УДК 512.64

В. М. Прокіп, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ДО ПИТАННЯ ПРО МУЛЬТИПЛІКАТИВНІСТЬ КАНОНІЧНИХ ДІАГОНАЛЬНИХ ФОРМ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

The structure of nonsingular matrices, which possess the property that the canonical diagonal forms are multiplicative, is studied over a principal ideal domain. In particular, a necessary and sufficient condition is found for canonical diagonal forms of nonsingular matrices to be multiplicative over this principal ideal domain.

Досліджується структура неособливих матриць над областю головних ідеалів, що мають властивість мультиплікативності канонічних діагональних форм. Зокрема, встановлено необхідну та достатню умови мультиплікативності канонічних діагональних форм неособливих матриць над даною областю.

Нехай R — область головних ідеалів, тобто R — комутативне кільце з одиницею без дільників нуля, в якому кожен ідеал є головним. Нехай, далі, e — одиничний, 0 — нульовий елементи кільця R, $U(R)$ — множина оборотних елементів кільця R. Надалі через R_n позначатимемо кільце $(n \times n)$-матриць над R. Відомо [1], що для матриці $A \in R_n$ існують матриці $U, V \in GL(n, R)$ такі, що $UAV = F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$, $a_i \mid a_{i+1}$ (ділить), $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Діагональна матриця F_A називається канонічною діагональною формою (к. д. ф.) матриці A.

Матриці B і C із R_n мають властивість мультиплікативності к. д. ф., якщо к. д. ф. добутку матриць рівна добутку к. д. ф. матриць-співмножників, тобто $F_{BC} = F_B F_C$. В роботі [2] встановлено, що неособливі матриці з R_n зі взаємно простими визначниками мають властивість мультиплікативності к. д. ф. В [3] вказано більш широкий клас неособливих матриць із R_n, що мають властивість мультиплікативності к. д. ф. У даній роботі досліджується структура неособливих матриць із R_n, що мають властивість мультиплікативності к. д. ф.

Відомо [2, 4], що для неособливої матриці $A \in R_n$, $\det A \neq 0$, існує оборотна $(n \times n)$-матриця W така, що

$$AW = H_A = \| h_{ij} \|, \quad h_{ij} = 0 \text{ при } i < j,$$

— нижня трикутна матриця, причому h_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, належать повній множині неасоційованих елементів із R, а h_{ij}, $i > j$, $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$; належать повній системі лишків за модулем h_{ii}, в якій нульовий клас поданий нулем області R. Матриця H_A називається формою Ерміта (ф. Е.) матриці A.

Надалі будемо розглядати лише неособливі матриці з R_n.

Лема. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$, $\det A \neq 0$, *зображена у вигляді* $A = BC$, *де* $B, C \in R_n$ *і* $F_A = F_B F_C$. *Тоді для матриць* $U, V \in GL(n, R)$ *таких, що* $UAV = F_A$ *існує матриця* $W \in GL(n, R)$ *така, що* $UBW = F_B$ *і* $W^{-1} CV = F_C$.

Доведення. Нехай $U, V \in GL(n, R)$ такі, що $UAV = F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \mid a_{i+1}$ (ділить), $i = 1, 2, \ldots, n-1$ — к. д. ф. матриці A. Тоді $F_A = UBCV$. Для матриці $B_1 = UB$ існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що матриця

$B_1W = UBW = H_{B_1}$ — ф. Е. матриці B_1. Тепер F_A запишемо у вигляді

$$F_A = UBWW^{-1}CV = H_{B_1}G. \tag{1}$$

Враховуючи те, що F_A — діагональна, а H_{B_1} — нижня трикутна матриці, з (1) випливає, що $G = W^{-1}CV$ — нижня трикутна матриця. Тепер рівність (1) запишемо у вигляді

$$F = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = H_{B_1}G = \| h_{ij} \| \| g_{ij} \|, \tag{2}$$

де $h_{ij} = 0$, $g_{ij} = 0$ при $i < j$. Очевидно $a_i = h_{ii}g_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нехай $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ і $F_C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — к. д. ф. матриць B і C. Оскільки $U, V, W \in GL(n, R)$, то неважко переконатися в тому [1, 2], що F_B і F_C — к. д. ф. матриць H_{B_1} і G відповідно. Тоді $b_1 \mid h_{ij}$ і $c_1 \mid g_{ij}$ для всіх i та j. Отже, $h_{1j} = b_1 s_{1j}$, $g_{1j} = c_1 t_{1j}$. Оскільки $F_A = F_B F_C$, то $a_1 = b_1 c_1 = h_{11} g_{11} = b_1 c_1 s_{11} t_{11}$. Звідси $s_{11} t_{11} = e$, тобто $s_{11}, t_{11} \in U(R)$. Отже, елементи b_1 і h_{11} та c_1 і g_{11} асоційовані. Покажемо тепер, що $h_{i1} = g_{i1} = 0$ для всіх $i = 2, 3, \dots, n$. Помноживши в (2) матрицю H_{B_1} на перший стовпчик матриці G, одержимо систему рівностей

$$\begin{gathered} h_{11}g_{11} = a_1, \\ h_{21}g_{11} + h_{22}g_{21} = 0, \\ h_{31}g_{11} + h_{22}g_{21} + h_{33}g_{31} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_{n1}g_{11} + h_{n2}g_{21} + \dots + h_{n,n-1}g_{n,n-1} + h_{nn}g_{n1} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Тому що $g_{11} = c_{11}t_{11}$, $t_{11} \in U(R)$, і $c_1 \mid g_{ij}$ для всіх i, j, то, очевидно, $g_{11} \mid g_{ij}$ для всіх i та j, тобто $g_{ij} = g_{11} f_{ij}$. Тепер другу рівність із (3) запишемо так: $h_{21}g_{11} + h_{22}g_{11}f_{21} = 0$, тобто $h_{21} = -h_{22}f_{21}$. Звідси випливає $h_{22} \mid h_{21}$, що неможливо, оскільки H_{B_1} — ф. Е. матриці B_1. Отже, $h_{21} = 0$ і $g_{21} = 0$. Третю рівність із (3) запишемо таким чином: $h_{31}g_{11} + h_{33}g_{31} = 0$. Звідси, оскільки $g_{31} = g_{11}f_{31}$, маємо $h_{31} = -h_{33}f_{31}$, тобто $h_{33} \mid h_{31}$, що знову ж неможливо, оскільки H_{B_1} — ф. Е. матриці B_1. Отже, $h_{31} = 0$ і $g_{31} = 0$. Продовжуючи ці міркування для системи (3), далі одержуємо $h_{i1} = 0$ і $g_{i1} = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Тепер рівність (2) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) \operatorname{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \| h_{ij} \| \| g_{ij} \|, \end{gathered} \tag{4}$$

де $h_{ij} = 0$ і $g_{ij} = 0$ при $i < j$ та $j = 1$, $i \neq j$. Доведемо, що всі елементи h_{ij} матриці H_{B_1} і всі елементи g_{ij} матриці G, $i, j \geq 2$, в рівності (4) діляться на h_{22} і g_{22} відповідно. Розглянемо мінор другого порядку матриці H_{B_1}, утворений із елементів, що стоять на перетині першого та i-го рядків та першого та j-го стовпчиків, $i \geq 2$, $j \geq 2$. Оскільки $h_{i1} = h_{1j} = 0$, то цей мінор рівний $h_{11}h_{ij}$; F_B — к. д. ф. матриці H_{B_1}, тому цей мінор ділиться на $b_1 b_2$, тобто $(b_1 b_2) \mid (h_{11} h_{ij})$. Через те що $h_{11} = b_1 s_{11}$, $s_{11} \in U(R)$, то з останньої умови подільності маємо $b_2 \mid h_{ij}$, $i \geq 2$, $j \geq 2$. Доведення того, що g_{ij}, $i, j \geq 2$, ділиться на c_2, проводиться аналогічно. Тепер покладемо, що $h_{ij} = b_2 s_{ij}$ і $g_{ij} = c_2 t_{ij}$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Тоді з (4) маємо $a_2 = b_2 c_2 = b_2 c_2 s_{22} t_{22}$, тобто $s_{22} t_{22} = e$. Отже, h_{22} і b_2 та g_{22} і c_2 асоційовані. Оскільки $h_{22} = b_2 s_{22}$, $s_{22} \in U(R)$, то тепер неважко переконатися в тому, що $h_{22} \mid h_{ij}$, $i \geq 2$, $j \geq 2$. Доведення того, що g_{ij}, $i, j \geq 2$, ділиться на g_{22} проводиться аналогічно.

Перемножуючи тепер у рівності (4) матрицю H_{B_1} на другий стовпчик матриці G і міркуючи так само, як і при доведенні того, що $h_{i1} = g_{i1} = 0$, $i \geq 2$, одержуємо, що $h_{i3} = g_{i3} = 0$ для всіх $2 \leq i \leq n$.

Продовжуючи ці міркування далі, маємо

$$H_{B_1} = \operatorname{diag}(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}), \quad G = \operatorname{diag}(g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}).$$

Оскільки b_i і h_{ii} та c_i і g_{ii} асоційовані, тобто $h_{ii} = b_i s_{ii}$, $g_{ii} = c_i t_{ii}$, s_{ii}, $t_{ii} \in U(R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то тепер неважко переконатися в тому, що $h_{ii} \mid h_{i+1 i+1}$ і $g_{ii} \mid g_{i+1 i+1}$ (ділить), $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Отже, H_{B_1} — к. д. ф. матриці B, а G — к. д. ф. матриці C, що й доводить лему.

Враховуючи [2] та [3], з доведеної вище леми випливають такі наслідки.

***Наслідок* 1.** *Нехай $B, C \in R_n$ — неособливі матриці і $(\det B, \det C) = e$. Тоді для матриць $U, V \in GL(n, R)$ таких, що $UBCV = F_{BC}$ існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що $UBW = F_B$ і $W^{-1} CV = F_C$.*

***Наслідок* 2.** *Нехай $B, C \in R_n$ — неособливі матриці і $(\det B, \det C, d_{BC}) = e$, де d_{BC} — н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці BC. Тоді для матриць $U, V \in GL(n, R)$ таких, що $UBCV = F_{BC}$ існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що $UBW = F_B$ і $W^{-1} CV = F_C$.*

Закономірно виникає питання: коли матриці з R_n мають властивість мультиплікативності к. д. ф.? Наступна теорема дає відповідь на поставлене питання для неособливих матриць із R_n.

Теорема 1. *Нехай B і C — неособливі матриці з R_n, і*

$$F_{BC} = UBCV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i \mid a_{i+1} \quad (\text{ділить}), \tag{5}$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$, $U, V \in GL(n, R)$, — к. д. ф. добутку матриць B і C. К. д. ф. добутку BC дорівнює к. д. ф. матриць B і C відповідно, тобто $F_{BC} = F_B F_C$ тоді і тільки тоді, коли:

1. *форма Ерміта матриці $B_1 = UB$ — діагональна матриця, тобто*

$$H_{B_1} = B_1 W = UBW = \operatorname{diag}(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}), \quad W \in GL(n, R);$$

2. *$h_{ii} \mid h_{i+1 i+1}$ і $(a_i h_{i+1 i+1}) \mid (a_{i+1} h_{ii})$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (матриця U береться із співвідношення* (5)).

Доведення. *Необхідність* випливає з леми.

Достатність. Нехай

$$F_{BC} = UBCV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i \mid a_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$U, V \in GL(n, R)$ — к. д. ф. добутку неособливих матриць B і C. Оскільки ф. Е. матриці $B_1 = UB$ — діагональна матриця, то матрицю F_{BC} запишемо тепер у вигляді

$$F_{BC} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = UBCV = UBWW^{-1}CV =$$

$$= H_{B_1}W^{-1}CV = \operatorname{diag}(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn})G.$$

З останньої рівності випливає, що матриця $G = W^{-1}CV$ теж діагональна, тобто $G = \operatorname{diag}(g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn})$ і $a_i = h_{ii}g_{ii}$, $i = 1,2, \ldots, n$. Оскільки $H_{B_1} = \operatorname{diag}(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn})$ і $h_{ii} | h_{i+1i+1}$ (ділить), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то, очевидно, H_{B_1} — к. д. ф. матриці B. Оскільки $(a_i h_{i+1i+1}) | (a_{i+1}h_{ii})$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то цю умову тепер можемо записати таким чином:

$$(h_{ii}g_{ii}h_{i+1i+1}) | (h_{i+1i+1}g_{i+1i+1}h_{ii}) \quad \text{для всіх} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Звідси маємо, що $g_{ii} | g_{i+1i+1}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Отже, $G = \operatorname{diag}(g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn})$ — к. д. ф. матриці C. Теорема доведена.

Відомо [2], якщо $A = BC$, $A, B \in R_n$, то $F_B | F_A$ $(F_C | F_A)$. Нехай тепер $A, B \in R_n$. Проте не завжди з подільності $F_B | F_A$ випливає, що матриця B є дільником матриці A. Наступна теорема при певних обмеженнях встановлює умови, за яких із подільності к. д. ф. матриць $(F_B | F_A)$ випливає подільність матриці A на матрицю B.

Теорема 2. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$, $\det A \neq 0$, *ділиться зліва на матриці* $B, D \in R_n$, *тобто* $A = BC = DQ$ *і* $F_A = F_B F_C = F_D F_Q$. *Якщо к. д. ф. матриці* B *ділиться на к. д. ф. матриці* D, *тобто* $F_B = F_D G$, *то* D — *лівий дільник матриці* B, *тобто* $B = DR$ *і* $Q = RC$.

Доведення. Нехай $A = BC = DQ$. Оскільки $F_A = F_B F_C = F_D F_Q$, то на основі леми існують матриці U, V, W_1, $W_2 \in GL(n, R)$ такі, що $F_A = UAV = UBW_1W_1^{-1}CV = F_B F_Q$ і $F_A = UAV = UDW_2W_2^{-1}QV = F_D F_Q$, тобто

$$F_A = F_B F_C = F_D F_Q. \tag{6}$$

Нехай $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $F_D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — к. д. ф. матриць B і C відповідно. Оскільки $F_D | F_B$, то $b_i = d_i g_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матриць B і C відповідно. Тому що $F_D | F_B$, то $b_i = d_i g_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тобто $F_B = F_D G$. Тепер рівність (6) запишемо у вигляді

$$F_B F_C = F_D G F_C = F_D F_Q. \tag{7}$$

Помноживши рівність (7) зліва на U^{-1}, а справа на V^{-1}, одержимо

$$U^{-1}F_B F_C V^{-1} = U^{-1}F_D G F_C V^{-1} = U^{-1}F_D F_Q V^{-1}.$$

Останнє співвідношення запишемо так:

$$U^{-1}F_B W_1^{-1}W_1 F_C V^{-1} = U^{-1}F_D W_2^{-1}W_2 G W_1^{-1}F_C V^{-1} =$$

$$= U^{-1}F_D W_2^{-1}W_2 F_Q V^{-1}. \tag{8}$$

Оскільки $B = U^{-1}F_B W_1^{-1}$, $D = U^{-1}F_D W_2^{-1}$, $C = W_1 F_C V^{-1}$, $Q = W_2 F_Q V^{-1}$, то рівність (8) запишемо у вигляді $BC = DRC = DQ$, де $R = W_2 G W_1^{-1}$. Звідси випливає, що $B = DR$, і $Q = RC$. Теорема доведена.

З теореми 2 випливають такі наслідки.

Наслідок 3. (див. також [5]). *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$ *зображена у вигляді* $A = BC$, *де* $B \in R_n$ *і* $F_A = F_B F_C$. *Якщо ж для матриці* A *існує ще одне зображення* $A = B_1 C_1$, $B_1, C_1 \in R_n$, *і* $F_B = F_{B_1}$, *а* $F_C = F_{C_1}$, *то ці розклади асоційовані, тобто* $B_1 = BW$ *і* $C_1 = W^{-1} FC$, *де* $W \in GL(n, R)$.

Наслідок 4. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$, $\det A \neq 0$, *ділиться зліва на матриці* $B, D \in R_n$, *тобто* $A = BC = DQ$ *і* $(\det B, \det C) = e$, $(\det D, \det Q) = e$. *Якщо* $\det D \mid \det B$, *то* D *— лівий дільник матриці* B, *тобто* $B = DR$ *і* $Q = RC$.

Нехай $A \in R_n$ — неособлива матриця з попарно взаємно простими елементарними дільниками. Оскільки $F_A = \mathrm{diag}(e, e, \ldots, e, a)$, то, очевидно, н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці A рівний $d_A = e$. З урахуванням цього з наведених вище результатів випливають наступні твердження.

Наслідок 5. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$, *елементарні дільники якої попарно взаємно прості, зображена у вигляді* $A = BC$, *де* $B \in R_n$. *Тоді для матриць* $U, V \in GL(n, R)$ *таких, що* $UAV = F_A$ *існує матриця* $W \in GL(n, R)$ *така, що* $UBW = F_B$ *і* $W^{-1} CV = F_C$.

Наслідок 6. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$ *з попарно взаємно простими елементарними дільниками ділиться зліва на матриці* $B, D \in R_n$, *тобто* $A = BC = DQ$. *Якщо* $\det D \mid \det B$, *то* D *— лівий дільник матриці* B, *тобто* $B = DR$ *і* $Q = RC$.

Наслідок 7. *Нехай неособлива матриця* $A \in R_n$ *з попарно взаємно простими елементарними дільниками зображена у вигляді* $A = BC = B_1 C_1$, *де* B_1, $B \in R_n$. *Якщо ж визначники матриць* B *і* B_1 *асоційовані, тобто* $\det B = \det B_1 q$, $q \in U(R)$, *то матриці* B *і* B_1 *та* C *і* C_1 *теж асоційовані, тобто* $B_1 = BW$ *і* $C_1 = W^{-1} C$, *де* $W \in GL(n, R)$.

Зазначимо, що здобуті у даній роботі результати знаходять застосування в задачах про факторизацію многочленних матриць над полем і, зокрема, в питаннях про розв'язність матричних многочленних рівнянь.

1. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 424 с.
2. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p.
3. *Прокип В. М.* О мультипликативности канонических диагональных форм матриц // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 60–62.
4. *MacDuffee C. C.* The theory of matrices. – New York: Chelsea, 1959. – 108 p.
5. *Боревич З. И.* О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // Тезисы докл. III Всесоюз. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей (Тарту, сент. 1976 г.). – Тарту, 1976. – С. 19.

Одержано 13.06.94