УДК 531.36

А. А. Мартынюк (Ин-т механики НАН Украины, Киев),
Сунь Чжень-ци (Харбин. политехн. ин-т, КНР)

О ПРАКТИЧЕСКОЙ μ-УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТАНДАРТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The problem of μ-stability of a dynamical system with delay is studied. Conditions of the practical μ-stability are established for the general case and for a quasilinear system. The conditions suggested are illustrated by an example.

Вивчається проблема μ-стійкості динамічної системи з запізненням. Встановлено умови практичної μ-стійкості для загального випадку і квазілінійної системи. Запропоновані умови ілюструються на прикладі.

Введение. Системы уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром исследованы достаточно полно (см. монографии [1, 2] и приведенную в них библиографию). Практическая устойчивость такого рода систем, насколько известно авторам, не исследовалась вовсе. Путем развития общей методологии исследования практической устойчивости движения (см. [3, 4]) в предлагаемой статье установлены некоторые достаточные условия практической μ-устойчивости стандартных систем с запаздыванием и квазилинейных систем.

Постановка задачи. Как и в [5], обозначим $C = C([-\tau, 0], R^n)$ и для всех $\varphi \in C$ определим норму $\|\varphi\| = \max\limits_{-\tau\le s\le 0} |\varphi(s)|$. Если $x \in C([-\tau, \infty], R^n)$, то $x_t \in C$ определяется соотношением $x_t(s) = x(t+s)$, $-\tau \le s \le 0$. C_H обозначает множество $\varphi \in C$, для которых $\|\varphi\| < H$.

Рассмотрим систему, движение которой моделируется дифференциальными уравнениями стандартного вида с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu X(t, x(t), x_t), \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, d/dt — правосторонняя производная, $X\colon \mathcal{T}_0 \times R^n \times C \to R^n$ — непрерывна и такая, что ограниченные множества отображаются в ограниченные множества, $\mathcal{T}_0 = [t_0, \infty)$, $t_0 \ge 0$. Предполагается, что при каждом $t_0 \in \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}_i \subseteq R$ и $\varphi \in C_H$ существует, по крайней мере, одно решение $x(t_0, \varphi, \mu)(t)$, определенное на интервале $[t_0,\ t_0 + \alpha)$, при $0 < \mu < \mu_0$. Если существует $H_1 < H$ такое, что $|x(t_0, \varphi, \mu)(t)| \le H_1$, то $\alpha = \infty$.

Предположим, что заданы оценки областей

$$S_0(t_0, \tau) \triangleq S_0(t_0 + \theta), \quad -\tau \le \theta \le 0,$$

начальных возмущений $S_0(t_0, \tau)$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$ и последующих возмущений $S(t)$, причем $S_0(t, \tau) \subset S(t)$ и $\partial S_0(t, \tau) \cap \partial S(t) = \varnothing$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$.

Определение. *Стандартная система* (1)

а) *практически* μ-*устойчива, если при любых начальных функциях* $\varphi(\theta) \in S_0(t, \theta)$ *существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что* $x(\theta, \varphi, \mu)(t) \in \operatorname{int} S(t)$ *при всех* $t \in \mathcal{T}_0$ *и* $0 < \mu < \mu_0$;

б) *равномерно практически* μ-*устойчива, если она практически* μ-*устойчива и оценка области* S_0 *не зависит от* θ.

Пусть для правой части системы (1) существует предел [1, 6]

$$\lim\left\{\left[\int_0^\theta X_0(t, x, y)\, dt\, \theta^{-1}\right] : \theta \to \infty\right\} = X_0(x, y) \tag{2}$$

б) $\|G(t,x,y_1)-G(t,x,y_2)\| \le F_2(t)\,\psi_2(\|y_1-y_2\|)$ и

$$\int_{t_1}^{t_2} F_2(t)\,dt \le F_{20}(t_2-t_1) \quad \forall\,(y_1,y_2)\in D_2, \quad x\in D_1;$$

4) *для любого* $\delta>0$ *существует* $t^*(\delta)\in \mathcal{T}_0$ *такое, что при* $t\ge t^*$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)\,G(s,\overline{x}(s),\overline{\overline{x}}_s)\,ds < -\delta\, e, \quad e=(1,\dots,1)^T\in R^n,$$

где $\overline{x}(t_0)=x(t_0)=x_0=\varphi(0)$, *и*

$$\overline{\overline{x}}_s(\theta) = \overline{\overline{x}}_s(s+\theta) = \begin{cases} x(s+\theta), & t-\tau\le s+\theta\le t_0, \quad \theta\in[-\tau,0];\\ \overline{x}(s+\theta), & s+\theta\ge t_0, \quad s\ge t_0;\end{cases}$$

5) *для любого* $t_0\le t<t^*(\delta)$ *решение* $u(t;t_0,u_0)$ *системы сравнения* (5) *удовлетворяет неравенству*

$$u(t;t_0,u_0) < \min\,(V(x)\ \textit{при}\ x\in\partial S),$$

где $u_0=\max\,(V(x_0)\ \textit{при}\ x_0\in S_0(t_0,\tau))$.

Тогда система (1) *практически* μ*-устойчива.*

Доказательство. Если утверждение теоремы 1 неверно, то для начальной функции $\varphi(\theta)$ такой, что

$$V_s(\varphi(\theta)) \le V_s(\varphi(0)), \quad \theta\in[-\tau,0], \quad s=1,2,\dots,m, \quad \varphi(0)\in S_0(t_0,\tau) \tag{8}$$

при любом $0<\mu<\mu_0$ должен существовать момент $t_1\in\mathcal{T}_0$, для которого $x(t_0,\varphi(0),\mu)(t_1)\in\partial S(t_1)$. Пусть $x(t_0,\varphi,\mu)(t)\in \operatorname{int} S(t)$ при всех $t\in[t_0,t_1]$.

С учетом неравенства (4) полная производная компонент функции V вдоль решений системы (1) оценивается неравенствами

$$\frac{dV_s(x(t))}{dt} \le \mu F_s(V_1,\dots,V_m) + \mu G(t,x(t),y(t)), \quad s=1,2,\dots,m. \tag{9}$$

Рассмотрим слабовозмущенную систему сравнения

$$\frac{du}{dt} = \mu F(u)+\mu G(t,x,y) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u(t_0) = \min\,(V(\varphi(0))\ \textit{при}\ \varphi(0)\in S_0(t_0,\tau)).$$

Представим решение системы (10) в виде

$$u(t,\mu) = r(t)+\mu\,\tilde{u}(t,\mu), \tag{11}$$

где $r(t)$ — решение задачи (6), и предположим, что

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|\Omega(u)\|}{\|u\|} = 0, \quad \Omega(u) = F(u)-S\,u. \tag{12}$$

Учитывая (12), будем рассматривать квазилинейную систему сравнения

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \mu S\overline{u} + G(t,x,y), \quad \overline{u}\,(t_0) = 0, \tag{13}$$

полученную из системы уравнений (10). Решением этой системы является функция

$$\overline{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, G(s, x(s), y(s))\, ds, \quad t \in \mathcal{T}_0, \tag{14}$$

где Φ — фундаментальная $(m \times m)$-матрица решений системы (6).

Далее оценим значение $\overline{u}(t)$ в момент $t = t_1 > t_0$. Пусть

$$\overline{u}(t_1) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_1, s)\, G(s, x(s), y(s))\, ds = I_1 + I_2 + I_3, \tag{15}$$

где

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, G(s, \overline{x}(s), \tilde{\overline{y}}(s))\, ds,$$

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) \left[G(s, x(s), y(s)) - G(s, \overline{x}(s), y(s)) \right] ds, \tag{16}$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s) \left[G(s, \overline{x}(s), y(s)) - G(s, \overline{x}(s), \tilde{\overline{y}}(s)) \right] ds.$$

Из леммы и условий теоремы 1 следует, что для $t \in [t_0, t_1]$ можно указать такое $l > 0$, что

$$\| x(t_0, \varphi_0, \mu)(t) - \overline{x}(t; t_0, x_0) \| \le \mu (t_1 - t_0) K_0 e^{N(t_1 - t_0)},$$

где K_0 то же, что в оценке (П. 1).

Для заданного $\delta > 0$ выберем

$$\mu_1 = \psi_1^{-1}\left(\frac{\delta}{4 f_1 \Phi_0} \right) \Big/ (t_1 - t_0) K_0 e^{N(t_1 - t_0)},$$

где $\Phi_0 = \sup\limits_{s \in [t_0, t_1]} \| \Phi(t, s) \|$, так, чтобы

$$I_2 < \frac{\delta}{4}(t_1 - t_0) \quad \text{при } 0 < \mu < \mu_1.$$

Заметим, что при $s \in [t_0, t_1]$ верно соотношение

$$\left\| x_s - \tilde{\overline{x}}_s \right\|_\tau = \left\| x_{s_1} - \overline{x}_{s_1} \right\|_\tau, \quad t_0 + \tau \le s \le t_1.$$

Поэтому согласно лемме имеем

$$\left\| x_s - \tilde{\overline{x}}_s \right\|_\tau \le \mu (t_1 - t_0) K_0 e^{N(t_1 - t_0)}.$$

По заданному $\delta > 0$ выберем

$$\mu_2 = \psi_2^{-1}\left(\frac{\delta}{4 f_0 \Phi_0} \right) \Big/ (t_1 - t_0) K_0 e^{N(t_1 - t_0)}$$

так, чтобы

$$I_3 < \frac{\delta}{4}(t_1 - t_0) \quad \text{при } 0 < \mu < \mu_2.$$

Пусть $\mu_3 = \min(\mu_1, \mu_2)$. Тогда из (14) – (16) следует

$$\overline{u}(t_1) < \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, s)\, G(s, x(s), \tilde{\overline{x}}_s)\, ds + \frac{\delta}{2}(t_1 - t_0) \tag{17}$$

при $0 < \mu < \mu_3$.

Для вектор-функции $V: R^n \to R_+^m$ и системы сравнения (10) вследствие принципа сравнения (см. [5]) получаем

$$V(x(t_0, \varphi_0)(t)) \le u(t; t_0, u_0) + \mu\tilde{u}(t_1, \mu). \tag{18}$$

Далее оценки для функции $V(x(t_0, \varphi_0, \mu)(t))$ будем рассматривать в двух случаях.

Случай 1. Пусть $u(t_1; t_0, u_0) < V_{\min}^{\partial S}(t_1)$. Выберем $\mu_4 > 0$ так, чтобы при $0 < \mu < \mu_4$ выполнялось неравенство

$$\mu\tilde{u}(t_1, \mu) < V_{\min}^{\partial S}(t_1) - u(t_1; t_0, u_0).$$

При этом

$$V(x(t_0, \varphi_0, \mu)(t_1)) < V_{\min}^{\partial S}(t_1). \tag{19}$$

Отсюда следует, что $x(t_0, \varphi_0, \mu)(t_1) \notin \partial S(t_1)$.

Случай 2. Пусть $u(t_1; t_0, u_0) \ge V_{\min}^{\partial S}(t_1)$. Согласно условию 4 теоремы 1 для заданного

$$\delta > \frac{u(t_1; t_0, u_0) - V_{\min}^{\partial S}(t_1)}{\mu(t_1 - t_0)}$$

существует $t^*(\delta) \in \mathcal{T}_0$ такое, что при $t \ge t^*(\delta)$ выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, G(s, \bar{x}(s), \tilde{\bar{x}}_s)\, ds < -2\delta\,(t - t_0),$$

поэтому для $t_1 \ge t^*(\delta)$ находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\, G(s, \bar{x}(s), \tilde{\bar{x}}_s)\, ds < -2\delta\,(t_1 - t_0). \tag{20}$$

Учитывая оценку (20), из неравенства (17) находим

$$\bar{u}\,(t_1) < -\frac{3}{2}\delta(t_1 - t_0). \tag{21}$$

Из (18) следует, что существует $\mu_4 > 0$ такое, что

$$\tilde{u}(t_1, \mu) < -\delta(t_1 - t_0) \quad \text{при} \quad 0 < \mu < \mu_4.$$

Далее выберем $\mu_0 = \min(\mu_3, \mu_4)$ так, чтобы

$$V(x(t_0, \varphi_0, \mu)(t_1)) \le u(t_1; t_0, u_0) - \mu\delta(t_1 - t_0) < V_{\min}^{\partial S}(t_1)$$

при $0 < \mu < \mu_4$. Тогда $x(t_0, \varphi_0, \mu)(t_1) \notin \partial S(t_1)$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$ и $0 < \mu < \mu_4$ и система (1) практически μ-устойчива. Теорема 1 доказана.

Квазилинейная система. Рассмотрим квазилинейную систему с запаздыванием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x(t) + \mu R(t, x, x_t), \tag{22}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица с элементами, непрерывными на $\mathcal{T}_0$, $R: \mathcal{T}_0 \times R^n \times C \to R^n$, $\mu > 0$ — малый параметр.

При $\mu = 0$ получаем однородную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_{t_0}(0) \tag{23}$$

и систему сравнения

$$\frac{du}{dt} = \bar{A}(t)u, \quad u(t_0) = u_0 \geq 0, \tag{24}$$

матрица $\bar{A}(t)$ которой имеет элементы

$$\bar{a}_{ij}(t) = \begin{cases} 2a_{ii}(t) + \sum\limits_{j \neq i} \left| a_{ij}(t) \right|, & i = j; \\ \left| a_{ij}(t) \right|, \quad i \neq j, & i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — элементы матрицы $A(t)$.

Известно, что решение $u(t; t_0, u_0)$ системы сравнения (24) представляется формулой

$$u(t; t_0, u_0) = \Phi(t; t_0)u_0, \tag{25}$$

где $\Phi(t; t_0)$ — фундаментальная матрица решений системы (24).

Предположим, что в определении области $S_0(t_0, \tau)$ и $S(t)$ заданы так:

$$S_0(t_0, \tau) \triangleq S_\alpha = \left\{ x \in R^n : |x_i| < \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

$$S(t) \triangleq S_\beta = \left\{ x \in R^n : |x_i| < \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\}, \quad 0 < \alpha < \beta, \tag{26}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T, \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T.$$

Обозначим $xR(t, x, x_t) = (x_1 R_1(t, x, x_t), \ldots, x_n R_n(t, x, x_t))^T$ и сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что*:

1) *существует суммируемая функция* $k(t)$ *и постоянная* k_0 *такие, что*

$$\| R(t, x, x_t) \| \leq k(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} k(t)\,dt \leq k_0(t_2 - t_1)$$

при всех $(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0$, $t_2 > t_1$;

2) *существуют функции* ψ_1, ψ_2 *принадлежащие классу* K, *суммируемые функции* $f_1(t), f_2(t)$ *и постоянные* f_{10}, f_{20} *такие, что:*

а) $\| x_1 R(t, x_1, \varphi) - x_2 R(t, x_2, \varphi) \| \leq f_1(t)\psi_1(\| x_1 - x_2 \|)$ *при всех* $(x_1, x_2) \in \in \mathcal{D}_1$, $\varphi \in \mathcal{D}_2$, $t \in \mathcal{T}_0$ *и*

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\,dt \leq f_{10}(t_2 - t_1) \quad \forall\,(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0, \quad t_2 > t_1;$$

б) $\| xR(t, x, \varphi_1) - xR(t, x, \varphi_2) \| \leq f_2(t)\psi_2(\| \varphi_1 - \varphi_2 \|)$ *при всех* $x \in \mathcal{D}_1$ *и* $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}_2$, $t \in \mathcal{T}_0$ *и*

$$\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,dt \leq f_{20}(t_2 - t_1) \quad \forall\,(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0, \quad t_2 > t_1;$$

3) *для любого* $\delta > 0$ *существует* $t^*(\delta) \in \mathcal{T}_0$ *такое, что при* $t \geq t^*(\delta)$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| \le \mu L\left[f(l)+h_1\psi_1(2M_0 l)+h_2\psi_2(2M_0 l)\right]e^{NL} = \\ = \mu L K_0 e^{NL} < \eta. \qquad (\text{П. }1)$$

Доказательство. Из уравнений (1) и (3) имеем

$$x(t)-\bar{x}(t) = \mu\int_{t_0}^{t}\left[X_0(x(s), y_s)-X_0(\bar{x}(s), y_s)\right]ds + \\ + \mu\int_{t_0}^{t}\tilde{X}(s, x(s), y_s)\,ds \quad \text{при всех } t\in[t_0, t+L].$$

Из условия 4 леммы следует

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| \le \mu N\int_{t_0}^{t}\|x(s)-\bar{x}(s)\|ds + \mu\left\|\int_{t_0}^{t}\tilde{X}(s, x(s), x_s)\,ds\right\|. \qquad (\text{П. }2)$$

Оценим второе слагаемое в неравенстве (П. 2):

$$\mu\int_{t_0}^{t}\tilde{X}(s, x(s), x_s)\,ds = \mu\sum_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\tilde{X}(s, x(s), x_s)\,ds =$$

$$= \mu\sum_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\tilde{X}(s, x(s), x_s)-\bar{X}(s, x_i, x_{t_i})\right]ds + \mu\sum_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\bar{X}(s, x_i, x_{t_i})\,ds, \qquad (\text{П. }3)$$

где $t_{i+1}-t_i=\Delta t_i$, $l\le\Delta t_i\le 2l$, $x_i=x(t_i; t_0, \varphi_0)$, $x_{t_i}=x(t_i+\theta)$, $\theta\in[-\tau, 0]$, $\varphi_0(0)=x_0$.

Из условия 1 леммы находим

$$\|x(t)-x_i\| \le \mu\int_{t_i}^{t_{i+1}}M(t)\,dt \le \mu M_0\Delta t_i, \quad t\in[t_i, t_{i+1}] \qquad (\text{П. }4)$$

и

$$\|x(t+\theta)-x(t_i+\theta)\| \le \mu M_0 2l, \quad t\in[t_i, t_{i+1}].$$

Следовательно,

$$\left\|x_t-x_{t_i}\right\| \le 2\mu M_0 l, \quad t\in[t_i, t_{i+1}].$$

Согласно условию 2 получим

$$\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\tilde{X}(s, x(s), x_s)-\tilde{X}(s, x_i, x_{t_i})\right]ds\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\tilde{X}(s, x(s), x_s)-\tilde{X}(s, x_i, x_s)\right]ds\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\tilde{X}(s, x_i, x_s)-\tilde{X}(s, x_i, x_{t_i})\right]ds\right\| \le$$

$$\le \int_{t_i}^{t_{i+1}}\psi_1(\|x-x_i\|)\,H_1(s)\,ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\psi_2\left(\left\|x_t-x_{t_i}\right\|\right)H_2(s)\,ds \le$$

$$\le \psi_1(2\mu M_0 l)\,h_1\Delta t_i + \psi_2(2\mu M_0 l)\,h_2\Delta t_i. \qquad (\text{П. }5)$$

Учитывая (П. 5), находим оценку

$$\left\| \sum_i \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\tilde{X}(s, x(s), x_s) - \tilde{X}(s, x_i, x_{t_i}) \right] ds \right\| \leq$$

$$\leq \mu \sum_i \left[h_1 \psi_1(2\mu M_0 l) + h_2 \psi_2(2\mu M_0 l) \right] \Delta t_i =$$

$$= \mu L \left[h_1 \psi_1(2\mu M_0 l) + h_2 \psi_2(2\mu M_0 l) \right]. \qquad (\text{П. } 6)$$

Чтобы оценить вторую сумму в выражении (П. 3), применим условие 3 леммы. Тогда

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \tilde{X}(s, x_i, x_{t_i}) ds \right\| \leq (t - t_0) f(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + L]$$

и для указанного выше разбиения интервала $[t_0, t_0 + L]$ получим неравенство

$$\left\| \sum_i \mu \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{X}(s, x_i, x_{t_i}) ds \right\| \leq \mu \sum_i \Delta t_i f(l) = \mu L f(l). \qquad (\text{П. } 7)$$

Учитывая (П. 3) – (П. 7), из неравенства (П. 2) получаем

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq \mu N \int_{t_0}^{t} \| x(s) - \bar{x}(s) \| ds +$$

$$+ \mu L \left[f(l) + h_1 \psi_1(2\mu M_0 l) + h_2 \psi_2(2\mu M_0 l) \right]. \qquad (\text{П. } 8)$$

Применяя к (П. 8) лемму Гронуолла – Беллмана, находим

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq \mu L \left[f(l) + h_1 \psi_1(2\mu M_0 l) + h_2 \psi_2(2\mu M_0 l) \right] e^{\mu N L}. \qquad (\text{П. } 9)$$

Так как функции f, ψ_1, ψ_2, монотонные, из (П. 9) получаем

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leq \mu L \left[f(l) + h_1 \psi_1(2 M_0 l) + h_2 \psi_2(2 M_0 l) \right] e^{NL},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Функции ψ, принадлежащие классу K, при исследовании непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием от малого параметра применялись в работе [7].

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 439 с.
2. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – Ташкент: Фан, 1971. – 279 с.
3. *Ла-Саль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
4. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 247 с.
5. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 244 с.
6. *Martynyuk A. A.* Stability analysis: nonlinear mechanics equations // Stability and Control: Theory, Methods and Appl. Ser. ISSN-1023-6155. – New York etc: Gordon and Breach Sci. Publ., 1995. – **2**. – 245 p.
7. *Фодчук В. И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, №2. – С. 273 – 279.

Получено 18.02.97