline{\psi}, \overline{\beta})$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Получены оценки наилучших приближений в интегральной и равномерной метриках на классах периодических функций многих переменных, которые определяются ограничениями на смешанную обобщенную производную, введенную А. И. Степанцом. При этом гармоники тригонометрических полиномов, которые используются для приближения рассматриваемых классов функций, берутся из так называемых гиперболических крестов.

Одержані оцінки найкращих наближень в інтегральній та рівномірній метриках на класах періодичних функцій багатьох змінних, які визначаються обмеженнями на змішану узагальнену похідну, введену О. І. Степанцем. При цьому гармоніки тригонометричних поліномів, які використовуються для наближення розглядуваних класів функцій, беруться з так званих гіперболічних хрестів.

1. Введем обозначения и определения, используемые в дальнейшем.

$\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup 0$; $\mathbb{N}^m = \{n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)\colon n_i \in \mathbb{N}, \forall i \in M\}$, $\mathbb{Z}_+^m = \{k = (k_1, \ldots, k_m)\colon k_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in M\}$, $M \setminus B$ — дополнение множества $B \subset M$ к M (при включении $B \subset M$ возможность равенства $B = M$ не исключается); $|B|$ — число элементов множества B; $T^{|B|} = [-\pi, \pi]^{|B|}$, $T_\varepsilon^m = [\varepsilon, \pi]^m$, $\varepsilon \geq 0$; γ_k — число координат вектора $k \in \mathbb{Z}_+^m$, равных нулю; $\rho << \delta$ означает, что найдется положительная постоянная C такая, что $\rho \leq C\delta$. Если $\rho << \delta$ и $\delta << \rho$, то будем писать $\rho \asymp \delta$. Везде в дальнейшем через C, или C_i, будем обозначать положительные постоянные, возможно разные в различных формулах.

Пусть для данных функций $\psi_i(k)$, $k \in \mathbb{N}$, и чисел $\beta_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,m}$, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \cos\left(kx_i + \beta_i \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

являются рядами Фурье суммируемых функций, которые обозначим через $\mathcal{B}_{\psi_i, \beta_i}(x_i)$. Положим $\mathcal{B}_{\overline{\psi}, \overline{\beta}}(x) = \prod_{i \in M} \mathcal{B}_{\psi_i, \beta_i}(x_i)$.

В дальнейшем будем считать выполненными соотношения

$$\psi_1(k) = \psi_2(k) = \ldots = \psi_\nu(k) > \psi_{\nu+1}(k) \geq \ldots \geq \psi_m(k) \geq 0, \ 1 \leq \nu \leq m, \tag{2}$$

$$\lim_{k \to \infty} \psi_1(k) = 0. \tag{3}$$

По аналогии с одномерным случаем (см. [1, 2]) определим классы $L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta}, p}$, $p = 1, \infty$, функций $f(x)$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \varphi(x) * \mathcal{B}_{\overline{\psi}, \overline{\beta}}(x) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} \varphi(x - t)\, \mathcal{B}_{\overline{\psi}, \overline{\beta}}(t)\, dt, \tag{4}$$

где $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx_j = 0 \ \forall j \in M$ и соответственно $\| \varphi \|_1 = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} |\varphi(x)|\, dx \leq 1$, $\| \varphi \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)| \leq 1$. Отметим, что функция $\varphi(\cdot)$ совпадает в смысле пространства L (т.е. почти всюду) со смешанной $(\overline{\psi}, \overline{\beta})$-производной $f^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta}}(\cdot)$

(см. [2]). Если $\psi_i(k_i) = k_i^{-r_i}$, то $L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p} =: W^r_{\overline{\beta},p}$.

Определение классов $L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p}$, $p = 1, \infty$, предполагает задание множества $\{\psi_i(k)\}_{i=1}^m$. Допустим, что на основании этого множества определены функции со следующими свойствами:

$$\psi_i(k) = \tilde{\psi}_i(k), \ i = \overline{1, \nu}, \ 1 \le \nu \le m,$$

$$\psi_i(k) \le \tilde{\psi}_i(k), \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\psi_i(k)}{\tilde{\psi}_i(k)} < \infty, \ i = \overline{\nu+1, m}, \ k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\tilde{\psi}_\nu(k) > \tilde{\psi}_{\nu+1}(k) \ge \ldots \ge \tilde{\psi}_m(k).$$

В настоящей работе будем рассматривать только строго монотонно убывающие функции $\psi_i(k)$ и $\tilde{\psi}_i(k)$, т. е. такие, что

$$\psi_i(k) > \psi_i(k+1), \quad \tilde{\psi}_i(k) > \tilde{\psi}_i(k+1), \ k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Функции $\psi(k)$ и $\tilde{\psi}_i(k)$, $i \in M$, заданные на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, продолжим с сохранением строгой монотонности на множество $[1, \infty)$. В дальнейшем через $\Phi_i(v)$ будем обозначать $\psi_i(v)$ или $\tilde{\psi}_i(v)$. Таким образом, $\forall\, v$, v', $1 \le v < v' < \infty$, имеем

$$\Phi_i(v) > \Phi_i(v') \quad \forall i \in M. \tag{6$'$}$$

Под производной $\Phi_i'(v)$ будем понимать правостороннюю производную функции $\Phi_i(v)$, т. е. $\Phi_i'(v) = \Phi_i'(v+0)$.

Предположим, что для всех $t \ge 1$ существуют такие константы C_i, $i = \overline{1,4}$, что

$$C_1 \Phi_i(2t) \le \Phi_i(t) \le C_2 \Phi_i(2t), \tag{7}$$

$$C_3 \frac{\Phi_i(t)}{t} \le |\Phi_i'(t)| \le C_4 \frac{\Phi_i(t)}{t}, \tag{8}$$

и, кроме того, существуют $C > 0$, $\alpha > 0$ и $N \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$C \prod_{i \in M} \psi_i\left(N^\alpha\right) \ge \psi_1(N). \tag{9}$$

Положим

$$\overline{\psi}(k) = \prod_{i\in M} \psi_i(k_i), \quad \overline{\tilde{\psi}}(k) = \prod_{i\in M} \tilde{\psi}_i(k_i).$$

$$\Gamma(N, \psi) = \{k \in \mathbb{N}^m \colon \overline{\psi}(k) \ge \psi_1(N)\}, \quad \Gamma(N, \tilde{\psi}) = \{k \in \mathbb{N}^m \colon \overline{\tilde{\psi}}(k) \ge \psi_1(N)\}.$$

Если $\psi_i(k_i) = k_i^{-r_i}$, $r_i > 0$, то $\Gamma(N, \psi) =: \Gamma(N, r)$. Обозначим через $T(N, \psi)$ (соответственно через $T(N, \tilde{\psi})$) множество полиномов вида

$$t_N(x) = \sum_{k \in \Gamma(N,\psi)} \mathcal{A}_k(a, x) \quad \left(t_N(x) = \sum_{k \in \Gamma(N,\tilde{\psi})} \mathcal{A}_k(a, x) \right),$$

где

$$\mathcal{A}_k(a, x) = \sum_{l \in L} a_k(l) \prod_{i \in M} \cos\left(k_i x_i - l_i \frac{\pi}{2}\right), \ a_k(l) \in \mathbb{R},$$

а L — множество векторов $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, координаты l_i которых принимают значение 0 либо 1.

Целью настоящей работы является оценка величин

$$\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p})_p = \sup_{f\in L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p}} \inf_{t_N\in T(N,\tilde{\psi})} \|f(x)-t_N(x)\|_p,$$

$$E_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p})_p = \sup_{f\in L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},p}} \inf_{t_N\in T(N,\psi)} \|f(x)-t_N(x)\|_p, \quad p=1,\infty.$$

Теорема 1. *Если функции* $\Phi_i(\cdot)$, $i\in M$, *удовлетворяют условиям* (2), (3), (5) – (8), *то*

$$\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},\infty})_\infty << \psi_1(N)\ \ln^{\nu-1} N, \tag{10}$$

а если, кроме того, для функций $\psi_i(\cdot)$ *выполняется еще условие* (9), *то*

$$\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1 \asymp \psi_1(N)\ln^{\nu-1} N. \tag{11}$$

При $\psi_i(k_i)=k_i^{-r_i}$ неравенство (10) и оценка сверху для $\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1$ получены С.А. Теляковским [3], а оценка снизу для $\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1$ — В.Н. Темляковым [4].

Теорема 2. *Если функции* $\psi_i(\cdot)$, $i\in M$, *удовлетворяют условиям* (2), (3), (6) – (8), *то*

$$E_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},\infty})_\infty << \psi_1(N)\ln^{m-1} N, \tag{10$'$}$$

а если, кроме того, для функций $\psi_i(\cdot)$, *выполняется еще условие* (9), *то*

$$E_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1 \asymp \psi_1(N)\ \ln^{m-1} N. \tag{11$'$}$$

При $\psi_i(k_i)=k_i^{-r_i}$ неравенство (10′) получено К.И. Бабенко [5], а соотношение (11′) — В.Н. Темляковым [4].

2. Для доказательства теорем 1 и 2 потребуются следующие утверждения.

Обозначим через $\Delta^i a_k$ первую разность по индексу i с шагом 1, т. е. $\Delta^i a_k = a_k - a_{k_{M\setminus i},k_i+1}$, а через $\Delta^{M\setminus D}a_k$ — выражения, которые получаются после последовательного применения операторов Δ^i к a_k по всем $i\in M\setminus D$.

Теорема 3. *Пусть для коэффициентов* a_k *ряда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{-\gamma_k} a_k \prod_{i\in B}\sin k_i x_i \prod_{j\in M\setminus B}\cos k_j x_j \tag{12}$$

выполняются условия:

1) $a_k\to 0$ *при* $k_1+k_2+\ldots+k_m\to\infty$;

2) $\exists\, p>1$ *такое, что* $\forall\, D\subset B$

$$F^m_D(p) := \sum_{k\in\mathbb{N}^m}\prod_{i\in D}\frac{1}{k_i}\left(\prod_{j\in M\setminus D}\frac{1}{k_j}\sum_{\substack{l_j=k_j\\ j\in M\setminus D}}^{2k_j} |\Delta^{M\setminus D} a_{l_{M\setminus D},k_D}|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Тогда: 1) *ряд* (12) *сходится всюду в* T^m_0 *за исключением, может быть, точек, где* $\prod_{j\in M\setminus B} x_j = 0$; *сходимость равномерна в* T^m_ε, $\varepsilon>0$; 2) *функция* $s(x)$, *являющаяся суммой ряда* (12), *интегрируема на* T^m *и выполняется неравенство*

$$\int_{T^m_0}|s(x)|\,dx \le C\sum_{D\subset B}F^m_D(p);$$

3) *ряд* (12) *является рядом Фурье функции* $s(x)$.

Доказательство. Положим

$$\overline{F}_D^m(p) := \sum_{k\in\mathbb{N}^m} \prod_{i\in D} \frac{1}{k_i} \left(\prod_{j\in M\setminus D} \frac{1}{k_j} \sum_{\substack{l_j = k_j \\ j\in M\setminus D}}^{\infty} |\Delta^{M\setminus D} a_{l_{M\setminus D}, k_D}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Если в теореме 3 $F_D^m(p)$ заменить на $\overline{F}_D^m(p)$, то такое утверждение доказано при $m=1$ в [6], при $m>1$ и $B=\varnothing$ — в [7, 8], а в общем случае — в [9].

Если будет доказано, что величины $F_D^m(p)$ и $\overline{F}_D^m(p)$ являются эквивалентными, то справедливость теоремы 3 будет следовать из соответствующего утверждения из работы [9]. Для эквивалентности $F_D^m(p)$ и $\overline{F}_D^m(p)$ необходимо показать, что существует постоянная C такая, что

$$\overline{F}_D^m(p) \le C\, F_D^m(p). \tag{13}$$

Обратное неравенство очевидно. Докажем, что

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^{|M\setminus D|}} \left(\prod_{j\in M\setminus D} \frac{1}{k_j} \sum_{\substack{l_j=k_j \\ j\in M\setminus D}}^{\infty} |\Delta^{M\setminus D} a_{l_{M\setminus D}, k_D}|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le C \sum_{k\in\mathbb{N}^{|M\setminus D|}} \left(\prod_{j\in M\setminus D} \frac{1}{k_j} \sum_{\substack{l_j=k_j \\ j\in M\setminus D}}^{2k_i} |\Delta^{M\setminus D} a_{l_{M\setminus D}, k_D}|^p \right)^{1/p}. \tag{14}$$

При $M\setminus D = \{i\}$ согласно неравенству Минковского имеем

$$\sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=k_i}^{\infty} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p} \le \sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=k_i}^{2k_i} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=2k_i}^{\infty} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p}.$$

Поскольку

$$\sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=2k_i}^{\infty} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p} \le \frac{2^{1/p}}{2} \sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=k_i}^{\infty} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p},$$

то

$$\sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=k_i}^{\infty} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p} \le \frac{2}{2-2^{1/p}} \sum_{k_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k_i} \sum_{l_i=k_i}^{2k_i} |\Delta^i a_{l_i, k_{M\setminus i}}|^p \right)^{1/p},$$

т.е. неравенство (14) в случае, когда множество $M\setminus D$ состоит из одного элемента, доказано. Общий случай выводится из рассмотренного индукцией по числу элементов множества $M\setminus D$. Таким образом, установлена справедливость неравенства (13), а с ним и теоремы 3.

Лемма 1. *Если функции* $\Phi_i(\cdot)$, $i\in M$, *удовлетворяют условиям* (3), (6) *и* (8), *то*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Phi_i(k)}{k} \asymp \Phi_i(n) \tag{15}$$

и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_i(\cdot)\cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_i(\cdot)\sin kx \tag{16}$$

являются рядами Фурье суммируемых функций.

Доказательство. Учитывая условия леммы, находим

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Phi_i(k)}{k} \asymp \int_n^{\infty} \frac{\Phi_i(x)}{x}\, dx \asymp \Big|\int_n^{\infty} \Phi_i'(x)\, dx\Big| = \Phi_i(n).$$

При $n=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_i(k)}{k} \le C < \infty. \tag{17}$$

Известно [10, с. 652], что при выполнении условий (3), (6) и (17) ряды (16) являются рядами Фурье суммируемых функций. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функции* $\psi_i(\cdot)$, $i \in M$, *удовлетворяют условиям* (2), (6), (7) *и* (9), *то*

$$\sum_{k\in\Gamma(N,\psi)} \prod_{i\in M} \frac{1}{k_i} \asymp \ln^m N.$$

В случае $\psi_i(k_i) = k_i^{-r_i}$ эта лемма доказана в [4].

Доказательство. На основании соотношения (2) заключаем, что

$$\sum_{k\in\Gamma(N,\psi)} \prod_{i\in M} \frac{1}{k_i} \le \prod_{i\in M} \sum_{\psi_i(k_i)\ge\psi_1(N)} \frac{1}{k_i} \le \prod_{i\in M} \sum_{k_i\le\varphi_i(\psi_1(N))} \frac{1}{k_i} \le C\ln^m N,$$

где $\varphi_i(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi_i(\cdot)$, $i \in M$.

Согласно (7) и (9) имеем

$$\sum_{k\in\Gamma(N,\psi)} \prod_{i\in M} \frac{1}{k_i} \ge \sum_{\prod\limits_{i\in M}\psi_i(k_i)\ge C\prod\limits_{i\in M}\psi_i(N^{\alpha})} \prod_{i\in M} \frac{1}{k_i} \ge \prod_{i\in M} \sum_{\psi_i(k_i)\ge C\psi_i(N^{\alpha})} \frac{1}{k_i} \ge C\ln^m N.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [4, с. 42]. *Пусть четные 2π-периодические функции* $\rho_i(k_i, x_i)$, $i \in M$, *удовлетворяют условиям:*

1) $|\rho_i(k_i, x_i)| \le 2(2k_i x_i)^{\alpha}$ *при* $0 \le \alpha \le 1$, $x_i \ge 0$;

2) *для* $p_i > 0$ *и* $0 < x_i \le \pi$

$$\Big|\sum_{p_i\le k_i\le q_i} \frac{1}{k_i}\rho_i(k_i, x_i)\Big| \le C(p_i x_i)^{-1},$$

где C — абсолютная постоянная, а множество G, состоящее из точек $k \in \mathbb{N}^m$, имеет то свойство, что если $k \in G$, то множеству G принадлежат также все точки $k \in \mathbb{N}^m$, содержащиеся в кубе $\prod\limits_{i\in M}[1, k_i]$.

Тогда справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k\in G} \prod_{i\in M} \frac{\rho_i(k_i, x_i)}{k_i}\Big| \le C_m,$$

где постоянная C_m зависит только от m.

Отметим, что в случае $G = \Gamma(N, r)$ эта лемма доказана в [11].

3. *Доказательство теоремы* 1. Согласно лемме 1 при выполнении условий (3), (6) и (8) ряды (1) являются рядами Фурье суммируемых функций (которые мы условились обозначать $\mathcal{B}_{\psi_i,\beta_i}(x)$) и тем самым определены классы

$L^{\overline{\psi}}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, функции из которых имеют интегральные представления (4).

Определим на $[0, \infty)$ функцию $\lambda(t)$ следующим образом: $\lambda(t) = 1$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $\lambda(t) = 0$ при $t \ge 1$, $\lambda(t)$ является бесконечно дифференцируемой при $t \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Для приближения функций класса $L^{\overline{\psi}}_{\beta,p}$ будем использовать полиномы

$$t_N(x) = \frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}\varphi(x-u)\sum_{k\in\mathbf{N}^m}\lambda\left(\frac{\psi_1(N)}{\bar{\psi}(k)}\right)\prod_{i\in M}\psi_i(k_i)\cos(k_iu_i+\beta_i\frac{\pi}{2})\,du, \quad (18)$$

где $N \ge 1$ — некоторое число.

На основании соотношений (4) и (18) находим

$$|f(x)-t_N(x)| \le \frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}\left|\sum_{k\in\mathbf{N}^m}\left(1-\lambda\left(\frac{\psi_1(N)}{\bar{\psi}(k)}\right)\right)\prod_{i\in M}\psi_i(k_i)\cos(k_ix_i+\beta_i\frac{\pi}{2})\right|dx \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^m}\sum_{B\subset M}\int_{T^m}\left|\sum_{k\in\mathbf{N}^m}\left(1-\lambda\left(\frac{\psi_1(N)}{\bar{\psi}(k)}\right)\right)\prod_{i\in M}\psi_i(k_i)\prod_{i\in B}\sin k_ix_i\prod_{i\in M\setminus B}\cos k_ix_i\right|dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^m}\sum_{B\subset M}\mathcal{I}_B(\psi). \quad (19)$$

Применяя к последнему интегралу теорему 3, получаем

$$\mathcal{I}_B(\psi) \le C\sum_{D\subset B}F^m_D(p), \quad (20)$$

где

$$F^m_D(p) = \sum_{k\in\mathbf{N}^m}\prod_{i\in D}\frac{1}{k_i}\left(\prod_{i\in M\setminus D}\frac{1}{k_i}\sum_{\substack{l_i=k_i\\ i\in M\setminus D}}^{2k_i}\left|\Delta^{M\setminus D}\left[(1-\lambda(\eta(k_D, l_{M\setminus D})))\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\prod_{i\in D}\psi_i(k_i)\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(l_i)\right]\right|^p\right)^{1/p} = \sum_{k\in\mathbf{N}^m}\prod_{i\in D}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\prod_{i\in M\setminus D}\frac{1}{k_i}\sum_{l_i=k_i}^{2k_i}\left|\Delta^{M\setminus D}\left[(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\lambda(\eta(k_D, l_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(l_i)\right]\right|^p\Bigg)^{1/p}, \quad \eta(k_D, l_{M\setminus D}) = \frac{\psi_1(N)}{\prod_{i\in D}\bar{\psi}_i(k_i)\prod_{i\in M\setminus D}\bar{\psi}_i(l_i)}.$$

Пусть $M\setminus D = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$. Тогда

$$\left|\Delta^{M\setminus D}\left[(1-\lambda(\eta(k_D, l_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(l_i)\right]\right| \le$$

$$\le \max_{\substack{l_{j_i}\le v_{j_i}\le l_{j_i}+1\\ i=\overline{1,s}}}\left|\frac{\partial^s}{\partial v_{j_1}\partial v_{j_2}\cdots\partial v_{j_s}}\left[(1-\lambda(\eta(k_D, v_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(v_i)\right]\right|,$$

где $\eta(k_D, v_{M\setminus D}) = \dfrac{\psi_1(N)}{\prod_{i\in D}\bar{\psi}_i(k_i)\prod_{i\in M\setminus D}\bar{\psi}_i(v_i)}$, $l_i \le v_i \le l_i+1$, $i \in M\setminus D$.

Проводя дифференцирование в последнем выражении, стоящем под знаком max, и учитывая, что $|\lambda^{(n)}(\eta(k_D, v_{M\setminus D}))| \le C$ при $\eta(k_D, v_{M\setminus D}) \le 1$ и

$\lambda^{(n)}(\eta(k_D, v_{M\setminus D})) = 0$ при $\eta(k_D, v_{M\setminus D}) > 1$, находим

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial v_{j_1}\partial v_{j_2}\cdots\partial v_{j_s}}\left[(1-\lambda(\eta(k_D, v_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(v_i)\right]\right| \le$$

$$\le C\prod_{i\in M\setminus D}\left(|\psi_i'(v_i)| + \frac{|\tilde{\psi}_i'(v_i)|}{\tilde{\psi}_i(v_i)}\psi_i(v_i)\right). \tag{21}$$

Левая часть неравенства (21) обращается в нуль при $\eta(k_D, v_{M\setminus D}) \le \frac{1}{2}$. Используя условие (8) и монотонность функций $\psi_i(v_i)$, $l_i \le v_i \le l_i+1$, получаем неравенство

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial v_{j_1}\partial v_{j_2}\cdots\partial v_{j_s}}\left[(1-\lambda(\eta(k_D, v_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i(v_i)\right]\right| \le$$

$$\le C\prod_{i\in M\setminus D}\frac{\psi_i(v_i)}{v_i} \le C\prod_{i\in M\setminus D}\frac{\psi_i(l_i)}{l_i},$$

на основании которого находим

$$\left(\prod_{i\in M\setminus D}\frac{1}{k_i}\sum_{l_i=k_i}^{2k_i}\left|\Delta^{M\setminus D}[(1-\lambda(\eta(k_D, l_{M\setminus D})))\prod_{i\in M\setminus D}\psi_i'(l_i)]\right|^p\right)^{1/p} \le C\prod_{i\in M\setminus D}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}. \tag{22}$$

Так как $k_i \le l_i \le v_i \le l_i+1 \le 2k_i+1$ и согласно (7) справедливо соотношение $C_0\psi_i(t) \le \tilde{\psi}_i(3t)$, то для точек $k\in\mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяющих условию $\psi_1(N)\left(\prod_{i\in M}\tilde{\psi}_i(k_i)\right)^{-1} \le \frac{1}{2}C_0^{|M\setminus D|}$, имеем $\psi_1(N)\Big/\left(\prod_{i\in D}\tilde{\psi}_i(k_i)\prod_{i\in M\setminus D}\tilde{\psi}_i(v_i)\right) \le \frac{1}{2}$, а значит, левая часть неравенства (21) равна нулю. Если же точки $k\in\mathbb{Z}_+^m$ такие, что

$$\psi_1(N)/\overline{\overline{\psi}}(k) > \xi, \tag{23}$$

где $\xi = \frac{1}{2}C_0^{|M\setminus D|}$, то, подставляя оценку (22) в выражение $F_D^m(p)$, будем иметь

$$F_D^m(p) \le C\sum_k\prod_{i\in M}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}, \tag{24}$$

где суммирование распространяется на $k\in\mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяющие условию (23).

Вычислим сумму в правой части (24). Для этого представим ее в виде двух сумм

$$F_D^m(p) \le C\sum_{\overline{\overline{\psi}}(k)<\frac{1}{\xi}\psi_1(N)}\prod_{i\in M}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i} = C\sum_{\prod_{i\in M\setminus 1}\tilde{\psi}_i(k_i)\ge\frac{1}{\xi}\psi_1(N)}\prod_{i\in M\setminus 1}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\times$$

$$\times\sum_{\overline{\overline{\psi}}(k)<\frac{1}{\xi}\psi_1(N)}\frac{\psi_1(k_1)}{k_1} + \sum_{\prod_{i\in M\setminus 1}\tilde{\psi}_i(k_i)\ge\frac{1}{\xi}\psi_1(N)}\prod_{i\in M\setminus 1}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{\psi_1(k_1)}{k_1} =: \sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)}. \tag{25}$$

Учитывая (15), имеем

$$\sum_{\tilde{\psi}_1(k_1)<\frac{1}{\xi}\psi_1(N)\prod_{i\in M\setminus 1}(\tilde{\psi}_i(k_i))^{-1}}\frac{\psi_1(k_1)}{k_1} \le C\psi_1\left(\tilde{\varphi}_1\left(\frac{1}{\xi}\psi_1(N)\prod_{i\in M\setminus 1}\frac{1}{\tilde{\psi}_i(k_i)}\right)\right), \tag{26}$$

где $\tilde{\varphi}_1(\cdot)$ — функция, обратная к $\tilde{\psi}_1(\cdot)$. На основании соотношения (5) можно продолжить неравенство (26):

$$\leq C\psi_1(N)\prod_{i\in M\setminus 1}\frac{1}{\tilde{\psi}_i(k_i)}.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_1^{(1)} \leq C \sum_{\prod_{i\in M\setminus 1}\tilde{\psi}_i(k_i)\geq 2\psi_1(N)} \prod_{i\in M\setminus 1}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\psi_1(N)\prod_{i\in M\setminus 1}\frac{1}{\tilde{\psi}_i(k_i)} = C\psi_1(N)\times$$

$$\times \sum_{\prod_{i\in M\setminus 1}\tilde{\psi}_i(k_i)\geq 2\psi_1(N)} \prod_{i\in M\setminus 1}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i\tilde{\psi}_i(k_i)} \leq C\psi_1(N)\prod_{i\in M\setminus 1}\sum_{\tilde{\psi}_i(k_i)\geq 2\psi_1(N)}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i\tilde{\psi}_i(k_i)}. \quad (27)$$

При $i = 1, 2, \ldots, \nu$ в силу (5) имеем

$$\sum_{\tilde{\psi}_i(k_i)\geq 2\psi_1(N)}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i\tilde{\psi}_i(k_i)} \leq C\ln\tilde{\varphi}_i(2\psi_1(N)) \leq C\ln N, \quad (28)$$

а при $i = \nu+1, \nu+2, \ldots, m$

$$\sum_{\tilde{\psi}_i(k_i)\geq 2\psi_1(N)}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i\tilde{\psi}_i(k_i)} \leq C. \quad (29)$$

Из соотношений (27) – (29) следует

$$\sigma_1^{(1)} \leq C\psi_1(N)\ln^{\nu-1}N. \quad (30)$$

Учитывая (17), находим

$$\sigma_2^{(1)} \leq C \sum_{\prod_{i\in M\setminus 1}\tilde{\psi}_i(k_i)\leq 2\psi_1(N)} \prod_{i\in M\setminus 1}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}. \quad (31)$$

Таким образом, требуется вычислить $(m-1)$-мерную сумму, подобную сумме из правой части (24). Разбивая ее также на две части, с помощью подобных рассуждений получаем $(m-2)$-мерную сумму и т. д. На s-м шаге получим

$$\sum_{\prod_{i=s}^{m}\tilde{\psi}_i(k_i)\leq 2\psi_1(N)}\prod_{i=s}^{m}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i} = \sum_{\prod_{i=s+1}^{m}\tilde{\psi}_i(k_i)>2\psi_1(N)}\prod_{i=s+1}^{m}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\times$$

$$\times \sum_{\tilde{\psi}_s(k_s)\leq 2\psi_1(N)/\prod_{i=s+1}^{m}\tilde{\psi}_i(k_i)}\frac{\psi_s(k_s)}{k_s} + \sum_{\prod_{i=s+1}^{m}\tilde{\psi}_i(k_i)\leq 2\psi_1(N)}\prod_{i=s+1}^{m}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i}\sum_{k_s=1}^{\infty}\frac{\psi_s(k_s)}{k_s} =$$

$$= \sigma_1^{(s)} + \sigma_2^{(s)}.$$

Согласно (5) для $\sigma_1^{(s)}$ при $s \leq \nu$ имеем оценку

$$\sigma_1^{(s)} \leq C\psi_1(N)\prod_{i=s+1}^{m}\sum_{\tilde{\psi}_i(k_i)>2\psi_1(N)}\frac{\psi_i(k_i)}{k_i\tilde{\psi}_i(k_i)} \leq C\psi_1(N)\ln^{\nu-s}N,$$

а при $s \geq \nu+1$ — оценку: $\sigma_1^{(s)} \leq C$. Поскольку $\displaystyle\sum_{\tilde{\psi}_m(k_m)\leq 2\psi_1(N)}\frac{\psi_m(k_m)}{k_m} \leq C\psi_1(N)$, то на основании неравенств для $\sigma_1^{(s)}$ и $\sigma_2^{(s)}$ заключаем, что

$$\sigma_2^{(1)} \leq C\psi_1(N)\ln^{\nu-2}N. \quad (32)$$

Учитывая соотношения (25), (30) и (32), получаем неравенство

$$F_D^m(p) \le C\,\psi_1(N)\ln^{\nu-1}N. \tag{33}$$

Из (19), (20) и (33) следует (10).

Теперь докажем соотношение (11). Из равенств (4) и (18) следует

$$\tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1 \le \inf_{t_N \in T(N,\overline{\psi})} \| \mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) - t_N(x)\|_1 = \tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x))_1. \tag{34}$$

Рассмотрим последовательность средних арифметических ряда Фурье функции $\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x)$:

$$\sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x) = \prod_{i\in M}\frac{1}{n_i+1}\sum_{k_i=0}^{n_i} S_k(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x) = \frac{1}{\pi^m}\int_{T^m}\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(t)\,\mathcal{K}_n(t-x)\,dt =$$

$$= \prod_{i\in M}\sum_{k_i=1}^{n_i}\psi_i(k_i)\Big(1-\frac{k_i}{n_i+1}\Big)\cos\Big(k_ix_i+\beta_i\frac{\pi}{2}\Big) = \mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) * \mathcal{K}_n(x),$$

где $\mathcal{K}_n(t) = \prod_{i\in M}\frac{1}{2(n_i+1)}\left(\frac{\sin(n_i+1)\frac{t_i}{2}}{\sin\frac{t_i}{2}}\right)^2 = \prod_{i\in M}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k_i=1}^{n_i}\Big(1-\frac{k_i}{n_i+1}\Big)\cos k_it_i\right)$.

Так как $\pi^{-m}\int_{T^m}\mathcal{K}_n(t)\,dt = 1$, то, очевидно, $\sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};\cdot) \in L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1}$, кроме того [12, с. 457], при $\min\limits_{i\in M} n_i \to \infty$

$$\|\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) - \sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x)\|_1 \to 0.$$

Пусть $\min\limits_{i\in M} n_i > N$. Тогда

$$\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1 = \inf_{t_N\in T(N,\overline{\psi})}\|\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) - t_N(x)\|_1 \le \|\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) - \sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x)\|_1 +$$

$$+ \inf_{t_N\in T(N,\overline{\psi})}\|\sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x) - t_N(x)\|_1 \le \|\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x) - \sigma_n(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}};x)\|_1 + \tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1.$$

Переходя к пределу при $\min\limits_{i\in M} n_i \to \infty$ в этом неравенстве, получаем

$$\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1 \le \tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует

$$\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1 = \tilde{E}_N(L^{\overline{\psi}}_{\overline{\beta},1})_1. \tag{36}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если функции* $\psi_i(\cdot)$, $\bar{\psi}_i(\cdot)$, $i\in M$, *удовлетворяют условиям* (2), (3), (5) – (8) *и* (9), *то*

$$\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1 \asymp \psi_1(N)\ln^{\nu-1}N.$$

Доказательство. Из соотношений (19), (20) и (30) видно, что

$$\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1 \le C\,\psi_1(N)\ln^{\nu-1}N. \tag{37}$$

Получим оценку снизу для $\tilde{E}_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}})_1$. Для этого положим

$$P(N,\psi) = \{k\in\mathbb{N}^m:\ \psi_i(k_i) \ge \psi_1(N),\ i\in M\setminus m,\ \psi_m(k_m) \ge \psi_1(2N)\},$$

$$C_p\Gamma = C_p\Gamma(N,\psi) = P(N,\psi)\setminus\Gamma(N,\psi),\ \mu_N(x,\beta) = \sum_{k\in C_p\Gamma}\prod_{i\in M} a(k_i,x_i,\beta_i)k_j^{-1}.$$

где

$$a(k_i, x_i, \beta_i) = \frac{1}{2}(\cos(k_i x_i + \beta_i \frac{\pi}{2}) + \cos((k_i+1)x_i + \beta_i \frac{\pi}{2}) - \cos(2k_i x_i + \beta_i \frac{\pi}{2}) - $$
$$ - \cos((2k_i+1)x_i + \beta_i \frac{\pi}{2})).$$

Рассмотрим интеграл

$$Q = \int_{T^m} \mu_N(x, -\beta)\ \mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x)\, dx.$$

Для него справедливо неравенство (используем условие (7))

$$Q = C \sum_{k \in C_p \Gamma} \prod_{i \in M} \frac{1}{k_i} (\psi_i(k_i) + \psi_i(k_i+1) - \psi_i(2k_i) - \psi_i(2k_i+1)) \geq C \sum_{k \in C_p \Gamma} \prod_{i \in M} \frac{\psi_i(k_i)}{k_i} \geq$$
$$\geq C \sum_{\tau=1}^{N} \sum_{\psi_1(\tau+1) < \prod\limits_{i \in M \setminus m} \psi_i(k_i) \leq \psi_1(\tau)} \prod_{i \in M \setminus m} \frac{\psi_i(k_i)}{k_i} \sum_{k_m = \varphi_m(\psi_1(N)/\psi_1(\tau))}^{\varphi_m(\psi_1(2N))} \frac{\psi_m(k_m)}{k_m}, \quad (38)$$

где $\varphi_m(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi_m(\cdot)$.

Учитывая соотношение (15), из леммы 1 находим оценку

$$\sum_{k_m = \varphi_m(\psi_1(N)/\psi_1(\tau))}^{\varphi_m(\psi_1(2N))} \frac{\psi_m(k_m)}{k_m} \geq C \frac{\psi_1(N)}{\psi_1(\nu)},$$

которую подставляем в (38):

$$Q \geq C \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\psi_1(\nu+1) < \prod\limits_{i \in M \setminus m} \psi_i(k_i) \leq \psi_1(\nu)} \frac{\psi_1(\nu+1)}{\prod\limits_{i \in M \setminus m} k_i} \frac{\psi_1(N)}{\psi_1(\nu)} \geq$$
$$\geq C \psi_1(N) \sum_{\prod\limits_{i \in M \setminus m} \psi_i(k_i) \geq \psi_1(N)} \prod_{i \in M \setminus m} \frac{1}{k_i}.$$

Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что

$$Q \geq C \psi_1(N) \ln^{m-1} N. \quad (39)$$

С другой стороны,

$$Q \leq \| \mu_N(x, -\beta) \|_\infty\ E_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x))_1. \quad (40)$$

Покажем, что

$$\| \mu_N(x, -\beta) \|_\infty \leq C, \quad (41)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от N.

Поскольку выполняется неравенство

$$\| \mu_N(x, -\beta) \|_\infty \leq$$
$$\leq \left\| \sum_{k \in P(N,\psi)} \prod_{i \in M} \frac{1}{k_i} a(k_i, x_i, \beta_i) \right\|_\infty + \left\| \sum_{k \in \Gamma(N,\psi)} \prod_{i \in M} \frac{1}{k_i} a(k_i, x_i, \beta_i) \right\|_\infty,$$

то для установления (41) достаточно показать ограниченность каждого из слагаемых в правой части последнего неравенства. А этот факт следует из леммы 3, если в качестве $\rho_i(k_i, x_i)$ использовать функции $a(k_i, x_i, \beta_i)$, входящие в определение $\mu_N(x, \beta)$, а в качестве G — соответственно множества $P(N, \psi)$

и $\Gamma(N, \psi)$. На основании неравенств (39) – (41) находим

$$E_N(\mathcal{B}_{\overline{\psi},\overline{\beta}}(x))_1 \geq \psi_1(N)\ln^{m-1}N. \tag{42}$$

Из (37) и (42) следует утверждение леммы 4. Учитывая лемму 4 и равенство (36), получаем соотношение (11). Теорема доказана.

Аналогично, только без использования функций $\tilde{\psi}_i(k)$, $i \in M$, доказывается теорема 2.

Следствие. *Если функции* $\Phi_i(\cdot)$, $i \in M$, *принадлежат множеству* $\mathfrak{M}_C$ (*определение множества* $\mathfrak{M}_C$ *см. в* [2, *с.*94]) *и удовлетворяют условиям* (2), (5), *то справедлива оценка* (10), *а если, кроме того, для функций* $\psi_i(\cdot)$, $i \in M$, *выполняется еще условие* (9), *то справедливо соотношение* (11).

Это утверждение следует из того факта, что функции $\psi \in \mathfrak{M}_C$ являются выпуклыми, удовлетворяют условиям (3) и (7) по определению. Кроме того, в [2, с. 95] доказано, что для функций $\psi \in \mathfrak{M}_C$ выполняется неравенство (8).

Приведем примеры множеств функций $\psi_i(\cdot)$, $i \in M$, удовлетворяющих условиям (2), (3), (5) и (7) – (9).

Пример 1.

$$\psi_i(k) = \frac{\ln^{\delta}(k+1)}{k^{r_i}}, \quad 0 < r_1 = r_2 \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq r_{\nu+2} \leq \ldots \leq r_m, \ \delta \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Пусть

$$\psi_1(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{(s-1)k} & \text{при} \quad (s-1)^2 \leq k < s^2; \\[2mm] \dfrac{1}{(s-1)s^2} - \left(\dfrac{1}{(s-1)s^2} - \dfrac{1}{(s+1)^3}\right)\dfrac{k-s^2}{2s+1} & \text{при} \quad s^2 \leq k < (s+1)^2; \end{cases} \quad s = 2, 4, \ldots.$$

Положим $\psi_i(k) = \psi_1(k)$, если $i = \overline{2, \nu}$, и $\psi_i(k) = k^{-r_i}$, если $i = \overline{\nu+1, m}$, где $3 \leq r_{\nu+1} \leq \leq r_{\nu+2} \leq \ldots \leq r_m$.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.– Киев, 1983.– 57 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10). 2
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.– Киев: Наук. думка, 1987.– 268 с.
3. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.– 1964.— **63**, № 3.— С. 426 – 444.
4. *Темляков С. А.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1986.– **178**.– 113 с.
5. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР.– 1960.– **132**, № 5.– С. 982 – 985.
6. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки.– 1978.– **23**, № 2.– С. 213 – 222.
7. *Носенко Ю. Л.* Регулярность и аппроксимативные свойства линейных методов суммирования двойных рядов Фурье: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Донецк, 1983.–112 с.
8. *Носенко Ю. Л.* О достаточных условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Тр. 4-й Саратов. зимней школы.– Саратов Изд-во Саратов. ун-та, 1990.– Ч. 3.– С. 45 – 47.
9. *Задерей П. В.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн.– 1992.– **44**, № 3.– С. 340 – 365.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.– М. : Физматгиз, 1961.– 936 с.
11. *Теляковский С. А.* Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. журн.– 1963.– **4**, № 6.– С. 1404 – 1411.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.– М.: Мир, 1965.– Т. 2.– 538 с.

Получено 29.05.92