УДК 517.5

С. О. Чайченко (Славян. гос. пед. ун-т)

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

In generalized Lebesgue spaces with variable exponent, we determine the order of the best approximation on the classes of $(\psi;\beta)$-differentiable 2π-periodic functions. We also obtain an analog of the well-known Bernstein inequality for the $(\psi;\beta)$-derivative, with the help of which the converse theorems of approximation theory are proved on the indicated classes.

В узагальнених просторах Лебега зі змінним показником знайдено порядки найкращих наближень на класах $(\psi;\beta)$-диференційовних 2π-періодичних функцій, отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної, за допомогою якого доведено обернені теореми теорії наближення функцій на зазначених класах.

Пусть $p = p(x)$ — 2π-периодическая измеримая и существенно ограниченная функция, $L^{p(\cdot)}$ — пространства измеримых 2π-периодических функций f таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty. \tag{1}$$

Если $\underline{p} := \operatorname{ess\,inf}_x |p(x)| > 1$ и $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}_x |p(x)| < \infty$, то $L^{p(\cdot)}$ являются банаховыми пространствами [1] (см. также [2]) с нормой, которая может быть задана формулой

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\alpha > 0\colon \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}. \tag{2}$$

Пространства $L^{p(\cdot)}$ получили название обобщенных пространств Лебега с переменным показателем. Понятно, что в случае, когда $p = p(x) = \mathrm{const} > 0$, пространства $L^{p(\cdot)}$ совпадают с классическими пространствами Лебега L_p. В свою очередь, если $\bar{p} < \infty$, пространства $L^{p(\cdot)}$ являются частным случаем так называемых пространств Орлича – Муселяка [3]. Пространства Лебега с переменным показателем впервые появились в статье В. Орлича [4]. В работе [5] пространства $L^{p(\cdot)}$ рассматривались как пример более общих функциональных пространств и в дальнейшем исследовались многими авторами в разных направлениях. С основными результатами теории этих пространств можно ознакомиться, например, в работах [1, 2, 6 – 9]. Отметим также, что обобщенные пространства Лебега с переменным показателем применяются в теории упругости, механике, теории дифференциальных операторов, вариационном исчислении [10 – 12].

Приведем ряд определений и известных утверждений, необходимых при формулировке и доказательстве результатов этой работы. Важную роль в теории пространств $L^{p(\cdot)}$ играет так называемое условие Дини – Липшица, которое накладывается на показатель $p = p(x)$.

Определение 1. *Говорят, что функция $p = p(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица порядка γ, если*

$$\omega(p;\delta)\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\gamma} \le K, \quad 0 < \delta < 1, \tag{3}$$

где

$$\omega(p;\delta)=\sup_{x_1,x_2\in[-\pi;\pi]}\Big\{|p(x_1)-p(x_2)|\colon |x_1-x_2|\le\delta\Big\}.$$

Множество 2π-периодических показателей $p=p(x)>1$, $\bar p<\infty$, которые на периоде удовлетворяют условию Дини – Липшица порядка γ, будем обозначать $\mathcal{P}^\gamma$.

Теорема A. *Если $p\in\mathcal{P}^\gamma$, $\gamma\ge 1$, то для произвольной функции $f\in L^{p(\cdot)}$ выполняется оценка*

$$\|\tilde f\|_{p(\cdot)}\le c_p\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{4}$$

где $\tilde f(\cdot)$ — функция, тригонометрически сопряженная с $f(\cdot)$, а c_p — постоянная, которая зависит только от показателя $p=p(x)$.

Пусть L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций. В работе [1] показано, что в случае, когда $1<\underline{p}$, $\bar p<\infty$, пространство $L^{p'(\cdot)}$, где $p'(x)=\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, является сопряженным с $L^{p(\cdot)}$ и для произвольных функций $f\in L^{p(\cdot)}$ и $g\in L^{p'(\cdot)}$ имеет место аналог классического неравенства Гельдера

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|\,dx\le 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)},$$

из которого, в частности, следует включение $L^{p(\cdot)}\subset L$.

Пусть, далее, $f\in L$ и

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\Big)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f,x) \tag{5}$$

— ряд Фурье функции f,

$$S_n(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\Big),\quad n=0,1,\ldots, \tag{6}$$

— частные суммы Фурье порядка n этой функции.

Теорема B. *Если $p\in\mathcal{P}^\gamma$, $\gamma\ge 1$, то для произвольной функции $f\in L^{p(\cdot)}$ выполняется оценка*

$$\|S_n(f)\|_{p(\cdot)}\le c_p\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{7}$$

в которой постоянная c_p зависит только от показателя $p=p(x)$.

Теоремы A и B были получены в работе [9]. Из этих теорем, в частности, следует, что для произвольной функции $f\in L^{p(\cdot)}$ при условии $p\in\mathcal{P}^\gamma$, $\gamma\ge 1$, суммы Фурье сходятся к этой функции в метрике пространств $L^{p(\cdot)}$, т. е.

$$\|f-S_n(f)\|_{p(\cdot)}\to 0,\quad n\to\infty, \tag{8}$$

а также выполняется соотношение

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{p(\cdot)} = \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{p(\cdot)}, \tag{9}$$

в котором

$$E_n(\varphi)_{p(\cdot)} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{p(\cdot)}, \quad \varphi \in L^{p(\cdot)},$$

— наилучшее приближение функции φ с помощью подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, а $\mathcal{O}(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n. При этом условие на показатель $p \in \mathcal{P}^\gamma$, $\gamma \geq 1$, является неулучшаемым.

Далее нам понадобится определение $(\psi;\beta)$-производной и множеств L^ψ_β, которое принадлежит А. И. Степанцу [13, с. 142 – 143].

Определение 2. *Пусть $f \in L$ и (5) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и $\beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \tag{10}$$

является рядом Фурье некоторой функции из L. Эту функцию обозначают через $f^\psi_\beta(\cdot)$ $\big($или $(D^\psi_\beta f)(\cdot)\big)$ и называют $(\psi;\beta)$-производной функции $f(\cdot)$, а множество функций $f(\cdot)$, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через L^ψ_β.

В этой работе через $L^\psi_{\beta,p(\cdot)}$ будем обозначать классы $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций $f \in L$, у которых $f^\psi_\beta \in L^{p(\cdot)}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество последовательностей действительных чисел $\psi(k) > 0$, которые удовлетворяют условиям:

1) $\psi(k) - \psi(k+1) \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$;
2) $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$;
3) $\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$,

а $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi(k)}{k} < \infty$.

Тогда если $\psi \in \mathfrak{M}'$ и $\beta \in \mathbb{R}$, то, как показано в монографии [13, с. 143, 144], всегда найдется функция $f^\psi_\beta \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L\colon \varphi \perp 1\}$, ряд Фурье которой совпадает с (10). Отметим при этом, что если $f^\psi_\beta \in L^{p(\cdot)}$, $p \in \mathcal{P}^\gamma$, $\gamma \geq 1$, то на основании соотношения (8) в смысле сходимости в метрике пространств $L^{p(\cdot)}$ выполняется равенство

$$f^\psi_\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{11}$$

Из разложения (11) следуют формулы связи между коэффициентами Фурье функций f и f^ψ_β:

$$a_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f^\psi_\beta) \cos\frac{\beta\pi}{2} - b_k(f^\psi_\beta) \sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{12}$$

$$b_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f^\psi_\beta) \sin\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f^\psi_\beta) \cos\frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{13}$$

и

$$a_k(f_\beta^\psi)=\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}+b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{14}$$

$$b_k(f_\beta^\psi)=\frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}-a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{15}$$

В этой работе в метрике пространств $L^{p(\cdot)}$ будут найдены порядки наилучших приближений на классах $L^\psi_{\beta,p(\cdot)}$, а также получен аналог известного неравенства Бернштейна для $(\psi;\beta)$-производной, с помощью которого доказываются обратные теоремы теории приближения функций на классах $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f\in L^\psi_{\beta,p(\cdot)}$, $p\in\mathcal{P}^\gamma,\gamma\geq 1$, причем $\psi\in\mathfrak{M}'$. Тогда для произвольного натурального n существует постоянная K_p, которая зависит только от функции $p=p(x)$ и такая, что выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{p(\cdot)}\leq K_p\psi(n)E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)}. \tag{16}$$

Отметим, что утверждение теоремы 1 в большинстве случаев является известным. При $\psi(n)=n^{-\alpha}$, $\beta=\alpha$, $\alpha>0$, $n\in\mathbb{N}$, оценка (16) получена в работе [15]. В случае $p=\mathrm{const}$, $1\leq p\leq\infty$, такие результаты принадлежат А. И. Степанцу и А. К. Кушпелю [16, 17]. В случае же $p=\mathrm{const}$, $1<p<\infty$, и $\psi(n)=n^{-r}$, $\beta=r$, $n,r\in\mathbb{N}$, неравенство (16) доказано А. Ф. Тиманом [18, с. 316].

Доказательство. На основе соотношения (8) можно утверждать, что в метрике пространств $L^{p(\cdot)}$ для произвольной функции $f\in L^\psi_{\beta,p(\cdot)}$, $p\in\mathcal{P}^\gamma$, $\gamma\geq 1$, при условии $\psi\in\mathfrak{M}'$, $\beta\in\mathbb{R}$ выполняются равенства

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty A_k(f;x),\qquad f_\beta^\psi(x)=\sum_{k=0}^\infty A_k(f_\beta^\psi;x).$$

Учитывая теперь формулы связи между коэффициентами функций f и f_β^ψ (равенства (12), (13)), находим

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty A_k(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)=$$

$$=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^\infty\Bigg(\psi(k)\left[a_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2}-b_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right]\cos kx+$$

$$+\psi(k)\left[a_k(f_\beta^\psi)\sin\frac{\beta\pi}{2}+b_k(f_\beta^\psi)\cos\frac{\beta\pi}{2}\right]\sin kx\Bigg)=$$

$$=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^\infty\Bigg(\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}\left[a_k(f_\beta^\psi)\cos kx+b_k(f_\beta^\psi)\sin kx\right]+$$

$$+\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}\left[a_k(f_\beta^\psi)\sin kx - b_k(f_\beta^\psi)\cos kx\right]\Bigg) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi; x) + \sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde{f}_\beta^\psi; x). \tag{17}$$

Принимая во внимание соотношения (6) и (17), получаем

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f; x) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi; x) + \sin\frac{\beta\pi}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde{f}_\beta^\psi; x). \tag{18}$$

Далее имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(f_\beta^\psi; x) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left[\left(S_k(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right) - \left(S_{k-1}(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left(S_k(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right) - \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\left(S_{k-1}(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k) - \psi(k+1)]\left[S_k(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right] - \psi(n)\left[S_{n-1}(f_\beta^\psi; x) - f_\beta^\psi(x)\right]. \tag{19}$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)A_k(\tilde{f}_\beta^\psi; x) = \sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k) - \psi(k+1)]\left[S_k(\tilde{f}_\beta^\psi; x) - \tilde{f}_\beta^\psi(x)\right] -$$

$$-\psi(n)\left[S_{n-1}(\tilde{f}_\beta^\psi; x) - \tilde{f}_\beta^\psi(x)\right]. \tag{20}$$

Используя свойства нормы и соотношение (9), на основании равенств (18) – (20) находим

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le \|f - S_{n-1}(f)\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k) - \psi(k+1)]\left\|S_k(f_\beta^\psi) - f_\beta^\psi\right\|_{p(\cdot)} + \psi(n)\left\|S_{n-1}(f_\beta^\psi) - f_\beta^\psi\right\|_{p(\cdot)} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty}[\psi(k) - \psi(k+1)]\left\|S_k(\tilde{f}_\beta^\psi) - \tilde{f}_\beta^\psi\right\|_{p(\cdot)} + \psi(n)\left\|S_{n-1}(\tilde{f}_\beta^\psi) - \tilde{f}_\beta^\psi\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le K\left(\psi(n)E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} + \psi(n)E_n(\tilde{f}_\beta^\psi)_{p(\cdot)}\right) \le K\psi(n)E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)},$$

где $K = K_p$ — постоянная, которая зависит только от функции $p = p(x)$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $f \in L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}$, $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, $\gamma \geq 1$, *причем* $\psi \in \mathfrak{M}'$. *Тогда*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq K_p \psi(n),$$

где K_p *— постоянная, которая зависит только от функции* $p = p(x)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^*$ множество последовательностей $\psi(k) > 0$, которые удовлетворяют только первым двум условиям из определения множества $\mathfrak{M}$, т. е.

$$\mathfrak{M}^* = \left\{ \psi(k) \colon \psi(k) - \psi(k+1) \geq 0, \lim_{k \to \infty} \psi(k) = 0, \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, $\gamma \geq 1$, *и* $\psi \in \mathfrak{M}^*$. *Тогда для произвольного тригонометрического полинома* T_n *порядка не выше* n *выполняется неравенство*

$$\|D^{\psi}_{\beta} T_n\|_{p(\cdot)} \leq \frac{K_p}{\psi(n)} \|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{21}$$

где $1/\psi(0) := 0$, *а* K_p *— постоянная, которая зависит только от функции* $p = p(x)$.

Соотношение (21) является аналогом классического неравенства для максимума модуля производной тригонометрического полинома, полученного С. Н. Бернштейном в работе [19]. В дальнейшем это неравенство уточнялось и обобщалось в работах многих авторов. С основными результатами относительно неравенства С. Н. Бернштейна и комментариями к ним можно ознакомиться, например, в книге Н. П. Корнейчука, В. Ф. Бабенко и А. А. Лигуна [20] (см. также монографии А. Ф. Тимана [18], Н. И. Ахиезера [21]). Отметим еще, что в случае, когда $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, теорема 2 доказана в работе [15]. В случае $p = \mathrm{const}$, $1 \leq p \leq \infty$, неравенство (21) получено А. И. Степанцом и А. К. Кушпелем в статье [17].

Доказательство. Если

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— тригонометрический полином порядка не выше n, то согласно равенству (11)

$$(D^{\psi}_{\beta} T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi(k)} a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} \Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} \Big(a_k \sin kx - b_k \cos kx \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(T_n; x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2} (D^{\psi}_{0} T_n)(x) - \sin\frac{\beta\pi}{2} (D^{\psi}_{0} \tilde{T}_n)(x). \tag{22}$$

Положим

$$R^{\psi}_{m}(\varphi; x) := \sum_{k=0}^{m-1} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)} \right] A_k(\varphi; x), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где $1/\psi(0) := 0$.

Из равенства (22) следует, что функция

$$\varphi_1(x) := \psi(n)(D_0^{\psi} T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n; x)$$

является тригонометрическим полиномом порядка не выше n (т. е. $A_k(\varphi_1; x) \equiv 0,\ k > n$). Учитывая это и используя преобразование Абеля, для произвольного натурального числа $m \geq n$ получаем

$$R_m^{\psi}(\varphi_1; x) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] A_k(\varphi_1; x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n; x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x) + \sum_{i=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] r_k^{\psi,m}(T_n; x) + r_n^{\psi,m}(T_n; x), \tag{24}$$

где

$$r_k^{\psi,m}(T_n; x) := \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Снова используя преобразование Абеля, имеем

$$r_k^{\psi,m}(T_n; x) = \psi(m) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\psi(i+1)} - \frac{1}{\psi(i)}\right] \sum_{j=0}^{i} A_j(T_n; x) +$$

$$+ \psi(m) \left[\frac{1}{\psi(m)} - \frac{1}{\psi(k)}\right] \sum_{j=0}^{k} A_j(T_n; x),$$

откуда в силу монотонности последовательности $\psi(k)$ и соотношения (7) следует

$$\|r_k^{\psi,m}(T_n; \cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{25}$$

Применяя теперь оценку (25) к равенству (24), для произвольного натурального числа $m \geq n$ находим

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_1; \cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{26}$$

Аналогично, для функции

$$\varphi_2(x) := \psi(n)(D_0^{\psi} \tilde{T}_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x),$$

учитывая соотношение (4), для произвольного натурального числа $m \geq n$ получаем

$$\|R_m^\psi(\varphi_2;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{27}$$

Положим

$$Q_{m_1,m_2}^\psi(\varphi;x) := \frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} R_{m_2}^\psi(\varphi;x) - \frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} R_{m_1}^\psi(\varphi;x), \tag{28}$$

где $m_1 < m_2 \in \mathbb{N}$, а $R_m^\psi(\varphi;x)$ — величина, которая определяется соотношением (23).

Считая, что последовательности $\psi(k)$ из множества $\mathfrak{M}$ являются сужениями на множество натуральных чисел непрерывных функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \geq 1$, в соответствии с [13, с. 159] через $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ обозначим функцию, которая связана с ψ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Отсюда, вследствие строгой монотонности и убывания к нулю ψ, функция $\eta(t)$ для всех $t \geq 1$ определяется однозначно

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{29}$$

где ψ^{-1} — функция, обратная к ψ.

Пусть теперь $m_1 = n$ и $m_2 = [\eta(n)]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда имеют место соотношения

$$\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} = \mathcal{O}(1), \qquad \frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} = \mathcal{O}(1). \tag{30}$$

На основе соотношений (26) – (30) находим

$$\|Q_{n,[\eta(n)]}^\psi(\varphi_i;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}, \qquad n = 1,2,\ldots, \quad i = 1,2, \tag{31}$$

где K_p — постоянная, которая зависит только от функции $p = p(x)$.

Поскольку выполняется равенство

$$Q_{m_1,m_2}^\psi(\varphi;x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(m_2)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi;x) -$$

$$- \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_1-1} \left(\frac{1}{\psi(m_1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi;x),$$

которое с помощью преобразования Абеля принимает вид

$$Q_{m_1,m_2}^\psi(\varphi;x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=m_1}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(k+1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) S_k(\varphi;x),$$

для произвольного тригонометрического полинома T_m, порядок которого не превышает m_1, имеем

$$Q_{m_1,m_2}^\psi(T_m;x) = T_m(x). \tag{32}$$

Принимая теперь во внимание то, что

$$Q^{\psi}_{m_1,m_2}(c\varphi;x) = cQ^{\psi}_{m_1,m_2}(\varphi;x), \quad c = \mathrm{const},$$

на основе соотношений (22), (31) и (32) находим

$$\|(D^{\psi}_{\beta}T_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le \|(D^{\psi}_{0}T_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} + \|(D^{\psi}_{0}\tilde{T}_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \left\|\frac{1}{\psi(n)}Q^{\psi}_{n,[\eta(n)]}(\varphi_1;\cdot)\right\|_{p(\cdot)} + \left\|\frac{1}{\psi(n)}Q^{\psi}_{n,[\eta(n)]}(\varphi_2;\cdot)\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \frac{K_p}{\psi(n)}\|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Заметим, что неравенство (21) является неулучшаемым по порядку, так как для тригонометрического полинома $t^*_n(x) = \cos nx$ имеем

$$(D^{\psi}_{0}t^*_n)(x) = \frac{1}{\psi(n)}\cos nx$$

и

$$\|D^{\psi}_{0}t^*_n)\|_{p(\cdot)} = \|\frac{1}{\psi(n)}\cos nx\|_{p(\cdot)} = \frac{1}{\psi(n)}\|t^*_n\|_{p(\cdot)}.$$

Используя теорему 2 можно доказать утверждения, которые обычно называют обратными теоремами теории приближения функций. Для формулирования этих результатов нам понадобятся определения множеств $\mathfrak{M}_0$ и F, которые принадлежат А. И. Степанцу (см. [13, с. 160, с. 165]):

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < \frac{t}{\eta(\psi;t) - t} \le K, \ t \ge 1\right\},$$

$$F = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \eta'(\psi;t) \le K\right\},$$

где $\eta(\psi;t)$ — функция, определенная в соотношении (29).

Теорема 3. *Пусть $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, $\gamma \ge 1$, причем $p(x) \le \bar{p} < \infty$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{p(\cdot)}$:*

1) *если $\psi \in \mathfrak{M}$ и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1},$$

то существует производная f^{ψ}_{β}, для которой

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)} \le C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{34}$$

2) *если* $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1},$$

то существует производная f_β^ψ, *для которой*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \leq C_2 \Bigg(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1} \Bigg), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{35}$$

3) *если* $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \geq K > 0$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1},$$

то существует производная f_β^ψ, *для которой*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \leq C_3 \Bigg(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} \Bigg), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

где C_i, $i = 1, 2, 3,$ — *постоянные, которые зависят только от функций* $p = p(x)$ *и* $\psi = \psi(k)$.

Если $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то утверждения теоремы 3 содержат теорему 4 работы [15]. В метрике пространств L_p, $p = \mathrm{const}$, $1 < p < \infty$, аналогичные результаты для монотонных последовательностей ψ получены Е. И. Жукиной [22] и А. И. Степанцом [23], а в случае $\psi(n) = n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и $p = \mathrm{const}$, $1 < p < \infty$ — в работе [24]. При $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$ и $p = \mathrm{const}$, $1 < p < \infty$, теорема 3 была установлена А. Ф. Тиманом [18].

Для ***доказательства*** теоремы будем использовать схему, предложенную в монографии [14, с. 120–126]. Пусть $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность тригонометрических полиномов, которые осуществляют наилучшее приближение функции f в пространстве $L_{p(\cdot)}$. Тогда ряд

$$t_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(t_k(x) - t_{k-1}(x) \big) \tag{37}$$

будет сходиться к $f(x)$ по норме пространства $L_{p(\cdot)}$, так как его частные суммы T_m при $m > n$ совпадают с полиномами $t_m(x)$.

Рассмотрим ряд

$$(D_\beta^\psi t_n)(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(D_\beta^\psi (t_k - t_{k-1}) \big)(x) \tag{38}$$

и покажем, что он сходится к сумме $T(x)$, ряд Фурье которой имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right). \tag{39}$$

Тем самым существование производной $f_\beta^\psi(\cdot)$ будет установлено. Поскольку разность $u_k(x) = t_k(x) - t_{k-1}(x)$ является полиномом порядка k, применяя теорему 2, находим

$$\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le \frac{C_p}{|\psi(k)|}\|u_k(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \frac{C_p}{|\psi(k)|}\Bigg(\|t_k(\cdot) - f(\cdot)\|_{p(\cdot)} + \|f(\cdot) - t_{k-1}(\cdot)\|_{p(\cdot)}\Bigg) \le 2C_pE_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \big\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\big\|_{p(\cdot)} \le C_p \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}, \tag{40}$$

причем по условию пункта 1 теоремы ряд в правой части соотношения (40) сходится. Это означает, что ряд (38) действительно сходится в пространстве $L_{p(\cdot)}$ к функции $T(x)$, которая принадлежит этому же пространству.

Пусть $a_k^{(n)} = a_k(t_n)$ и $b_k^{(n)} = b_k(t_n)$, $k = 0,1,2,\ldots,$ — коэффициенты Фурье полиномов $t_n(\cdot)$. Тогда в соответствии с равенствами (14) и (15) коэффициенты $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ полиномов $(D^{\psi}_{\beta}t_k)(\cdot)$ имеют вид

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(a_k^{(n)}\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k^{(n)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg), \tag{41}$$

$$\beta_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(b_k^{(n)}\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k^{(n)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg). \tag{42}$$

Поскольку равенство

$$T(x) = \lim_{n\to\infty}(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)$$

выполняется в метрике пространства $L_{p(\cdot)}$, то

$$a_k(T) = \lim_{n\to\infty}\alpha_k^{(n)}, \qquad b_k(T) = \lim_{n\to\infty}\beta_k^{(n)}, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Принимая теперь во внимание то, что

$$\lim_{n\to\infty}a_k^{(n)} = a_k(f), \qquad \lim_{n\to\infty}b_k^{(n)} = b_k(f), \quad k = 0,1,\ldots,$$

на основе равенств (41), (42) получаем

$$a_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg),$$

$$b_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg).$$

Отсюда следует, что ряд Фурье функции $T(x)$ действительно совпадает с рядом (39). Это означает, что у функции $f(x)$ действительно существует $(\psi;\beta)$-производная $f^{\psi}_{\beta}(x)$, которая принадлежит пространству $L_{p(\cdot)}$, и для нее выполняется равенство

$$f^{\psi}_{\beta}(x) = (D^{\psi}_{\beta}t_n)(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\big(D^{\psi}_{\beta}[t_k - t_{k-1}]\big)(x), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{43}$$

в метрике пространства $L_{p(\cdot)}$.

Для завершения доказательства пункта 1 теоремы осталось заметить, что неравенство (34) следует из соотношения (43) с учетом оценки (40).

Для доказательства пунктов 2 и 3 теоремы будем использовать ту же схему. Пусть $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность тригонометрических полиномов, которые осуществляют наилучшее приближение функции f в пространстве $L_{p(\cdot)}$. Для каждого натурального n положим

$$n_0 = n, \qquad n_1 = [\eta(n)] + 1, \ldots, \qquad n_k = [\eta(n_{k-1})] + 1, \ldots .$$

В этом случае ряд

$$t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x))$$

будет сходиться в пространстве $L_{p(\cdot)}$ к функции f. Рассмотрим ряд

$$(D_\beta^\psi t_{n_0})(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (D_\beta^\psi [t_{n_k} - t_{n_{k-1}}])(x) \tag{44}$$

и убедимся, что он будет сходиться в пространстве $L_{p(\cdot)}$ к сумме $T(x)$, ряд Фурье которой имеет вид (39). Применяя неравенство (21) к разности $u_k(x) = t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)$, получаем

$$\|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq C_p E_{n_{k-1}+1}(f)_{p(\cdot)} |\psi(n_k)|^{-1},$$

вследствие чего

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq C_p \left(E_{n+1}(f)_{p(\cdot)} (\psi(n))^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{n_k+1}(f)_{p(\cdot)} |\psi(n_k)|^{-1} \right). \tag{45}$$

Используя оценку (см. [14, с. 124, 125])

$$\frac{E_{n_k+1}(f)}{\psi(n_k)} \leq \sum_{\nu=n_{k-1}}^{n_k-1} \frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_0,$$

из соотношения (45) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq C_p \left(E_{n+1}(f)_{p(\cdot)} (\psi(n))^{-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1} \right). \tag{46}$$

Согласно условиям пункта 2 теоремы ряд в правой части неравенства (46) сходится. Отсюда следует, что и ряд (44) будет сходиться в пространстве $L_{p(\cdot)}$ к некоторой функции $T \in L_{p(\cdot)}$, и для завершения доказательства пункта 2 теоремы осталось показать, что $S[T] = S[f_\beta^\psi]$. Для этого повторим рассуждения, которые были использованы для получения равенства (43), и получим неравенство (35) путем объединения аналога равенства (43) и соотношения (46).

Доказательство пункта 3 теоремы проводится аналогично, с учетом следующего аналога неравенства (46) из монографии [14, с. 125, 126]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq C_p \left(E_{n+1}(f)_{p(\cdot)} (\psi(n))^{-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} \right).$$

Пусть $f \in L_{p(\cdot)}$, $p \in \mathcal{P}^\gamma$, $\gamma \geq 1$, и

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)\, dt, \qquad 0 < h < 1, \quad x \in [0; 2\pi],$$

— оператор Стеклова функции f. С учетом равномерной ограниченности операторов Стеклова в пространствах $f \in L_{p(\cdot)}$ (см. [9]) в статье [15] в рассмотрение были введены модули непрерывности дробного порядка

$$\Omega_\alpha(f; \delta)_{p(\cdot)} := \sup_{h_i, h < \delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma_h^\beta(f) \right\|_{p(\cdot)}, \quad \beta = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma_h^\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{1}{h^k} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \ldots \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)}{k!}, \quad k > 1; \qquad \binom{\beta}{1} := \beta; \qquad \binom{\beta}{0} := 1,$$

и для этих величин было доказано следующее утверждение.

Теорема C. *Если $\alpha > 0$ и $f \in L_{p(\cdot)}$, где $p \in \mathcal{P}^\gamma, \gamma \geq 1$, то для $n = 0, 1, \ldots,$ выполняется неравенство*

$$\Omega_\alpha\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)} \leq \frac{c}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} E_k(f)_{p(\cdot)}, \tag{47}$$

где c — положительная постоянная, которая зависит только от α и $p = p(x)$.

Используя теорему C, из теоремы 3 получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 3 *для любого $\alpha > 0$:*

1) *если $\psi \in \mathfrak{M}$ и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)|^{-1},$$

то существует производная f_β^ψ, для которой

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)} \leq C_1 \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)} E_k(f)_{p(\cdot)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{\psi(k)} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{48}$$

2) *если $\psi \in \mathfrak{M}_0$ и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1},$$

то существует производная f_β^ψ, для которой

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi;\frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)}\le C_2\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)}E_k(f)_{p(\cdot)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{k\psi(k)}\right),\quad n\in\mathbb{N}; \tag{49}$$

3) *если* $\psi\in F,\ \eta(\psi;t)-t\ge K>0$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)(\eta(k)-k)|^{-1},$$

то существует производная f_β^ψ, *для которой*

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi;\frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)}\le C_3\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}E_k(f)_{p(\cdot)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}\right),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{50}$$

где $C_i,\,i=1,2,3,$ — *постоянные, которые зависят только от* α, *последовательности* $\psi=\psi(k)$ *и функции* $p=p(x)$.

Доказательство. Применяя теорему С к функции f_β^ψ, существование которой гарантирует теорема 3, и оценивая величины наилучших приближений $(\psi;\beta)$-производной $E_k(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)}$ с помощью соотношения (34), получаем

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi;\frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)}\le\frac{C}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}\sum_{j=k}^{\infty}E_j(f)_{p(\cdot)}|\psi(j)|^{-1}.$$

Принимая во внимание тождество

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=k}^{\infty}b_k=\sum_{k=0}^{n}b_k\sum_{j=0}^{k}a_j+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\sum_{j=0}^{n}a_j,$$

и оценку

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha}\sum_{j=0}^{k}(j+1)^{\alpha-1}=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j+1}{k+1}\right)^{\alpha-1}\le 1,\quad k=0,1,\ldots,n,$$

получаем соотношение (48). Пункты 2 и 3 следствия доказываются аналогично.

Теорема 4. *Пусть* $f\in L_{p(\cdot)}$, *где* $p\in\mathcal{P}^\gamma,\gamma\ge1$, *причем* $p(x)\le\bar{p}<\infty$ *и* $\psi\in\mathfrak{M}'$. *Тогда существует тригонометрический полином* $T_n\in\mathcal{T}_n$, *для которого выполняется неравенство*

$$\left\|f_\beta^\psi-(D_\beta^\psi T_n)\right\|_{p(\cdot)}\le c_pE_{n+1}(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{51}$$

где c_p — *постоянная, которая зависит только от функции* $p=p(x)$.

Заметим, что в случае $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, утверждение теоремы 4 совпадает с теоремой 5 работы [15].

Доказательство. Положим для удобства $[\eta(0)] := 1$ и обозначим через

$$V_{n,[\eta(n)]}(f) = V_{n,[\eta(n)]}(f;x) := \frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f;x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{52}$$

средние Валле Пуссена функции f.

Отметим некоторые свойства величин $V_{n,[\eta(n)]}(f;x)$. Очевидно, что для произвольного тригонометрического полинома $P_n(x)$ порядка не выше n выполняется равенство

$$V_{n,[\eta(n)]}(P_n;x) = P_n(x). \tag{53}$$

Кроме того, принимая во внимание соотношение (7), получаем оценку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \|S_k(f;\cdot)\|_{p(\cdot)} \le c_p \|f\|_{p(\cdot)}. \tag{54}$$

Обозначая через $t_n(x)$ полином наилучшего приближения суммы Валле Пуссена $V_{n,[\eta(n)]}(f)$ функции f в пространстве $L_{p(\cdot)}$ порядка n, а через $T_n(x)$ полином наилучшего приближения функции f порядка n и используя неравенство (7), находим

$$E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{p(\cdot)} = \left\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\right\|_{p(\cdot)} \le \left\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - T_n\right\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \frac{\left\|\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} (S_k(f;\cdot) - T_n(\cdot))\right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)] - n} = \frac{\left\|\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f - T_n;\cdot)\right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)] - n} \le$$

$$\le c_p \|f - T_n\|_{p(\cdot)} = c_p E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{55}$$

Покажем, что в качестве полинома, который удовлетворяет соотношению (51), может быть взят $T_n(x)$ — полином наилучшего приближения функции f в пространстве $L_{p(\cdot)}$ порядка n. Имеем

$$\left\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi T_n)\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \left\|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\right\|_{p(\cdot)} + \left\|(D_\beta^\psi t_n) - (D_\beta^\psi T_n)\right\|_{p(\cdot)} + \left\|V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi) - (D_\beta^\psi t_n)\right\|_{p(\cdot)} =:$$

$$=: R_1(f) + R_2(f) + R_3(f). \tag{56}$$

Обозначая еще через $T_n^*(x)$ полином наилучшего приближения производной f_β^ψ порядка n, на основании соотношений (53) и (54) находим

$$R_1(f) = \left\|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \|f_\beta^\psi - T_n^*\|_{p(\cdot)} + \left\|T_n^* - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\right\|_{p(\cdot)} =$$

$$= E_{n+1}(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)} + \left\|V_{n,[\eta(n)]}(T^*_n - f^{\psi}_{\beta})\right\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq E_{n+1}(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)} + c_p\|f^{\psi}_{\beta} - T^*_n\|_{p(\cdot)} \leq c_p E_{n+1}(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)}. \tag{57}$$

На основании (9) для произвольной функции $f \in L_{p(\cdot)}$, $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, $\gamma \geq 1$, получаем оценку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{p(\cdot)} = \frac{\left\|\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\Big(S_k(f;\cdot) - f(\cdot)\Big)\right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)] - n} = \mathcal{O}(1)E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{58}$$

Применяя неравенство (21) и принимая во внимание соотношения (55) и (58), находим

$$R_2(f) = \left\|(D^{\psi}_{\beta}t_n) - (D^{\psi}_{\beta}T_n)\right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_p}{\psi(n)}\|t_n - T_n\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq \frac{c_p}{\psi(n)}\Big(\|t_n - V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{p(\cdot)} + \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{p(\cdot)} + \|f - T_n\|_{p(\cdot)}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{c_p}{\psi(n)}E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{59}$$

Наконец, учитывая равенство $V_{n,[\eta(n)]}(f^{\psi}_{\beta}) = \big(D^{\psi}_{\beta}V_{n,[\eta(n)]}(f)\big)$, определение функции $\eta(n) = \eta(\psi; n)$, снова применяя неравенство (21) и оценку (55), получаем

$$R_3(f) = \left\|(D^{\psi}_{\beta}V_{n,[\eta(n)]}(f)) - (D^{\psi}_{\beta}t_n)\right\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq \frac{c_p}{\psi([\eta(n)] - 1)}\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \frac{c_p}{\psi([\eta(n)] - 1)}E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{p(\cdot)} \leq \frac{2c_p}{\psi(n)}E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{60}$$

Объединяя теперь соотношения (16), (56), (57) и (59), (60), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0;1])$ // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 4. – С. 613 – 632.
2. *Kováčik O., Rakósník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Chech. Math. J. – 1991. – **41(116)**, № 4. – P. 592 – 618.
3. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. – Berlin: Springer, 1983.
4. *Orlicz W.* Über conjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. – 1931. – **3**. – P. 200 – 211.
5. *Nakano H.* Topology of linear topological spaces. – Tokyo: Maruzen Co. Ltd., 1951.
6. *Samko S. G.* Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ // Proc. Int. Conf. Operator Theory and Complex and Hypercomplex Analysis (Mexico, 12 – 17 December 1994): Contemp. Math. – 1994. – **212**. – P. 203 – 219.
7. *Шарапудинов И. И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки. – 1996. – **59 (2)**. – С. 291 – 302.
8. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – **263**, № 2. – P. 424 – 446.
9. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$ // Anal. Math. – 2007. – **33**. – P. 135 – 153.
10. *Diening L., Ruzicka M.* Calderon – Zigmund operators on generelized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems releted to fluid dynamics. — Preprint / Albert-Ludwings-Univ. Freiburg, 21/2002, 04.07.2002.
11. *Ruzicka M.* Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory // Lect. Notes Math. – 2000. – **1748**. – 176 p.

12. *Samko S. G.* On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: Maximal and Singular operators // Integral Transforms Spec. Funct. – 2005. – **16**, № 5 – 6. – P. 461 – 482.
13. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
14. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
15. *Akgün R.* Trigonometric approximation of functions in generalized lebesgue spaces with variable exponent // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 3 – 23.
16. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 44 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.15).
17. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 483 – 492.
18. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
19. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912) // Собр. соч. – Т. I. (1952). – С. 11 – 104.
20. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
21. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
22. *Жукина Е. И.* Теоремы вложения // Приближение периодических функций в метрике пространства L_p. – Киев, 1987. – С. 3 – 32. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47).
23. *Степанец А. И.* Обратные теоремы приближения периодических функций // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1266 – 1273.
24. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44 (86)**, № 1. – С. 53 – 84.

Получено 09.04.12