УДК 517.928

Г. В. Завізіон (Кіровоград. пед. ін-т)

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

We construct an asymptotic solution of singularly perturbed homogeneous and heterogeneous systems of the integro-differential Fredholm-type equations with degenerate matrix related to a derivative.

Будується асимптотичний розв'язок сингулярно-збуреної однорідної і неоднорідної систем інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженою матрицею при похідній.

В роботах [1, 2] запропоновано методи інтегрування системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau;\varepsilon)x + f(\tau;\varepsilon)\exp\left(i\theta(\tau;\varepsilon)\right), \tag{1}$$

де $\tau = \varepsilon t$, а $(n \times n)$-вимірна матриця $A(\tau;\varepsilon)$ і вектор-функція $f(\tau;\varepsilon)$ допускають розклади

$$A(\tau;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t), \quad f(\tau;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r f_r(\tau).$$

Асимптотичний розв'язок системи (1) побудовано у випадках простих і кратних коренів характеристичного рівняння. В роботах [3, 4] одержано асимптотичні розв'язки сингулярно-збуреної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + f(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(t)\right), \tag{2}$$

де h — натуральне число; $t \in [0; L]$; $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, $f(t;\varepsilon)$ — n-вимірний вектор.

Для системи (2) окремо розглянуто випадки, коли для всіх $t \in [0; L]$ $\det B(t;0) \neq 0$ і $\det B(t;0) \equiv 0$. Показано, що при виконанні останньої умови розв'язок залежить від структури в'язки матриць $A(t;0) - \omega B(t;0)$, а також від кратності коренів характеристичного рівняння.

В даній статті будується асимптотичний розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + \rho\int_0^L K(t;s;\varepsilon)x(s;\varepsilon)\,ds + f(t;\varepsilon)\exp\left(\frac{\theta(t)}{\varepsilon^h}\right) \tag{3}$$

у випадку, коли $\det B(t;0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0; L]$, і регулярної в'язки матриць $A(t;0) - \omega B(t;0)$. Тут ε — малий параметр $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$; $t \in [0; L]$; $s \in [0; L]$; ρ — довільний параметр; $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$, $K(t;s;\varepsilon)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці; $f(t;\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, $\theta(t)$ — скалярна функція.

1. Побудова розв'язків однорідної системи у випадку простих елементарних дільників. Розглянемо однорідну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + \rho\int_0^L K(t;s;\varepsilon)x(s;\varepsilon)\,ds, \tag{4}$$

де $x(t;\varepsilon)$ — шуканий вектор.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) матриці $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$, $K(t;s;\varepsilon)$ допускають розклади за степенями малого параметра ε:

$$A(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t), \quad B(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r B_r(t),$$
$$K(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r K_r(t;s); \tag{5}$$

2) $\det B(t;0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0;L]$;

3) коефіцієнти $A_r(t)$, $B_r(t)$, $K_r(t;s)$ нескінченно диференційовні для всіх $t \in [0;L]$, $s \in [0;L]$;

4) $\det A_0(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0;L]$;

5) якщо ρ — власне значення ядра $K(t;s) = -A_0^{-1}(t)K_0(t;s)$, то $\det a_{ij} \neq 0$, де

$$a_{ij} = \int_0^L A_0^{-1}(t)\left(A_1(t)q_i(t) + \beta B_0(t)q_i'(t) + \rho\int_0^L K_1(t;\xi)q_i(\xi)\,d\xi\right)\eta_j(t)\,dt,$$

$q_i(t)$ — власні вектори ядра $K(t;s)$, а $\eta_j(t)$ — власні вектори спряженого ядра $\overline{K}(t;s)$, $i,j = \overline{1,r}$; якщо $h > 1$, то $\beta = 0$, якщо $h = 1$, то $\beta = 1$.

Припустимо, що в'язка матриць $L(t;\omega) = A_0(t) - \omega B_0(t)$ регулярна при всіх $t \in [0;L]$ і має $n-1$ простих скінченних і один нескінченний елементарні дільники $\omega_i(t) - \omega(t)$, $i = \overline{1, n-1}$. Як показано в [3], вектори $\varphi_i(t)$ і $\varphi(t)$, які задовольняють співвідношення

$$L(t;\omega)\varphi_i(t) = 0, \quad B_0(t)\varphi(t) = 0,$$

вибираються так, щоб виконувались умови

$$(B_0(t)\varphi_i(t);\, \psi_i(t)) = 1, \quad (A_0(t)\varphi(t);\, \psi(t)) = 1, \quad i = \overline{1, n-1},$$

де $\psi_i(t)$ — власні вектори матриці $\overline{L}(t;\omega)$, спряженої з $L(t;\omega)$, а $\psi(t)$ — нуль матриці $\overline{B}_0(t)$, спряженої з $B_0(t)$.

Теорема 1. *Якщо в'язка матриць $L(t;\omega(t))$ має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників і один нескінченний, а також виконуються умови $1-5$ і умова $(B_1(t)\varphi(t);\, \psi(t)) \neq 0$ для всіх $t \in [0;L]$, то система (4) має $n-1$ формальних розв'язків вигляду*

$$x(t;\varepsilon) = u(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t;\varepsilon)\,dt\right) + \rho\int_0^L p(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda(t;\varepsilon)\,dt\right)ds \tag{6}$$

і один розв'язок вигляду

$$x(t;\varepsilon) = v(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{dt}{\xi(t;\varepsilon)}\right) +$$
$$+ \rho\int_0^L q(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^s \frac{dt}{\xi(t;\varepsilon)}\right)ds, \tag{7}$$

де $u(t;\varepsilon)$, $v(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$, $q(t;s;\varepsilon)$ — *n-вимірні вектори, а* $\lambda(t;\varepsilon)$, $\xi(t;\varepsilon)$ — *скалярні функції, які допускають розклад за степенами* ε:

$$u(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r(t), \quad \lambda(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \lambda_r(t),$$

$$p(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=\alpha}^{\infty} \varepsilon^r p_r(t;s), \tag{8}$$

$$v(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r v_r(t), \quad \xi(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \xi_r(t),$$

$$q(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=\alpha}^{\infty} \varepsilon^r q_r(t;s), \tag{9}$$

причому $\alpha = 0$, *якщо знаменник Фредгольма* $D(\rho) \neq 0$ *ядра* $K(t;s)$, *або* $\alpha = -1$, *якщо* $D(\rho) = 0$.

Доведення. Покажемо, що коефіцієнти розкладів (8), (9) можна визначити так, щоб вектори (6), (7) задовольняли систему (4) в розумінні рівності формальних рядів. Доведемо спочатку твердження теореми відносно розв'язків (6), які відповідають скінченним елементарним дільникам. Підставляючи (6) в (4) і міняючи порядок інтегрування в повторному інтегралі, одержуємо

$$\left(\varepsilon^h B(t;\varepsilon)u'(t;\varepsilon) + B(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)\lambda(t;\varepsilon) - A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t;\varepsilon)\,dt\right) =$$

$$= \rho\int_0^L \left(A(t;\varepsilon)\,p(t;s;\varepsilon) + K(t;s;\varepsilon)u(s;\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t;\xi;\varepsilon)p(\xi;s;\varepsilon)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \varepsilon^h B(t;\varepsilon)\,p'(t;s;\varepsilon)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda(t;\varepsilon)\,dt\right)ds. \tag{9a}$$

Для того щоб вектор $x(t;\varepsilon)$ був формальним розв'язком системи (4), достатньо, щоб $u(t;\varepsilon)$, $\lambda(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$ задовольняли рівності

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)u'(t;\varepsilon) + B(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)\lambda(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon), \tag{10}$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)p'(t;s;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)p(t;s;\varepsilon) +$$

$$+ K(t;s;\varepsilon)u(s;\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t;\xi;\varepsilon)p(\xi;s;\varepsilon)\,d\xi, \tag{11}$$

де $p'(t;s;\varepsilon)$ — похідна функції $p(t;s;\varepsilon)$ за змінною t.

Підставляючи (8) в (10) і розв'язуючи одержану систему векторних рівнянь методом з [4], знаходимо невідомі $u_k(t)$, $\lambda_k(t)$. Для знаходження $p(t;s;\varepsilon)$ окремо розглянемо випадки, коли ρ — регулярне і власне значення ядра $K(t;s)$. У першому випадку підставляємо (8) в (11) і, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо систему інтегральних рівнянь

$$A_0(t)p_k(t;s) = f_k(t;s) - \rho\int_0^L K_0(t;\xi)p_k(\xi;s)\,d\xi, \tag{12}$$

$$f_k(t\,;s) = \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)p'_{k-i-h}(t;s) - \sum_{i=0}^{k} K_i(t;s)u_{k-i}(s) -$$

$$- \rho\int_0^L \sum_{i=1}^{k} K_i(t;\xi)\,p_{k-i}(\xi;s)\,d\xi - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\,p_{k-i}(t;s), \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Позначимо через $\Gamma(t\,;s;\rho)$ резольвенту ядра $K(t\,;s)$, тоді розв'язок (12) набуде вигляду

$$p_k(t\,;s) = A_0^{-1}(t)f_k(t;s) + \rho\int_0^L \Gamma(t;\xi;\rho)A_0^{-1}(\xi)f_k(\xi;s)\,d\xi, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

У випадку, коли ρ — власне значення ядра $K(t\,;s)$, вектори $p_{-1}(t\,;s)$, $p_k(t\,;s)$, $k = 0, 1, \ldots$, визначаються з системи інтегральних рівнянь

$$A_0(t)p_{-1}(t\,;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)\,p_{-1}(\xi;s)\,d\xi,$$

$$A_0(t)p_k(t\,;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)\,p_k(\xi;s)\,d\xi + f_k(t;s), \tag{13}$$

$$f_k(t\,;s) = -\sum_{i=1}^{k+1}\Bigg(A_i(t)p_{k-i}(t;s) - K_{i-1}(t;s)u_{k+1-i}(s) -$$

$$- \rho\int_0^L K_i(t;\xi)p_{k-i}(\xi;s)\,ds\Bigg) + \sum_{i=-1}^{k-h} B_{k-i-h}(t)p'_i(t;s).$$

Позначаючи $F_k(t\,;s) = A_0^{-1}(t)f_k(t;s)$, систему (13) запишемо у вигляді

$$p_{-1}(t\,;s) = \rho\int_0^L K(t;\xi)\,p_{-1}(\xi;s)\,d\xi, \tag{14}$$

$$p_k(t\,;s) = \rho\int_0^L K(t;\xi)\,p_k(\xi;s)\,d\xi + F_k(t;s), \qquad k = 0, 1, \ldots . \tag{15}$$

Система інтегральних рівнянь (14) має розв'язок

$$p_{-1}(t\,;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{-1i}(s)q_i(t), \tag{16}$$

де $c_{-1i}(s)$ — поки що довільні функції, $q_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, — власні вектори ядра $K(t\,;s)$.

Для того щоб рівняння (15) при $k = 0$ мало розв'язок, потрібно, щоб виконувалась умова

$$\int_0^L F_0(t;s)\eta_j(t)\,dt = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \tag{17}$$

де $\eta_j(t)$ — власні вектори спряженого інтегрального рівняння

$$\eta_j(t) = \rho\int_0^L \overline{K}(t;s)\eta_j(s)\,ds.$$

Згідно з (16) умова (17) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{r} c_{-1i}(s) a_{ij} + b_{-1j}(s) = 0, \tag{18}$$

де

$$b_{-1j}(s) = \int_0^L A_0^{-1}(t) K_0(t;s) u_0(s) \eta_j(t)\, dt, \qquad i, j = \overline{1, r}.$$

При виконанні умови 5 система (18) має єдиний розв'язок, що визначає вектор $p_{-1}(t;s)$. Розв'язок рівняння (15) при $k = 0$ запишемо у вигляді

$$p_0(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{0i}(s) q_i(t) + F_0(t;s) + \rho \int_0^L \Gamma(t;\xi;\rho) F_0(\xi;s)\, d\xi,$$

де $\Gamma(t;s;\rho)$ — резольвента ядра

$$L(t;s) = K(t;s) - \sum_{i=1}^{r} \begin{Vmatrix} \overline{\eta}_{1i}(t)\overline{q}_{1i}(s) \ldots \overline{\eta}_{1i}(t)\overline{q}_{ri}(s) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \overline{\eta}_{ri}(t)\overline{q}_{1i}(s) \ldots \overline{\eta}_{ri}(t)\overline{q}_{ri}(s) \end{Vmatrix}.$$

Функції $c_{0i}(s)$ визначаються з умови існування розв'язку рівняння (15) при $k = 1$.

Аналогічно визначаються інші коефіцієнти $p_i(t;s)$ розкладу (8) у випадку, коли ρ — власне значення ядра $K(t;s)$. Якщо вектори $p_i(t;s)$ вже визначені при $i < k$, то вектор $p_k(t;s)$ має вигляд

$$p_k(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{ki}(s) q_i(t) + F_k(t;s) + \rho \int_0^L \Gamma(t;\xi;\rho) F_k(\xi;s)\, d\xi,$$

де $c_{ki}(s)$ — невідомі функції.

Ці функції знайдемо з умови існування розв'язку рівняння при $i = k + 1$, тобто з умови

$$\int_0^L F_{k+1}(t;s) \eta_j(t)\, dt = 0, \qquad j = \overline{1, r}.$$

Ця умова рівносильна алгебраїчній системі рівнянь

$$\sum_{i=1}^{r} c_{ki}(s) a_{ij} + b_{kj}(s) = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \tag{19}$$

$$b_{kj}(s) = -\int_0^L \sum_{i=2}^{k+2} \Bigg(A_0^{-1}(t) A_i(t) p_{k+1-i}(t;s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k+1} K_{i-1}(t;s) u_{k+2-i}(s) + \rho \sum_{i=1}^{k+2} \int_0^L K_i(t;\xi) p_{k+1-i}(\xi;s)\, d\xi -$$

$$- \sum_{i=-1}^{k+1-h} B_{k+1-i-h}(t)\, p_i'(t;s) \Bigg) \eta_j(t)\, dt.$$

Згідно з умовою 5 система (19) має єдиний розв'язок, що визначає вектор $p_k(t;s)$.

Доведемо, що система (4)) має формальний розв'язок вигляду (7). Підставляючи вектор (7) в (4), одержуємо

$$B(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon) = \varepsilon\xi(t;\varepsilon)A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon) - \varepsilon^{h+1}\xi(t;\varepsilon)B(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon),$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)q'(t;s;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)q(t;s;\varepsilon) +$$

$$+ K(t;s;\varepsilon)v(s;\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t;\xi;\varepsilon)q(\xi;s;\varepsilon)\,d\xi.$$

Порівнюючи тут коефіцієнти при однакових степенях ε і враховуючи (9), одержуємо нескінченні системи рівнянь

$$B_0(t)v_0(t) = 0,$$

$$B_0(t)v_k(t) = d_k(t), \qquad k = 1, 2 \ldots, \tag{20}$$

$$A_0(t)\,q_k(t;s) = g_k(t;s) - \rho\int_0^L K_0(t;\xi)q_k(\xi;s)\,d\xi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

коли ρ — регулярне значення ядра $K(t;s)$, і

$$\begin{gathered} A_0(t)\,q_{-1}(t;s) = -\rho\int_0^L K_0(t;\xi)q_{-1}(\xi;s)\,d\xi, \\ A_0(t)\,q_k(t;s) = g_{1k}(t;s) - \rho\int_0^L K_0(t;\xi)q_k(\xi;s)\,d\xi, \end{gathered} \tag{21}$$

коли ρ — власне значення ядра $K(t;s)$. При цьому

$$d_k(t) = \xi_{k-1}(t)A_0(t)v_0(t) + \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-1-i}\xi_i(t)A_j(t)v_{k-1-i-j}(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k}B_i(t)v_{k-i}(t) - \sum_{i=0}^{k-h-1}\sum_{j=0}^{k-h-1-i}\xi_i(t)B_j(t)v'_{k-h-1-i-j}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$g_k(t;s) = \sum_{i=0}^{k-h}B_i(t)q'_{k-i-h}(s) - \sum_{i=0}^{K}K_i(t;s)v_{k-i}(s) - \sum_{i=1}^{k}A_i(t)q_{k-i}(t;s) -$$

$$- \rho\sum_{i=1}^{k}\int_0^L K_i(t;\xi)q_{k-1}(\xi;s)\,d\xi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$g_{1k}(t;s) = -\sum_{i=1}^{k+1}\left(A_i(t)q_{k-i}(t;s) - K_{i-1}(t;s)v_{k+1-i}(s) - \rho\int_0^L K_i(t;\xi)q_{k-i}(\xi;s)\,d\xi\right) +$$

$$+ \sum_{i=-1}^{k-h}B_{k+i-h}(t)q'_i(t;s), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Для послідовного визначення $v_k(t)$, $\xi_k(t)$ використовується метод з роботи [4]. Розв'язуючи системи (20), (21) таким же чином, як і системи (12), (13), одержуємо такі формули:

$$q_k(t;s) = A_0^{-1}(t)g_k(t;s) + \rho\int_0^L \Gamma(t;\xi;\rho)A_0^{-1}(\xi)g_k(\xi;s)\,d\xi, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

якщо ρ — регулярне значення ядра $K(t;s)$, і

$$q_{-1}(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{-1i}(s)q_i(t),$$

$$q_k(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{ki}(s)q_i(t) + F_{1k}(t;s) + \rho\int_0^L \Gamma_1(t;\xi;\rho)F_{1k}(\xi;s)\,d\xi,$$

де

$$F_{1k}(t;s) = A_0^{-1}(t)g_{1k}(t;s),$$

$\Gamma(t;\xi;\rho)$ і $\Gamma_1(t;\xi;\rho)$ — резольвенти відповідно ядер $K(t;s)$ і $L(t;s)$, якщо ρ — власне значення ядра $K(t;s)$. Теорему доведено.

2. Неоднорідна система рівнянь. Розглянемо питання про побудову формального частинного розв'язку системи (3). Вигляд формального розв'язку в „нерезонансному" випадку, коли функція

$$k(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

не дорівнює жодному з коренів характеристичного рівняння $\det\|A_0(t) - \omega B_0(t)\| = 0$, описується такою теоремою.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* $1-5$, *в'язка матриць* $A_0(t) - \omega B_0(t)$ *регулярна і функція* $k(t)$ *не дорівнює жодному з коренів характеристичного рівняння на* $[0;L]$, *то система* (3) *має частинний формальний розв'язок вигляду*

$$x(t;\varepsilon) = u(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(t)\right) + \rho\int_0^L p(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\theta(s)\right)ds, \tag{22}$$

де $u(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$ — *n-вимірні вектори, які мають розклад*

$$u(t;\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u_r(t;\varepsilon), \qquad p(t;s;\varepsilon) = \sum_{r=\alpha}^{\infty}\varepsilon^r p_r(t;s), \tag{23}$$

причому $\alpha = 0$, *якщо знаменник Фредгольма* $D(\rho) \neq 0$ *ядра* $K(t;s)$, *або* $\alpha = -1$, *якщо* $D(\rho) = 0$.

Доведення. Підставляючи (22) в систему (3), одержуємо систему (11) і систему

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)u'(t;\varepsilon) + B(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)k(t) = A(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \tag{24}$$

для розв'язування якої застосуємо метод з роботи [4]. Теорему доведено.

Розглянемо „резонансний" випадок, коли $k(t) = \omega_0(t)$, де $\omega_0(t)$ — корінь характеристичного рівняння. Нехай $\omega_0(t)$ — простий корінь. Позначимо через $\varphi(t)$ відповідний йому власний вектор матриці $A_0(t)$ відносно $B_0(t)$, а через $\psi(t)$ нуль матриці $(A_0(t) - \omega_0(t)B_0(t))^*$, спряженої з матрицею $A_0(t) - \omega_0(t)B_0(t)$. При цьому вибираємо $\varphi(t)$ довільно, а вектор $\psi(t)$ так, щоб виконувалось співвідношення

$$(B_0(t)\varphi(t);\psi(t)) = 1. \tag{24a}$$

Вигляд розв'язку системи (4) описується такою теоремою.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* $1-5$, *в'язка матриць* $A_0(t)-\omega B_0(t)$ *регулярна на відрізку* $[0;L]$, $k(t)=\omega_0(t)$, *де* $\omega_0(t)$ — *простий корінь характеристичного рівняння, то система рівнянь* (3) *має частинний формальний розв'язок вигляду*

$$x(t;\varepsilon) = (u(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon)+v(t;\varepsilon))\exp\left(\frac{\theta(t)}{\varepsilon^h}\right) + \\ + \rho\int_0^L (p(t;s;\varepsilon)y(s;\varepsilon)+q(t;s;\varepsilon))\exp\left(\frac{\theta(s)}{\varepsilon^h}\right)ds, \tag{25}$$

де

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon^{-h}(\lambda(t;\varepsilon)-k(t))y(t;\varepsilon) + \varepsilon^{-h}\xi(t;\varepsilon). \tag{26}$$

При цьому $u(t;\varepsilon)$, $v(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$ *і* $q(t;s;\varepsilon)$ — *n-вимірні вектори, а* $\lambda(t;\varepsilon)$ *і* $\xi(t;\varepsilon)$ — *скалярні функції, які мають формальний розклад*

$$u(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t), \quad \lambda(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k(t),$$
$$\xi(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t), \quad v(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t), \tag{27}$$
$$p(t;s;\varepsilon) = \sum_{k=\alpha}^{\infty}\varepsilon^k p_k(t;s), \quad q(t;s;\varepsilon) = \sum_{k=\alpha}^{\infty}\varepsilon^k q_k(t;s),$$

де $\alpha=0$, *якщо знаменник Фредгольма* $D(\rho)\neq 0$ *ядра* $K(t;s)$, *або* $\alpha=-1$, *якщо* $D(\rho)=0$.

Доведення. Підставляючи (25), (26) в (3), одержуємо, що вектори $u(t;\varepsilon)$, $p(t;s;\varepsilon)$ задовольняють відповідно системи (10), (11), а інші невідомі функції — такі системи алгебраїчних і інтегральних рівнянь:

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)v'(t;\varepsilon)+B(t;\varepsilon)u(t;\varepsilon)\xi(t;\varepsilon) + \\ + B(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon)k(t) = A(t;\varepsilon)v(t;\varepsilon)+f(t;\varepsilon), \tag{28}$$

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)q'(t;s;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)q(t;s;\varepsilon) + K(t;s;\varepsilon)v(s;\varepsilon) + \\ + \rho\int_0^L K(t;\xi;\varepsilon)q(\xi;s;\varepsilon)d\xi. \tag{29}$$

З теореми 1 випливає $u_0(t)=\varphi(t)$, $\lambda_0(t)=\omega_0(t)=k(t)$. Для визначення коефіцієнтів $\xi_k(t)$, $v_k(t)$ розкладів (27) порівнюємо вирази при однакових степенях ε в тотожності (28). Враховуючи (27), одержуємо систему рівнянь

$$(A_0(t)-\omega_0(t)B_0(t))v_k(t) = a_k(t), \quad k=0,1,\ldots, \tag{29a}$$

де

$$a_k(t) = \xi_k(t)B_0(t)\varphi(t)-d_k(t),$$

$$d_k(t) = f_k(t) + \sum_{i=1}^{k}A_i(t)v_{k-i}(t)-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i}\xi_i(t)B_j(t)u_{k-i-j}(t) - \\ - k(t)\sum_{i=1}^{k}B_i(t)v_{k-i}(t) - \sum_{i=0}^{k-h}B_i(t)\frac{dv_{k-i-h}(t)}{dt}.$$

Згідно з умовою існування розв'язку рівняння (29а), враховуючи (24а), маємо

$$\xi_k(t) = (d_k(t), \psi(t)), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

оскільки $d_0 = f_0(t)$ і всі наступні вектори $d_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, містять $\xi_i(t)$ і $v_i(t)$ при $i < k$. Визначаючи $\xi_k(t)$, вектор $v_k(t)$ знаходимо за формулою

$$v_k(t) = H(t) a_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де $H(t)$ — узагальнена обернена матриця до матриці $A_0(t) - \omega_0(t) B_0(t)$.

Для визначення функцій $q_k(t; \varepsilon)$ розглянемо окремо випадки, коли ρ — регулярне і власне значення ядра $K(t; s)$. Нехай ρ — регулярне значення ядра $K(t; s)$. Підставляючи (27) в (29), одержуємо систему рівнянь для визначення $q_k(t; s)$:

$$A_0(t) q_k(t; s) = -\rho \int_0^L K_0(t; \xi) q_k(\xi; s) d\xi + g_k(t; s),$$

$$g_k(t; s) = \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t) \frac{d q_{k-i-h}(t)}{dt} - \sum_{i=0}^{k} K_i(t; s) v_{k-i}(t; s) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} A_i(t) q_{k-i}(t; s) - \rho \sum_{i=1}^{k} \int_0^L K_i(t; \xi) q_{k-i}(\xi; s) d\xi.$$

Ця система рівнянь має розв'язок

$$q_k(t; s) = A_0^{-1}(t) g_k(t; s) + \rho \int_0^L \Gamma(t; \xi; \rho) A_0^{-1}(\xi) g_k(\xi; s) d\xi,$$

де $\Gamma(t; s; \rho)$ — резольвента ядра $K(t; s)$.

У випадку, коли ρ — власне значення ядра $K(t; s)$, вектори $q_{-1}(t; s)$, $q_k(t; s)$ визначаються з системи рівнянь

$$A_0(t) q_{-1}(t; s) = -\rho \int_0^L K_0(t; \xi) q_{-1}(\xi; s) d\xi,$$

$$A_0(t) q_k(t; s) = -\rho \int_0^L K_0(t; \xi) q_k(\xi; s) d\xi + g_k(t; s),$$

де

$$g_k(t; s) = -\sum_{i=1}^{k+1} \left(A_i(t) q_{k-i}(t; s) - K_{i-1}(t; s) v_{k+1-i}(s) - \rho \int_0^L K_i(t; \xi) q_{r-i}(\xi; s) d\xi \right) +$$

$$+ \sum_{i=-1}^{k-h} B_{k-i-h}(t) \frac{d q_i(t; s)}{dt}.$$

Позначаючи $F_k(t; s) = A_0^{-1}(t) g_k(t; s)$, $k = 0, 1, \ldots$, систему запишемо у вигляді

$$q_{-1}(t; s) = \rho \int_0^L K(t; \xi) q_{-1}(\xi; s) d\xi, \tag{30}$$

$$q_k(t;s) = \rho\int_0^L K(t;\xi)q_k(\xi;s)\,d\xi + F_k(t;s). \tag{31}$$

Система (30) має розв'язок

$$q_{-1}(t;s) = \sum_{i=1}^{r} c_{-1i}(s)q_i(t),$$

де $c_{-1i}(s)$ знаходяться з умови існування рівняння (31) при $k=0$. Тобто $c_{-1i}(s)$ задовольняє рівняння (18), в якому

$$b_{-1j}(s) = \int_0^L A_0^{-1}(t)K_0(t;s)v_0(s)\eta_j(t)\,dt, \qquad j=\overline{1,r}.$$

Теорему доведено.

3. Асимптотичний характер формальних розв'язків. Згідно з теоремою 1 система (4) має $n-1$ формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t;\varepsilon) = u_i(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t;\varepsilon)\,dt\right) + \rho\int_0^L p_i(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda_i(t;\varepsilon)\,dt\right)ds,$$
$$i = \overline{1,n-1}, \tag{32}$$

які відповідають скінченним елементарним дільникам, і один формальний розв'язок

$$x_n(t;\varepsilon) = v(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{dt}{\xi(t;\varepsilon)}\right) + \rho\int_0^L q(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^s \frac{dt}{\xi(t;\varepsilon)}\right)ds, \tag{33}$$

який відповідає нескінченному елементарному дільнику. Позначимо через $x_{im}(t;\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, m-ті наближення розв'язку, який одержується з формальних розв'язків (32), (33):

$$x_{im}(t;\varepsilon) = u_{im}(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right) +$$
$$+\rho\int_0^L p_{im}(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda_{im}(t;\varepsilon)\,dt\right)ds, \qquad i=\overline{1,n-1},$$
$$x_{nm}(t;\varepsilon) = v_m(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{dt}{\xi_m(t;\varepsilon)}\right) +$$
$$+\rho\int_0^L q_m(t;s;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^s \frac{dt}{\xi_m(t;\varepsilon)}\right)ds,$$

де

$$u_{im}(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k u_{ik}(t), \qquad \lambda_{im}(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\lambda_{ik}(t),$$
$$v_m(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(t), \qquad \xi_m(t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\xi_k(t).$$

Методами з робіт [4, 5] доведено теорему про асимптотичний характер формальних розв'язків у розумінні Крилова – Боголюбова – Митропольського [6].

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і функції*

$$\sum_{k=0}^{h-1} \varepsilon^k \operatorname{Re}\lambda_{ik}(t), \qquad \sum_{k=0}^{h} \varepsilon^k \operatorname{Re}\xi_k(t), \qquad i=\overline{1, n-1},$$

від'ємні при всіх $t \in [0; L]$, *то існує стала* $C > 0$, *яка не залежить від* ε, *така, що для всіх* $t \in [0; L]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, *виконуються нерівності*

$$\| x_{im}(t;\varepsilon) - \overline{x}_i(t;\varepsilon) \| \leq C\varepsilon^{m-h}$$

для розв'язків, які відповідають скінченним елементарним дільникам, і

$$\left\| x_{nm}(t;\varepsilon) - \overline{x}_n(t;\varepsilon) \right\| \leq C\varepsilon^{m-h-1}$$

для розв'язків, які відповідають нескінченним елементарним дільникам, де $\overline{x}_i(t;\varepsilon)$, $\overline{x}_n(t;\varepsilon)$, $i=\overline{1, n-1}$, *— точні розв'язки системи* (4).

Для неоднорідної системи (3) *в „нерезонансному" випадку справедлива оцінка*

$$\| x_m(t;\varepsilon) - \overline{x}(t;\varepsilon) \| \leq C\varepsilon^{m-h} \exp\left(\frac{\operatorname{Re}\theta(t)}{\varepsilon^h}\right),$$

а в „резонансному" випадку виконується нерівність

$$\| x_m(t;\varepsilon) - \overline{x}(t;\varepsilon) \| \leq C\varepsilon^{m-2h} \exp\left(\frac{\operatorname{Re}\theta(t)}{\varepsilon^h}\right),$$

де $x_m(t;\varepsilon)$ *— m-ті наближення,* $\overline{x}(t;\varepsilon)$ *— точний розв'язок системи* (3).

1. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 226 с.
2. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения // Укр. мат. журн. – 1962. – **16**, № 4. – С. 383 – 392.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989. – 287 с.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.
5. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – Киев: Выща шк., 1985. – 248 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 412 с.

Одержано 09.12.96,
після доопрацювання — 07.07.97