УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, С. А. Селиванова (Днепропетр. ун-т)

О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We obtain nonperiodic analogs of the known inequalities which estimate L_p-norms of intermediate derivatives of a periodic function in terms of L_∞-norms and the higher derivative of considered function.

Одержані неперіодичні аналоги відомих нерівностей, які оцінюють L_p-норми проміжних похідних періодичної функції за допомогою L_∞-норм цієї функції та її старшої похідної.

1. Пусть $G = \mathbb{R}$ или $G = \mathbb{T}_l^1 = [-l, l]$, $l > 0$, $p \in [1, \infty]$. Через $L_p(G)$ обозначим пространство функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($2l$-периодических в случае $G = \mathbb{T}_l^1$), измеримых и суммируемых с p-й степенью (существенно ограниченных, если $p = \infty$) на множестве G. Как обычно, положим

$$\|f\|_{L_p(G)} = \begin{cases} \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{x \in G} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Пространство функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, суммируемых с p-й степенью на каждом конечном отрезке, будем обозначать через $L_{p,\mathrm{loc}}$. Для заданных $p, q \in [1, \infty]$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $L_{p,q}^n(G)$ пространство функций $f \in L_p(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(n-1)}$ ($f^{(0)} = f$) и таких, что $f^{(n)} \in L_q(G)$. Ясно, что при любых $p, q \in [1, \infty]$ будет $L_{p,q}^n(\mathbb{T}_l^1) \subset L_\infty(\mathbb{R})$.

Во многих областях математики важную роль играют неравенства для норм промежуточных производных типа Ландау – Адамара – Колмогорова для функций $f \in L_{q,r}^n(G)$, которые в случае, когда G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}_l^1$, могут быть записаны в следующей мультипликативной форме:

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)} \le K \|f\|_{L_p(G)}^{\alpha} \|f^{(n)}\|_{L_r(G)}^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где $0 < k < n$, $0 < \alpha < 1$. При этом особенно важны неравенства типа (1) с неулучшаемой константой K в правой части.

В работах Ж. Адамара [1], Г. Е. Шилова [2] (для $n \le 5$) и А. Н. Колмогорова [3] (см. также [4, с. 252 – 263]) в общем случае было доказано, что при любых $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, для функций $f \in L_{\infty,\infty}^n(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

где φ_n — n-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(x) = \operatorname{sign}\sin x$.

Неравенство (2) обращается в равенство для функций вида $f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x) := \lambda^{-n}\varphi_n(\lambda x)$, так что константа

$$K = C_{n,k} := \|\varphi_{n-k}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \|\varphi_n\|^{-(1-k/n)}_{L_\infty(\mathbb{R})}$$

в неравенстве (2) неулучшаема.

Известно небольшое число случаев, когда при заданных p, q, r точная константа в неравенстве (1) известна при всех $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ (по поводу этих случаев при $G = \mathbb{R}$ см., например, комментарий В. М. Тихомирова и Г. Г. Магарил-Ильяева [5] к работе [4]). Из известных случаев, когда точная константа в (1) известна при $G = \mathbb{T}^1_l$ и всех $k < n$, отметим неравенство А. А. Лигуна [6]: при любом $p \in [1, \infty]$ для функций $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^1_l)$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{T}^1_l)} \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}^1_l)}}{\|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Неравенство (3) обращается в равенство для функций вида $f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x)$ при $\lambda = m\dfrac{\pi}{l}$, $m \in \mathbb{N}$, так что константа

$$K = C_{n,k,p,l} := \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/p} \|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}^1_l)} \|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}$$

в неравенстве (3) неулучшаема.

Точные неравенства типа (2), (3) тесно связаны со многими экстремальными задачами анализа и находят применения при их исследовании. Со многими приложениями такого рода можно ознакомиться в монографии [7] (гл. 6) и обзоре [8].

Конечно, неравенство (3) не выполняется для функций $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ без предположения об их периодичности. Цель данной заметки — показать, что тем не менее некоторые непериодические аналоги неравенства (3) имеют место. В частности, мы получим аналог неравенства (3) для почти периодических функций.

2. Пусть $1 \le p < \infty$. Для фиксированного $l > 0$ и функций $f \in L_{p,\mathrm{loc}}$ положим

$$\|f\|_{S^p_l} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}. \tag{4}$$

Кроме того, пусть для $f \in L_{p,\mathrm{loc}}$

$$\|f\|_{W^p} := \varlimsup_{l \to \infty} \|f\|_{S^p_l}. \tag{5}$$

Отметим, что с расстоянием в пространстве $L_{p,\mathrm{loc}}$, задаваемым соотношением

$$d_{S^p_l}(f, g) := \|f - g\|_{S^p_l},$$

связано определение почти периодических функций Степанова (см., например, [9] (гл. 5, § 2)), а с расстоянием вида

$$d_{W^p}(f, g) := \|f - g\|_{W^p}$$

— определение почти периодических функций Вейля [9] (гл. 5, § 12).

Имеет место следующее обобщение неравенства (3).

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$. *Тогда для любой функции* $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{W^p} \le \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{W^p}}{\|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

Неравенство (6) *является точным и обращается в равенство для любых функций вида*

$$f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x), \quad \lambda > 0.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее известное утверждение (см., например, [10, с. 16]).

Лемма 1. *Для любых чисел* $T > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\eta_{T,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R})$ *такая, что*

$$\begin{aligned} &\eta_{T,\varepsilon}(x) = 1, \quad \text{если} \quad |x| < T, \\ &\eta_{T,\varepsilon}(x) = 0, \quad \text{если} \quad |x| > T + \varepsilon, \end{aligned} \tag{7}$$

$$0 \le \eta_{T,\varepsilon}(x) \le 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$|\eta^{(m)}_{T,\varepsilon}(x)| \le K_m \varepsilon^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Если $\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = 0$, то в силу неравенства (2) $\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = 0$ для $k = 1, \ldots, n-1$, и, следовательно, неравенство (6) тривиально. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} > 0$. Зафиксируем $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$, рассмотрим функцию

$$g_{T,\varepsilon}(t) = f(t)\eta_{T,\varepsilon}(t - x)$$

и положим

$$f_{T,\varepsilon}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} g_{T,\varepsilon}(t + 2\nu(T + \varepsilon)).$$

Ясно, что $f_{T,\varepsilon}$ будет $2(T + \varepsilon)$-периодической функцией из пространства $L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. При этом, ввиду (8), будем иметь

$$\|f_{T,\varepsilon}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{10}$$

Далее,

$$\|f^{(n)}_{T,\varepsilon}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \left\| \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f^{(m)} \eta^{(n-m)}_{T,\varepsilon} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \|\eta_{T,\varepsilon}^{(n-m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \|\eta_{T,\varepsilon}^{(n-m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

Учитывая (9), видим, что существует не зависящая от f, T и $\varepsilon > 1$ константа C такая, что

$$\|f_{T,\varepsilon}^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{11}$$

Применяя теперь неравенство (3) к $2(T + \varepsilon)$-периодической функции $f_{T,\varepsilon}$ и учитывая соотношения (10), (11), для любого $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$\left(\int\limits_{|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(k)}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{T+\varepsilon}{\pi} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f_{T,\varepsilon}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|f_{T,\varepsilon}^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/n} \leq$$

$$\leq \left(\frac{T+\varepsilon}{\pi} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \times$$

$$\times \left(\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \right)^{k/n}.$$

Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$ в силу (7) будем иметь

$$\left(\frac{1}{2T} \int\limits_{|t-x|<T} |f^{(k)}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2T} \int\limits_{|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(k)}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{T+\varepsilon}{\pi} \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2T} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \times$$

$$\times \left(\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \right)^{k/n}.$$

Так как $\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} > 0$, то для любого $\delta > 0$ можно ε выбрать настолько большим, чтобы было

$$\|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < (1+\delta) \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

Для таких ε при всех $T > 0$ будет

$$\left(\frac{1}{2T} \int\limits_{|t-x|<T} |f^{(k)}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{T+\varepsilon}{2\pi T} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} (1+\delta)^{k/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$

$$\varlimsup_{T \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{|t-x|<T} |f^{(k)}(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/n} (1+\delta)^{k/n}.$$

В силу произвольности δ получаем

$$\|f^{(k)}\|_{W^p} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/p} \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|\varphi_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{1-k/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{k/n}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось учесть, что

$$\|\varphi_{n-k}\|_{W^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/p} \|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}. \tag{12}$$

3. Напомним принадлежащее Г. Бору [11] (см. также [9], гл. 1) определение равномерных почти периодических функций.

Число τ называется ε-почти периодом функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если для любого $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует такое число $l > 0$, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + l)$ длины l найдется хотя бы одно число из множества E.

Непрерывная на $\mathbb{R}$ функция f называется равномерной почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти периодов функции f.

Отметим, что если функция $f \in L_{\infty,\infty}^n$, $n \geq 2$, является равномерной почти периодической, то при любом $k = 1, \ldots, n-1$ производная $f^{(k)}$ будет равномерно непрерывной на всей числовой оси (это утверждение очевидно, например, в силу неравенства Колмогорова (2)). Но тогда (см., например, [9, с. 28]) каждая из этих производных будет равномерной почти периодической функцией.

Структура равномерных почти периодических функций описывается следующей теоремой аппроксимации [9, с. 62].

Пусть f — равномерная почти периодическая функция. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечный тригонометрический многочлен

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{i\nu_k x} \tag{13}$$

такой, что

$$\|f - P_\varepsilon\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Следующее обобщение почти периодичности предложено Г. Вейлем [12] (см. также [9], гл. 5).

Функция $f \in L_{p,\mathrm{loc}}$, $1 \le p < \infty$, называется W^p-почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $l = l(\varepsilon)$, что множество ε, S_l^p-почти периодов функции f, т. е. множество таких чисел τ, что

$$\|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_{S_l^p} < \varepsilon,$$

относительно плотно.

Для любой W^p-почти периодической функции f величина $\|f\|_{W^p}$ конечна. Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой W^p-почти периодической функции существует тригонометрический многочлен вида (13) такой, что

$$\|f - P_\varepsilon\|_{W^p} < \varepsilon.$$

Наконец, А. Безикович [13] (см. также [9], гл. 5) дал следующее определение почти периодичности.

Для $f \in L_{p,\mathrm{loc}}$ положим

$$\|f\|_{B^p} := \left(\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Функция f называется B^p-почти периодической, если существует последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ многочленов вида (13), для которой

$$\lim_{n \to \infty} \|f - P_n\|_{B^p} = 0.$$

Из приведенных определений и свойств ясно, что равномерные почти периодические функции являются W^p-почти периодическими (при любом $p \ge 1$), а W^p-почти периодические функции, в свою очередь, являются B^p-почти периодическими. Таким образом, производные $f^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n-1$, равномерных почти периодических функций $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ являются (при любом $p \ge 1$) W^p- и B^p-почти периодическими функциями, и мы получаем такое следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $p \in [1, \infty)$, $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$. *Тогда для любой равномерной почти периодической функции* $f \in L^n_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{W^p} \le \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{W^p}}{\|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}, \tag{14}$$

и тем более

$$\|f^{(k)}\|_{B^p} \le \frac{\|\varphi_{n-k}\|_{B^p}}{\|\varphi_n\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{15}$$

Неравенства (14) *и* (15) *неулучшаемы и обращаются в равенства для функций вида* $f(x) = \varphi_{\lambda,n}(x)$.

Отметим, что в дополнение к (12) справедливо равенство

$$\|\varphi_{n-k}\|_{B^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p} \|\varphi_{n-k}\|_{L_p(\mathbb{T}^1_\pi)}.$$

4. В отличие от случая $G = \mathbb{R}$ (и $G = \mathbb{R}_+$), когда показатели α при $\|f\|_{L_p(G)}$ и $1-\alpha$ при $\|f^{(n)}\|_{L_r(G)}$ жестко связаны с метриками пространств $L_p(G)$, $L_q(G)$ и $L_r(G)$, а также с числами k и n (см., например, [14]), в периодическом случае такой жесткой зависимости нет. Однако для многих важных приложений неравенств типа (1) для периодических функций в теории аппроксимации существенным является то обстоятельство, что если при некоторой функции $f(x)$ такое неравенство обращается в равенство, то соответствующее равенство сохраняется и для любой функции вида $f(mx)$, $m \in \mathbb{N}$. Но это возможно только если $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$, и следовательно, $1-\alpha = \frac{k}{n}$.

Действительно, подставляя в равенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)} = K\|f\|^{\alpha}_{L_p(G)} \|f^{(n)}\|^{1-\alpha}_{L_r(G)}$$

вместо $f(x)$ функцию $f(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$m^k \|f^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(G)} = K\|f(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(G)} \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(G)}\, m^{(1-\alpha)n},$$

и для справедливости требуемого свойства необходимо, чтобы при любом $m \in \mathbb{N}$ было $m^k = m^{(1-\alpha)n}$, т. е. $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$.

Достаточным условием для справедливости в периодическом случае при любых заданных $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, неравенства (1) с $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$ является, например, следующее условие:

$$q \le \min\{p, r\}. \tag{16}$$

Действительно, хорошо известно следующее неравенство Стейна [15] (см. также [7], § 6.3), справедливое для любого $q \ge 1$:

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{T}^1_l)} \le C_{n,k} \|f\|^{1-k/n}_{L_q(\mathbb{T}^1_l)} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_q(\mathbb{T}^1_l)} \tag{17}$$

(константа $C_{n,k}$, которая при $q = \infty$ и $q = 1$ является неулучшаемой, здесь заведомо не точна, если $1 < q < \infty$).

Теперь для того чтобы убедиться в справедливости (1) с показателями $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$ и $1 - \alpha = \frac{k}{n}$ для p, q, r, удовлетворяющих условию (16), осталось воспользоваться тем, что в силу неравенства Гельдера при $q \le p$

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{T}^1_l)} \le (2l)^{(p-q)/(pq)} \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^1_l)}.$$

Пусть теперь p, q и r таковы, что для функций $f \in L^n_{p,r}(\mathbb{T}^1_\pi)$ справедливо при $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{T}^1_\pi)} \le K_\pi \|f\|^{1-k/n}_{L_p(\mathbb{T}^1_\pi)} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_r(\mathbb{T}^1_\pi)}. \tag{18}$$

Тогда, как легко видеть, для $f \in L^n_{p,r}(\mathbb{T}^1_l)$ будет справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{T}^1_l)} \le K_\pi \left(\frac{l}{\pi}\right)^{\gamma} \|f\|^{1-k/n}_{L_p(\mathbb{T}^1_l)} \|f^{(n)}\|^{k/n}_{L_r(\mathbb{T}^1_l)}, \tag{19}$$

где для сокращения записей положено $\gamma = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)$. При этом если константа K_π в неравенстве (18) неулучшаема, то и константа $K_\pi\left(\frac{l}{\pi}\right)^\gamma$ в неравенстве (19) неулучшаема.

Для заданных $p, r \in [1, \infty]$ и $n \in \mathbb{N}$ через $W_n^{p,r}$ будем обозначать множество функций $f \in L_{p,\mathrm{loc}}$ таких, что $\|f\|_{W^p} < \infty$, $f^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(n)}\|_{W^r} < \infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p, q, r \in [1, \infty]$ таковы, что при всех $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, для функций $f \in L_{p,r}^n(\mathbb{T}_\pi^1)$ выполняется неравенство* (18) (*например, пусть $q \le \min\{p, r\}$*). *Тогда при всех $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, для функций $f \in W_n^{p,r}$ имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{W^q} \le K_\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)^\gamma \|f\|_{W^p}^{1-k/n} \|f^{(n)}\|_{W^r}^{k/n}. \tag{20}$$

При этом если константа K_π в неравенстве (18) *неулучшаема, то константа $K_\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)^\gamma$ в неравенстве* (20) *также неулучшаема.*

Доказательство. Пусть $f \in W_n^{p,r}$. Как и при доказательстве теоремы 1, фиксируя $T > 0$, $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$, свяжем с функцией f $2(T+\varepsilon)$-периодическую функцию $f_{T,\varepsilon}$. Применяя к функции $f_{T,\varepsilon}$ неравенство (19), будем иметь

$$\left(\int\limits_{|t-x|<T} |f^{(k)}(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \le \left(\int\limits_{|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(k)}(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\frac{T+\varepsilon}{\pi}\right)^\gamma K_\pi \left(\int\limits_{|t-x|<T} |f_{T,\varepsilon}(t)|^p\,dt + \int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{k}{n}\right)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{|t-x|<T} |f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\,dt + \int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\,dt\right)^{\frac{1}{r}\frac{k}{n}}.$$

Деля обе части полученного неравенства на $(2T)^{1/q}$ и учитывая определение функции $f_{T,\varepsilon}$, получаем

$$\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T} |f^{(k)}(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\gamma K_\pi \left(\frac{T+\varepsilon}{T}\right)^\gamma \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T} |f(t)|^p\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{k}{n}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T} |f^{(n)}(t)|^r\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\,dt\right)^{\frac{1}{r}\frac{k}{n}}. \tag{21}$$

Отметим, что для любой функции f такой, что $\|f\|_{W^p}$ конечна, при любом достаточно большом $\varepsilon > 0$ и любом $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(2T)^\alpha} \int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f(t)|^p\, dt = 0. \tag{22}$$

Действительно, в силу конечности $\|f\|_{W^p}$ при любом $T > 0$ и любом достаточно большом (а значит [9] (гл. 5, § 2), и при любом фиксированном) $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f(t)|^p\, dt =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_{x-T-\varepsilon}^{x-T} |f(t)|^p\, dt + \int\limits_{x+T}^{x+T+\varepsilon} |f(t)|^p\, dt \right) \le$$

$$\le 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_{x}^{x+\varepsilon} |f(t)|^p\, dt < \infty,$$

откуда и следует (22).

Докажем также, что для $f \in W_n^{p,r}$ при любом достаточно большом $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{2T} \int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\, dt = 0. \tag{23}$$

Ясно, что

$$|f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)| \le \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |f^{(m)}(t)|\, |\eta_{T,\varepsilon}^{(n-m)}(t-x)|,$$

и из свойств функции $\eta_{T,\varepsilon}$ следует, что существует зависящая только от ε константа $C > 0$ такая, что

$$|f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)| \le C \sum_{m=0}^{n} |f^{(m)}(t)|. \tag{24}$$

Кроме того, известно (см., например, [16]), что для любых фиксированных p, q, r существуют зависящие только от ε константы A и B такие, что для любых $m = 0, 1, \ldots, n-1$ на любом отрезке I_ε длины ε для функции $f \in W_n^{p,r}$ справедливо неравенство

$$\|f^{(m)}\|_{L_q(I_\varepsilon)} \le A \|f\|_{L_p(I_\varepsilon)} + B \|f^{(n)}\|_{L_r(I_\varepsilon)}. \tag{25}$$

Сопоставляя (24) и (25), нетрудно убедиться в том, что

$$\left(\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\, dt \right)^{1/r} \le$$

$$\le A_1 \left(\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p} + B_1 \left(\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon} |f^{(n)}(t)|^r\, dt \right)^{1/r},$$

где A_1 и B_1 — константы, не зависящие от T, f и x.

Поэтому

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon}|f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\,dt\right)^{1/r}\le$$

$$\le A_1\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\right)^{1/r}\left(\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+B_1\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon}|f^{(n)}(t)|^r\,dt\right)^{1/r}. \qquad (26)$$

Из (26), с учетом уже доказанного соотношения (22) и того, что $\|f^{(n)}\|_{W^r}<\infty$, следует (23).

Наконец, в силу (21) получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T}|f^{(k)}(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\le K_\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\gamma}\left(\frac{T+\varepsilon}{T}\right)^{\gamma}\times$$

$$\times\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T}|f(t)|^p\,dt+\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{k}{n}\right)}\times$$

$$\times\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int\limits_{|t-x|<T}|f^{(n)}(t)|^r\,dt+\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{2T}\int\limits_{T<|t-x|<T+\varepsilon}|f_{T,\varepsilon}^{(n)}(t)|^r\,dt\right)^{\frac{1}{r}\frac{k}{n}}.$$

Оставим $\varepsilon>0$ фиксированным и устремим $T\to\infty$. С учетом (22) и (23) это завершает доказательство неравенства (20).

Если константа K_π в неравенстве (18) является неулучшаемой, то для любого $\delta>0$ найдется функция $f_\delta\in L_{p,r}^n$ такая, что

$$\frac{\|f_\delta^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{T}_\pi^1)}}{\|f\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)}^{1-k/n}\|f^{(n)}\|_{L_r(\mathbb{T}_\pi^1)}^{k/n}}>K_\pi-\varepsilon.$$

Для доказательства второго утверждения теоремы осталось заметить, что для 2π-периодической функции f_δ

$$\|f\|_{W^p}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p}\|f\|_{L_p(\mathbb{T}_\pi^1)},$$

$$\|f^{(k)}\|_{W^q}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/q}\|f^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{T}_\pi^1)}$$

и

$$\|f^{(n)}\|_{W^r}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/r}\|f^{(n)}\|_{L_r(\mathbb{T}_\pi^1)}.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonktion et de ses dérivées // C. r. séances Soc. math. – 1914. – **41**. – P. 68–72.
2. *Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.)* О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков Моск. ун-та. – 1937. – **1**. – С. 17–27.
3. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. Моск. ун-та. Математика, кн. 3. – 1939. – **30**. – С. 3–16.
4. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
5. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Колмогоров А. Н. Избр. труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 387–389.
6. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11–40.
7. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
8. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44–66.
9. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 395 с.
10. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
11. *Bohr H.* Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I Teil: Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen // Acta math. – 1925. – **45**. – P. 29–127.
12. *Weyl H.* Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen // Math. Ann. – 1926. – **97**. – S. 338–356.
13. *Besicovitch A.* On generalised almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. (2). – 1926. – **25**. – P. 495–512.
14. *Габушин В. Н.* Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. – 1970. – **8**, № 5. – С. 551–562.
15. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, № 3. – P. 582–592.
16. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Исслед. по теории диф. функций многих переменных и ее приложения (Тр. Мат. ин-та АН СССР, т. 173). – М.: Наука, 1986. – Ч. II. – С. 38–50.

Получено 09.12.96