УДК 517.53

В. Й. Горбайчук, канд. фіз.-мат. наук,
О. М. Піддубний, асп. (Волин. ун-т, Луцьк)

ПРО МАЖОРАНТИ В ТЕОРЕМІ ХАРДІ–ЛІТТЛВУДА ДЛЯ ПОХІДНИХ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Conditions on majorants are found such that the classical Hardy–Littlewood theorem for the class of analytic functions on the disk is valid in terms of derivatives of an arbitrary fixed order.

Одержано умови на мажоранту, за яких класична теорема Харді–Літтлвуда для класу аналітичних у крузі функцій справедлива в термінах похідних довільного фіксованого порядку.

Позначимо через D одиничний круг комплексної площини C. Як і в [1], зростаючу диференційовну функцію $\lambda(t)\colon\ [0,\infty)\to[0,\infty)$, $\lambda(0)=0$, будемо називати мажорантою, якщо $\lambda'(t)$ спадає. Інші означення мажоранти наведені в [2–5].

Нехай $f\colon D\to C$, $\lambda(t)$ — мажоранта. Будемо писати $f\in \mathrm{Lip}_\lambda(D)$, якщо існує стала $M<\infty$ така, що $|f(z_1)-f(z_2)|\le M\lambda(|z_1-z_2|)$ для всіх z_1, $z_2\in D$. Позначимо через $\|f\|_\lambda$ інфімум усіх таких M.

В прийнятих позначеннях класична теорема Харді–Літтлвуда стверджує, що коли f аналітична в D, $\lambda(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, і $f\in \mathrm{Lip}_\lambda(D)$, то існує стала $A>0$ така, що

$$|f'(z)|\le A\lambda'(1-|z|) \tag{1}$$

для всіх $z\in D$; стала A залежить тільки від α і $\|f\|_\lambda$ [6, 7]. В [1] доведено, що співвідношення (1) еквівалентне умові

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{\lambda(t)}{t\lambda'(t)}<\infty.$$

Постає задача: за яких умов на мажоранту відповідний результат [1] буде справедливий для похідних вищих порядків функції f. Ми одержуємо відповідь на це питання введенням регулярно монотонних мажорант. Дійсна функція називається регулярно монотонною на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку вона та всі її похідні знакосталі [8]. Мажоранту називаємо регулярно монотонною в інтервалі $(0,\infty)$, якщо $\lambda^{(k)}(t)\ne 0$ і $|\lambda^{(k)}(t)|$ спадає при $t>0$ і $k=1,2,\ldots$.

Теорема. *Для $k=1,2,\ldots$ наступні твердження еквівалентні:*

1) *якщо f аналітична в D, $\lambda(t)$ — регулярно монотонна мажоранта цієї функції в інтервалі $(0,\infty)$ і $f\in\mathrm{Lip}_\lambda(D)$, то існує стала $A>0$, яка залежить тільки від λ і $\|f\|_\lambda$ така, що для всіх $z\in D$ справедлива оцінка*

$$|f^{(k)}(z)|\le A|\lambda^{(k)}(1-|z|)|; \tag{2}$$

2) *для регулярно монотонної мажоранти $\lambda(t)$ аналітичної в D функції f справедливе співвідношення*

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{\lambda(t)}{t^k|\lambda^{(k)}(t)|}<\infty. \tag{3}$$

Зауваження. При $k=1$ одержуємо теорему 1.3 з [1].

Доведення теореми. Щоб не ускладнювати аналітичних розрахунків, проведемо доведення для випадку $k=2$. Загальний випадок розглядається аналогічно.

Доведемо спочатку, що з 2 випливає 1. Якщо виконується співвідношення (3), то існують додатні сталі t_0 і C_0 такі, що

$$\lambda(t)t^{-2} \le C_0|\lambda''(t)| \tag{4}$$

$t \in (0, t_0)$. Нерівність (4) справедлива й для всіх $t \in (0, 1]$, якщо сталу C_0 замінити на сталу $C_1 = \max\{C_0, \lambda(t_0)t_0^{-2}|\lambda''(t)|^{-1}\}$. Зафіксуємо $z \in D$ і покладемо $0 < R < 1-|z|$. Оскільки $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(D)$, то, використовуючи інтегральну формулу Коші й умову (4), маємо

$$|f''(z)| = \left|\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+Re^{i\theta})-f(z)}{R^3e^{3i\theta}}Re^{i\theta}\,i\,d\theta\right| \le 2C_1\|f\|_\lambda|\lambda''(R)|.$$

Після переходу в останній нерівності до границі при $R \to 1-|z|$, одержуємо (2) при $k=2$.

Доведемо, що з 1 випливає 2, міркуючи від супротивного. Для цього припустимо, що (3) не вірне і покажемо, що існує така функція $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(D)$, для якої твердження 1 хибне. Оскільки за припущенням

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{\lambda(t)}{t^2|\lambda''(t)|} = +\infty,$$

то існує така монотонно спадна послідовність значень $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргумента $t \in \in (0, 1]$, для якої

$$\frac{\lambda(t_j)}{t_j^2|\lambda''(t_j)|} \ge 2^{3j}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Означимо аналітичну в D функцію $f(z)$, поклавши

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}, \tag{6}$$

де $a_j = 2^{-j}\lambda(t)$, n_j — ціла частина додатного числа t_j^{-1}. Легко перевірити, що круг збіжності цього ряду одиничний. Покажемо, що таким чином побудована функція f належить $\mathrm{Lip}_\lambda(D)$. Справедлива оцінка

$$\left|z_1^l - z_2^l\right| \le \min\{2, l|z_1 - z_2|\} \tag{7}$$

для $l = 0, 1, 2, \ldots$ і довільних z_1, $z_2 \in D$. Покладаючи $t = |z_1 - z_2|$ і використовуючи (7), одержуємо оцінку

$$\sup_{z_1, z_2 \in D}\frac{\left|z_1^l - z_2^l\right|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} \le \max\left\{\sup_{0<t<2/l}\frac{lt}{\lambda(t)}, \sup_{2/l<t\le 2}\frac{2}{\lambda(t)}\right\} \le \frac{2}{\lambda(l^{-1})}. \tag{8}$$

Враховуючи (6), (8) і прийняті позначення, маємо

$$\sup_{z_1, z_2 \in D}\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sup_{z_1, z_2 \in D} \frac{\left| z_1^{n_j} - z_2^{n_j} \right|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j} \frac{\lambda(t_j)}{\lambda(1/n_j)} \leq 2,$$

оскільки $t_j \leq n_j^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Таким чином, для довільних z_1, $z_2 \in D$ справджується нерівність $|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2\lambda(|z_1 - z_2|)$. Цим доведено, що $f \in \mathrm{Lip}_\lambda(D)$.

Покажемо тепер, що для функції (6) хибним є співвідношення (2). Справді, оскільки

$$f''(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j (n_j - 1) z^{n_j - 2},$$

а супремум за підмножиною не перевищує супремуму за множиною, то маємо

$$\sup_{z \in D} \frac{|f''(z)|}{|\lambda''(1 - |z|)|} \geq \sup_{0 < r < 1} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j (n_j - 1) r^{n_j - 2}}{|\lambda''(1 - r)|} \geq$$

$$\geq \sup_{j} \sup_{0 < r < 1} \frac{a_j n_j (n_j - 1) r^{n_j - 2}}{|\lambda''(1 - r)|},$$

і тому що супремум за точковою множиною не менший значення функції (від змінної r, $0 < r < 1$) в кожній точці цієї множини, то, покладаючи $1 - r = t_j$, $r = 1 - t_j \geq 1 - n_j^{-1}$, одержуємо

$$\sup_{z \in D} \frac{|f''(z)|}{|\lambda''(1 - |z|)|} \geq \sup_{j} \frac{a_j n_j (n_j - 1) \left(1 - n_j^{-1}\right)^{n_j - 2}}{\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{e} \sup_{j} \frac{\lambda(t_j) n_j^2}{2^j \left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|} \geq \frac{1}{e} \sup_{j} \frac{\lambda(t_j)}{2^{j+2} t_j^2 |\lambda''(t_j)|} = \infty,$$

що і доводить хибність твердження 1 теореми. Теорема доведена.

1. *Nolder C. A., Oberlin D. M.* Moduli of continuity and Hardy–Littlewood theorem // Lect. Notes Math. – 1988. – **1351**. – P. 265–272.
2. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 270 с.
3. *Hinkkanen A.* On the modulus of continuity of analytic functions // Ann. Acad. Scientiarum Fennicae. Ser. A. I. Mathematica. – 1985. – **10**. – P. 247–253.
4. *Hinkkanen A.* On the majorization of analytic functions // Indiana Univ. Math. J. – 1987. – **36**, № 2. – P. 307–331.
5. *Nolder C. A.* Conjugate functions and moduli of continuity // Illinois J. Math. – 1987. – **31**, № 4. – P. 699–709.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
7. *Duren P. L.* Theory of H_p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 260 p.
8. *Бернштейн С. Н.* О некоторых свойствах регулярно монотонных функций. Сочинения. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. – С. 350–360.

Одержано 12.07.94