УДК 517.547.3

Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк (Львів. ун-т)

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ СЕРЕДНІХ КВАДРАТИЧНИХ ЛОГАРИФМІВ ДОБУТКІВ БЛЯШКЕ

Conditions of boundedness are established for square means of logarithms of the Blaschke products.

Встановлено умови обмеженості середніх квадратичних логарифмів добутків Бляшке.

Нехай D — одиничний круг,

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\overline{a}_\nu}{|a_\nu|} \frac{a_\nu - z}{1-\overline{a}_\nu z}, \quad z \in D, \quad a_\nu \in D$$

— добуток Бляшке, нулі $\{a_\nu\}$ якого задовольняють умову

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (1-|a_\nu|) < +\infty. \tag{1}$$

Нехай також

$$m_2(r, \log|B|) = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\log\left|B(re^{i\theta})\right|\right|^2 d\theta\right\}^{1/2}.$$

А. Зигмунд [1] поставив наступну задачу: описати послідовність нулів $\{a_\nu\}$, для яких функція $m_2(r, \log|B|)$ обмежена на $(0, 1)$.

Використовуючи метод рядів Фур'є для аналітичних функцій [2, 3], цю задачу розв'язали Мак-Лейн та Рубел [1]. Зокрема, ними встановлено, що умова

$$n(r, B) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right), \quad r \to 1, \tag{2}$$

де $n(r, B)$ — кількість нулів $B(z)$ в крузі радіуса r, $0 < r < 1$, є достатньою для справедливості співвідношення

$$m_2(r, \log|B|) = O(1), \quad r \to 1, \tag{3}$$

а для добутків Бляшке $B(z)$, нулі $\{a_\nu\}$ яких лежать на скінченній системі променів, умова (2) є також і необхідною для виконання (3).

Далі, клас добутків Бляшке $B(z)$, для яких виконується умова (2), будемо позначати через B_2. Нехай

$$D^* = D \setminus \bigcup_{\nu=1}^{+\infty} [a_\nu, e^{i\alpha_\nu}), \quad a_\nu = |a_\nu| e^{i\alpha_\nu}.$$

Розглянемо функцію

$$\log B(z) = \log B(0) + \int_0^z \frac{B'(\xi)}{B(\xi)} d\xi, \quad z \in D^*,$$

де інтеграл береться по відрізку $[0, z]$,

$$\log B(0) = \log|B(0)| = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \log|a_\nu| = \int_0^1 \log t \, dn(t, B).$$

З умови Бляшке (1) випливає [4, с. 260], що $(1-t)n(t,B)=o(1)$, $t\to 1$. Тому, інтегруючи частинами, одержуємо

$$\log B(0) = -\int_0^1 n(t,B)\frac{dt}{t}.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.

1. *Якщо* $n(r,B)=O((1-r)^{-\alpha})$, $r\to 1$, $0<\alpha<1/2$, *то функція* $m_2(r, \log B)$ *обмежена на* $(0, 1)$.

2. *Існують добутки Бляшке* $B(z)\in B_2$ *такі, що* $\sup\limits_{0<r<1} m_2(r, \log B) = +\infty$.

Доведення. При кожному фіксованому $r\in(0,1)$ позначимо через $\tilde{u}\left(re^{i\theta}\right)=(H*u)\left(re^{i\theta}\right)$ згортку розподілу Гільберта [5, с. 103, 107]

$$H = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -i\,\mathrm{sign}\,k\, e^{ik\varphi}, \quad \mathrm{sign}\,0 = 0,$$

з функцією $u\left(re^{i\theta}\right)=\log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|$. Тобто

$$c_k(r,\tilde{u}) = -i\ \mathrm{sign}\,k\ c_k(r,u), \quad k\in Z. \tag{4}$$

Нехай також

$$p(z) = \int_0^r \frac{dt}{t}\int_{|a|\le t} \mathrm{Re}\,\frac{z+te^{i\varphi}}{z-te^{i\varphi}}\, d\mu(a),$$

$|z|=r$, $a=|a|e^{i\varphi}$, $0<r<1$, де $\mu(a)=\sum_\nu \delta(a-a_\nu)$, $\delta(\xi)$ — функція Дірака.

Тоді [6]

$$c_0(r,\log B) = c_0(r,u),$$

$$c_k(r,\log B) = \gamma_k r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,B)}{t}\,dt, \quad k\in N,$$

$$c_{-k}(r,\log B) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_{-k}(t,B)}{t}\,dt, \quad k\in N, \tag{5}$$

де $\{\gamma_k\}$ визначаються з розвинення

$$\log B(z) = \log B(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k z^k$$

в деякому околі точки $z=0$,

$$n_k(r,B) = \sum_{|a_\nu|\le r} e^{-ik\alpha_\nu}, \quad k\in Z, \quad a_\nu = |a_\nu|\,e^{i\alpha_\nu}, \quad n_0(r,B) = n(r,B).$$

Згідно з [1],

$$c_0(r,u) = -\int_0^1 n(t,B)\frac{dt}{t},$$

$$c_k(r,u) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2k}\int_0^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] dn_k(t,B) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\int_0^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k + \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] \frac{n_k(t,B)}{t}\, dt, \quad k \in N, \tag{6}$$

$$c_{-k}(r,u) = \bar{c}_k(r,u), \quad k \in N.$$

Окрім того, оскільки

$$\operatorname{Re}\frac{re^{i\theta}+te^{i\varphi}}{re^{i\theta}-te^{i\varphi}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)},$$

то

$$c_k(r,p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}\, d\theta = \int_0^r \frac{dt}{t}\int_{|a|\le t}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{-ik\varphi}\, d\mu(a) =$$

$$= \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t,B)}{t}\, dt, \quad k \in Z. \tag{7}$$

Із співвідношень (4) – (7) випливає, що для всіх $k \in Z$, $r \in (0, 1)$, справедливо

$$c_k(r, \log B) \equiv c_k(r,u) + \bar{i}c_k(r,\tilde{u}) - ic_k(r,\tilde{p}),$$

тобто

$$\log B = u + i\tilde{u} - i\tilde{p}. \tag{8}$$

Якщо $n(r, B) \le C((1-r)^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1/2$, $0 < r < 1$, то $B \in B_2$. Тоді, з урахуванням імплікації (2) $\Rightarrow$ (3) і співвідношення

$$m_2^2(r,\tilde{u}) = m_2^2(r,u) - c_0^2(r,u) \le m_2^2(r,u) \tag{9}$$

одержуємо

$$m_2(r,\tilde{u}) = O(1), \quad r \to 1. \tag{10}$$

Далі, з умови з п. 1 випливає

$$|c_k(r,p)| \le C\frac{1}{r^k}\int_0^r \frac{t^{k-1}}{(1-t)^\alpha}\, dt, \quad k \in N.$$

Враховуючи також, що

$$\left(\frac{1}{r^k}\int_0^r \frac{t^{k-1}}{(1-t)^\alpha}\, dt\right)' = \frac{\alpha}{r^{k+1}}\int_0^r \frac{t^k}{(1-t)^{1+\alpha}}\, dt > 0,$$

маємо

$$\sup_{0<r<1}|c_{k+1}(r,\tilde{p})| = \sup_{0<r<1}|c_{k+1}(r,p)| \le C\int_0^1 t^k\,(1-t)^{-\alpha}\, dt =$$

$$= CB(k+1, 1-\alpha), \tag{11}$$

де $B(x,y)$ — бета-функція Ейлера. А оскільки (див., наприклад, [7, с. 26, 38])

$$B(k+1, 1-\alpha) \le M k^{\alpha-1}, \;\; k \in N, \quad 0 < \alpha < 1/2, \tag{12}$$

де M — деяка стала, то, враховуючи, що $c_{-k}(r, p) = \bar{c}_k(r,p)$, $k \in N$, одержуємо

$$m_2(r, \tilde{p}) = O(1), \quad r \to 1. \tag{13}$$

Тоді із співвідношень (8), (3), (10) та (13) випливає $m_2(r, \log B) = O(1)$, $r \to \to 1$. Отже, перше твердження теореми доведено.

Візьмемо тепер добуток Бляшке $B(z)$ з додатними нулями такими, що

$$\frac{A_1}{\sqrt{1-r}} \le n\,(r, B) \le \frac{A_2}{\sqrt{1-r}}$$

при деяких додатних сталих A_1, A_2. Із співвідношень (8), (9) та (13) дістаємо

$$m_2(r, \log B) \ge m_2(r, \tilde{p}) + O(1), \quad r \to 1. \tag{14}$$

Як і при встановленні нерівностей (11) та (12), одержуємо

$$\sup_{0<r<1} |c_{k+1}(r, \tilde{p})| \ge A_1 \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^{k+1}} \int_0^r \frac{t^k}{\sqrt{1-t}}\, dt = A_1 B\,(k+1, 1/2) \ge Dk^{-1/2},$$

$$k \in N,$$

де D — деяка додатна стала. Тому, враховуючи (14), маємо

$$\sup_{0<r<1} m_2(r, \log B) \ge \sup_{0<r<1} m_2(r, \tilde{p}) + \text{const} \ge \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n} \sup_{0<r<1} |c_k(r, \tilde{p})|^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ \text{const} \ge \left\{ 2\, D^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}^{1/2} + \text{const} \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

що завершує доведення теореми 1.

Позначимо $\Delta_k(r) = c_k(r, p)$, $k \in N$. Доведемо тепер такі теореми.

Теорема 2. *Нехай* $B \in B_2$. *Співвідношення* $m_2(r, \log B) = O(1)$, $r \in (0, 1)$, *виконується тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta_k(r)|^2 = O(1), \quad r \in (0, 1). \tag{15}$$

Доведення. З урахуванням (3) *достатність* умови (15) безпосередньо випливає із співвідношення

$$m_2^2(r, \log B) \le 2 \left[m_2^2(r, u) + \sum_{k=1}^{+\infty} |\Delta_k(r)|^2 \right],$$

яке, в свою чергу, є прямим наслідком співідношень (8), (9) та рівності Парсеваля для $\tilde{p}$.

Необхідність цієї умови випливає з нерівності

$$m_2(r, \tilde{p}) \le m_2(r, \log B) + m_2(r, u) + m_2(r, \tilde{u})$$

і співвідношення (9).

Нехай $\psi(r)$ — неспадна, неперервно диференційовна функція, $\psi(r) = O((1-r)^{-1/2})$, $r \to 1$. Через B_2^{ψ} позначимо клас добутків Бляшке, для яких $n(r, B) = O(\psi(r))$, $r \to 1$. Нехай також $\psi_k = \int_0^1 t^{k-1}\psi(t)\,dt$, $k \in N$, — k–ті моменти функції $\psi(t)$.

Теорема 3. *Нехай* $B \in B_2^{\psi}$. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k^2 < +\infty,$$

то

$$m_2(r, \log B) = O(1), \quad r \to 1.$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 2 та того факту, що

$$\sup_{0<r<1} |\Delta_k(r)| \le C \int_0^1 t^{k-1}\,\psi(t)\,dt,$$

при деякому $C > 0$, оскільки

$$\left(\frac{1}{r^k}\int_0^r t^{k-1}\,\psi(t)\,dt\right)' = \frac{1}{r^{k+1}}\int_0^r t^k\,d\psi(t) > 0.$$

Позначимо $\Delta_k = \int_0^1 t^{k-1}\,n(t,B)\,dt$, $k \in N$.

Наслідок. *Якщо* $B \in B_2$, *нулі добутку* B *зосереджені на одному промені, і*

$$m_2(r, \log B) = O(1), \quad r \to 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k^2 < +\infty. \tag{16}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 3, маємо

$$\sup_{0<r<1} |\Delta_k(r)| = \Delta_k(1-0) = \Delta_k,$$

оскільки правостороння похідна функції $|\Delta_k(r)|$ невід'ємна. З теореми 2 тоді випливає (16).

1. *MacLane G.R., Rubel L. A.* On the growth of Blaschke products // Canad J. Math. – 1969. – **21**. – P. 595 – 601.
2. *Rubel L. A., Taylor B. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions// Bull. Soc. Math. France. – 1968. – **96**. – P. 53 – 96.
3. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов : Выща шк., 1988. – 195 с.
4. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
5. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т .2. – 399с.
6. *Калинець Р. З., Кондратюк А. А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №7. – С. 889 – 896.
7. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 466 с.

Одержано 14.07.97