УДК 517. 938

С. А. Щеголев (Одес. ун-т)

РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ФУРЬЕ, СОДЕРЖАЩИМИ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ ПАРАМЕТРЫ

For a quasilinear second order differential system whose coefficients are represented as the Fourier series with slowly varying coefficients and frequency, under certain conditions, we prove the existence of a partial solution having similar structure. This result is obtained for the case where the characteristic equation possesses purely imaginary roots which satisfy some resonance correlation.

Для квазілінійної диференціальної системи другого порядку, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою, при певних умовах доведено існування частинного розв'язку аналогічної структури у випадку суто уявних коренів характеристичного рівняння, які задовольняють деяке резонансне співвідношення.

В настоящей роботе приведены результаты исследования систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами [1–3], представляющие собой дальнейшее развитие результатов из [4].

Введем следующие определения. Обозначим через S_m класс функций $f(t, \varepsilon)$ таких, что:

1) $f\colon G \to \mathbb{C}$, $G = \{ t \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[\}$;

2) $f \in C^m(\mathbb{R})$ по t;

3) $d^k f / dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t, \varepsilon)$, $\sup\limits_G \left| f_k^* \right| < +\infty$, $\quad 0 \le k \le m$.

Обозначим через B_m класс функций вида

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

характеризующихся свойствами:

1) $f_n \in S_m$, $\quad d^k f_n / dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t, \varepsilon))$, $\quad \| f \|_{B_m} = \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G | f_{nk} | < +\infty$;

2) $\theta = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon) d\tau$, $\quad \varphi\colon G \to \mathbb{R}$, $\quad \varphi \in S_m$, $\quad \inf\limits_{G} |\varphi| = \varphi_0 > 0$.

Очевидно, что $B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_m$.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon) x_k + f_j(t, \varepsilon.\theta) + \mu X_j(t, \varepsilon, \theta, x_1, x_2), \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$a_{jk} \in S_m, \quad f_j \in B_m, \quad x_1, x_2 \in D \subset \mathbb{C},$$

собственные значения матриц $(a_{jk}(t, \varepsilon))_{j,k=1,2}$ имеют вид $\pm i\omega(t, \varepsilon)$ $(\omega \in \mathbb{R})$, $\mu \in]0, \mu_0] \subset \mathbb{R}^+$.

В работе [4] были найдены достаточные условия существования у системы (1) частных решений классов B_k, $0 \le k \le m$, в нерезонансном случае, а именно при условии

$$\inf_G |k\omega(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2.$$

Здесь установлены признаки существования для системы (1) частных решений из классов B_k, $0 \le k \le m$, при условии

$$\omega(t,\varepsilon) = r\varphi(t,\varepsilon), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad r \neq 0. \tag{2}$$

Система (1) рассматривается при следующих допущениях:

1) $\inf\limits_G |a_{12}| > 0$;

2) функции X_1, X_2 имеют непрерывные в D частные производные до 5-го порядка включительно, и если $x_1, x_2 \in B_m$, то эти производные также из B_m.

Обозначим

$$f_{j_n}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\,\theta)\,d\theta, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и предположим выполнение следующих соотношений:

$$-(a_{22} - ir\,\varphi)f_{1r} + a_{12}f_{2r} = 0, \tag{3}$$

$$-(a_{22} + ir\,\varphi)f_{1,-r} + a_{12}f_{2,-r} = 0. \tag{4}$$

Введем

$$x_1^0 = M(t,\varepsilon)a_{12}(t,\varepsilon)\exp(-ir\,\theta(t,\varepsilon)) + N(t,\varepsilon)a_{12}(t,\varepsilon)\exp(ir\,\theta(t,\varepsilon)) +$$

$$+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ (|n|\neq|r|)}}^{\infty} \frac{\Delta_{1n}(t,\varepsilon)}{\Delta_n(t,\varepsilon)}\exp(in\,\theta(t,\varepsilon)),$$

$$x_2^0 = -M(t,\varepsilon)(ir\,\varphi(t,\varepsilon) + a_{11}(t,\varepsilon))\exp(-ir\,\theta(t,\varepsilon)) +$$

$$+ N(t,\varepsilon)(ir\,\varphi(t,\varepsilon) - a_{11}(t,\varepsilon))\exp(ir\,\theta(t,\varepsilon)) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (|n|\neq|r|)}}^{\infty} \frac{\Delta_{2n}(t,\varepsilon)}{\Delta_n(t,\varepsilon)}\exp(in\,\theta(t,\varepsilon)),$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} - in\,\varphi & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - in\,\varphi \end{vmatrix},$$

а Δ_{jn} — определители, получающиеся из Δ_n заменой j-го столбца на $\operatorname{col}(-f_{1n}, -f_{2n})$, $j = 1, 2$.

Из (2) следует

$$\inf_G |\Delta_n| \geq |r^2 - n^2|\,\varphi_0^2 \geq \varphi_0^2 > 0, \quad |n| \neq |r|.$$

Введем

$$u_j(t,\varepsilon,\theta,M,N) = X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0),$$

$$v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,M,N) = \frac{dX_j(t,\varepsilon,\theta,x_1^0,x_2^0)}{dx_k}, \quad j,k = 1, 2.$$

Функции M, N определим из системы уравнений

$$A_r(t, \varepsilon, M, N) = 0, \quad A_{-r}(t, \varepsilon, M, N) = 0, \tag{5}$$

где

$$A_s = -(a_{22} - is\varphi)P_{1s} + a_{12}P_{2s},$$

$$P_{js}(t, \varepsilon, M, N) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_j(t, \varepsilon, \theta, M, N)\exp(-is\theta)\,d\theta, \quad j = 1, 2; \ s = \pm r.$$

Обозначим

$$b_{11} = \frac{v_{11} + v_{22}}{2} - \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{22} - v_{11}) - \frac{i(\omega^2 + a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}v_{12} + \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{12} = \frac{v_{11} - v_{22}}{2} + \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11} - v_{22}) - \frac{i(a_{11} - i\omega)^2}{2\omega a_{12}}v_{12} + \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{21} = \frac{v_{11} - v_{22}}{2} - \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11} - v_{22}) + \frac{i(a_{11} - i\omega)^2}{2\omega a_{12}}v_{12} - \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{22} = \frac{v_{11} + v_{22}}{2} + \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{22} - v_{11}) + \frac{i(\omega^2 + a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}v_{12} - \frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$b_{jk} = b_{jk}(t, \varepsilon, \theta), \quad j, k = 1, 2,$$

$$b_{jkn}(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_{jk}(t, \varepsilon, \theta)\exp(-in\theta)\,d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В этих обозначениях доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть система* (1) *такова, что*:

1) *справедливы допущения* 1, 2;

2) *выполнены условия* (2) – (4);

3) *для любых* $t, \varepsilon \in G$ *система* (5) *имеет решение* $M_0(t, \varepsilon)$, $N_0(t, \varepsilon)$;

4) $\inf\limits_G |I(t, \varepsilon)| > 0$, *где*

$$I = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_r(t, \varepsilon, M_0, N_0)}{\partial M} & \dfrac{\partial A_r(t, \varepsilon, M_0, N_0)}{\partial N} \\ \dfrac{\partial A_{-r}(t, \varepsilon, M_0, N_0)}{\partial M} & \dfrac{\partial A_{-r}(t, \varepsilon, M_0, N_0)}{\partial N} \end{pmatrix};$$

5) *для матрицы*

$$B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} b_{110}(t, \varepsilon) & b_{12,-2r}(t, \varepsilon) \\ b_{21,2r}(t, \varepsilon) & b_{220}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

существует матрица $U(t, \varepsilon)$ *с коэффициентами из* S_m *такая, что*:

а) $\inf\limits_G |\det U(t, \varepsilon)| > 0$;

б) $U^{-1}BU = T(t, \varepsilon)$, *где* T — *нижняя треугольная матрица*;

6) $\inf\limits_G \left|\operatorname{Re}\lambda_j(t, \varepsilon)\right| > 0$, $j = 1, 2$, *где* λ_1, λ_2 — *собственные значения матрицы* B.

Тогда существуют $\mu^* \in \,]0, \mu_0]$, $\varepsilon_0^*(\mu) \in [0, \varepsilon_0]$ *такие, что для любых*

$\mu \in \,]0, \mu^*]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0^*(\mu)]$ *система* (1) *имеет, по крайней мере, одно частное решение из класса* B_{m-1}.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.– М.: Наука, 1974, – 504 с.
2. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.– Киев: Наук. думка, 1977. – С. 181 – 191.
3. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.– Киев: Выща шк. 1985. – 248 с.
4. *Костин А. В., Щеголев С. А.* О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 654 – 664.

Получено 03.10.96

До відома наших авторів!

Державне агентство з авторських та суміжних прав України проводить виплату авторського гонорару за видання „Українського математичного журналу" англійською мовою у США за 1997 рік.

Авторам статей потрібно надіслати за адресою:
252030, Київ 30,
вул. Б. Хмельницького, 34
ДААСП України

ДОВІДКУ-ЗАЯВУ АВТОРА:

1. Прізвище, ім'я та по батькові
2. Фамилия, имя, отчество
3. Серія, номер паспорту, ким виданий
4. Ідентифікаційний номер ______________
5. Домашня адреса (поштовий індекс, а для м. Києва — район міста)
6. Телефони — домашній та службовий
7. Мої статті опубліковані в „Українському математичному журналі" за 19 _____ рік (на кожний рік окрему довідку) №№ _______ стор. з ____ до _____
8. Належну мені суму гонорару прошу нарахувати в долларах США і перерахувати в Укрексімбанк міста _______________

Дата ________________________ 19 __________ р. <u>Підпис автора</u>

Прохання до авторів, які не отримали гонорар за статті, опубліковані в УМЖ в 1994 – 1996 рр., надіслати таку довідку-заяву до ДААСПу і отримати свій гонорар.