УДК 517.938

О. В. Капустян (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНИХ АТРАКТОРІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ КАСКАДНИХ СИСТЕМ*

We investigate qualitative behavior of solutions of cascade systems without uniqueness. We prove that solutions of reaction-diffusion system perturbed by a system of ordinary differential equations and solutions of a system of equations of viscous incompressible fluid with passive ingredients generate families of multivalued semiprocesses for which, in the phase space, a compact global attractor exists.

Досліджується якісна поведінка розв'язків каскадних систем без єдиності. Доведено, що розв'язки системи реакції-дифузії, збуреної системою звичайних диференціальних рівнянь, і розв'язки системи рівнянь в'язкої нестисливої рідини з пасивними складовими утворюють сім'ї багатозначних напівпроцесів, для яких у фазовому просторі існує компактний глобальний атрактор.

Дослідження якісної поведінки розв'язків каскадних систем методами теорії глобальних атракторів неавтономних динамічних систем (процесів) було запропоновано в [1]. У даній роботі цей підхід поширено на каскадні системи, що не є однозначно розв'язними. Розглядається каскадна система

$$\partial_t u(t) = F(u(t), y(t)), \quad t \geq \tau, \quad u(\tau) = u_\tau \in E, \quad \tau \geq 0, \tag{1}$$

$$y(t) \in G(t, y_0), \quad t \geq 0, \quad y_0 \in \Sigma, \tag{2}$$

де $\{G(t, \cdot): \Sigma \mapsto 2^\Sigma\}_{t \geq 0}$ — багатозначна напівгрупа (м-напівпотік [2]), що діє на повному метричному просторі Σ. Еволюційна задача (1) для довільних $\tau \geq 0$, $y_0 \in \Sigma$, $y(t) \in G(t, y_0)$, $u_\tau \in E$ передбачається глобально розв'язною в деякому класі W_τ, причому $u(t) \in E \quad \forall t \geq \tau$. Покладемо $R_{+d} = \{(t, \tau) \in R_+^2 \mid t \geq \tau\}$ і для довільних $(t, \tau) \in R_{+d}$ означимо $U_{y_0}(t, \tau, u_\tau) := \{u(t) \mid u(\cdot)$ — розв'язок (1), $y(\cdot) \in G(\cdot, y_0)\}$.

Основна мета роботи — для конкретних задач (1), (2) довести, що сім'я відображень $\{U_{y_0}: R_{+d} \times E \mapsto 2^E\}_{y_0 \in \Sigma}$ є сім'єю м-напівпроцесів [3, 4], для якої в фазовому просторі E існує мінімальна притягуюча множина — глобальний атрактор. Зауважимо, що систему (1), (2) не можна описати в рамках теорії автономних динамічних систем.

Надалі для метричного простору (X, ρ) будемо позначати через $P(X)$ ($\beta(X)$, $C(X)$) сукупність всіх непорожніх (непорожніх обмежених, непорожніх замкнених) підмножин X, $B_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$, $\overline{A}$ — замикання множини A в X.

Дещо узагальнивши поняття із [3], сформулюємо такі означення.

Означення 1. *Нехай* $\{G(t, \cdot): \Sigma \mapsto P(\Sigma)\}_{t \geq 0}$ — *м-напівпотік. Сім'я відображень* $\{U_\sigma: R_{+d} \times E \mapsto P(E)\}_{\sigma \in \Sigma}$ *називається сім'єю м-напівпроцесів (СМН), якщо для довільних* $\sigma \in \Sigma$, $u \in E$ *виконуються умови*:

1) $U_\sigma(\tau, \tau, u) = u \quad \forall \tau \geq 0$;

2) $U_\sigma(t, \tau, u) \subset U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, u)) \quad \forall t \geq s \geq \tau$;

3) $U_\sigma(t + h, \tau + h, u) \subset U_{G(h, \sigma)}(t, \tau, u) \quad \forall h \geq 0$.

---

* Виконано при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № 01.07/00081).

Означення 2. *Множина* $\Theta_\Sigma \subset E$ *називається глобальним атрактором СМН* $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, *якщо:*

1) $\forall B \in \beta(E) \quad \forall \tau \ge 0 \quad \operatorname{dist}\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t, \tau, B), \Theta_\Sigma\right) \to 0, \ t \to +\infty$ *(притягання)*;

2) $\Theta_\Sigma \subset \bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t+\tau, \tau, \Theta_\Sigma) \quad \forall (t, \tau) \in R_{+d}$;

3) *для довільної притягуючої множини* $Y \subset E$ *маємо* $\Theta_\Sigma \subset \overline{Y}$.

Після незначної зміни результатів із [3] отримуємо достатні умови існування глобального атрактора.

Лема 1. *Нехай* E *— нескінченновимірний банахів простір,* Σ *— метричний компакт, для довільного* $t \ge 0$ *відображення* $\sigma \mapsto G(t, \sigma)$ *і* $(\sigma, u) \mapsto U_\sigma(t, 0, u)$ *мають замкнений графік, для довільних* $B \in \beta(E)$, $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, $\{t_n \,|\, t_n \to +\infty\}$ *послідовність* $\{\xi_n \,|\, \xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, B)\}$ *є передкомпактною в* E. *Тоді СМН* $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *має глобальний атрактор* $\Theta_\Sigma \ne E$.

Якщо, крім того, відображення $(\sigma, u) \mapsto U_\sigma(t, 0, u)$ *напівнеперервне зверху і існує* $B_* \in \beta(E)$ *така, що для будь-якого* $u \in E$ $\operatorname{dist}\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t, 0, u), B_*\right) \to 0$, $t \to +\infty$, *то* Θ_Σ *— компакт в* E.

***Приклад* 1** (система рівнянь реакції-дифузії, збурена системою звичайних диференціальних рівнянь). Розглядається каскадна система

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\Delta u(x,t) - f(u(x,t), y(t)) + \varphi(x, y(t)), \quad x \in \Omega, \quad t > \tau,$$
$$u(x,t)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u(x,t)\big|_{t=\tau} = u_\tau \in (L_2(\Omega))^N = E, \tag{3}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -F(y(t)), \quad y(0) = y_0 \in R^m. \tag{4}$$

Тут $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з гладкою межею, a — стала матриця розмірності $N \times N$, $\dfrac{a + a^T}{2} \ge \beta I$, $\beta > 0$, $\varphi \in C(\overline{\Omega} \times R^m, R^N)$, $f \in C(R^N \times R^m, R^N)$, $(f(u, y), u) \ge \alpha |u|^p - C$, $|f(u, y)| \le C(1 + |u|^{p-1})$, $\alpha > 0$, $C \ge 0$, $p \ge 2$, $F \in C(R^m, R^m)$, $(F(y), y) \ge k|y|^2 - C_1$, $k > 0$, $C_1 \ge 0$.

Теорема 1. *Каскадна система* (3), (4) *породжує сім'ю м-напівпроцесів, для якої в фазовому просторі* E *існує компактний глобальний атрактор.*

Доведення. Будь-який розв'язок задачі (4) існує на R_+ і задовольняє оцінку

$$|y(t)|^2 - \frac{C_1}{k} \le e^{-2kt}\left(|y_0|^2 - \frac{C_1}{k}\right). \tag{5}$$

Звідси маємо, що відображення $G(t, y_0) = \{y(t) \,|\, y(\cdot)$ — розв'язок (4), $y(0) = y_0\}$ визначене коректно і утворює м-напівпотік. Покладаючи $R_1 = \sqrt{1 + \dfrac{C_1}{k}}$, із (5) для будь-якого $t \ge 0$ отримуємо $G(t, \cdot): \overline{B_{R_1}(0)} \mapsto P(\overline{B_{R_1}(0)})$ і має замкнений графік [5], $\Sigma = (\overline{B_{R_1}(0)}, |\cdot|)$ — компакт. Згідно з [4] для довільних $y_0 \in \Sigma$, $y(\cdot) \in G(\cdot, y_0)$, $\tau \ge 0$; $u_\tau \in E$ задача (3) має принаймні один розв'язок $u(\cdot) \in$

$\in W_\tau := L_p^{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;(L_p(\Omega))^N) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;(H_0^1(\Omega))^N) \cap L_\infty(\tau,+\infty;E)$ і для довільного розв'язку (3) з класу W_τ маємо

$$u(\cdot) \in C([\tau,+\infty);E), \qquad \|u(t)\|_E^2 \le \|u(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_2, \tag{6}$$

$$\|u(t)\|_E^2 + \int_s^t \|u(p)\|^2_{(H_0^1)^N}\,dp + \int_s^t \|u(p)\|^p_{(L_p)^N}\,dp \le \|u(s)\|_E^2 + C_3(t-s), \tag{7}$$

де числа $\delta > 0$, C_2, $C_3 \ge 0$ залежать лише від констант задачі (3), (4).

Тоді легко показати, що відображення

$$U_{y_0}(t,\tau,u_\tau) := \{u(t) \mid u(\cdot) \in W_\tau \text{ — розв'язок (3)},\ y(\cdot) \in G(\cdot,y_0),\ u(\tau)=u_\tau\} \tag{8}$$

задає сім'ю м-напівпроцесів $\{U_{y_0} : R_{+d} \times E \mapsto P(E)\}_{y_0 \in \Sigma}$. З оцінки (6) випливає, що для $R_2 = \sqrt{1+C_2}$ множиною B_* з леми 1 є множина $\overline{B_{R_2}(0)}$. Тепер розглянемо $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_1,0,\eta_n)$, де $\sigma_n \to \sigma$ в Σ, $\eta_n \to \eta$ слабко в E, і доведемо, що по підпослідовності $\xi_n \to \xi \in U_\sigma(t_1,0,\eta)$. Дійсно, $\xi_n = u_n(t_1)$, $u_n(\cdot) \in W_0$ — розв'язок задачі (3), (4), що задовольняє (6), (7), $y_n(\cdot) \in G(\cdot,\sigma_n)$, причому з [5] $\forall T > t_1$ $y_n(\cdot) \to y(\cdot)$ в $C([0,T];R^m)$. З (7) випливає, що множина $\{u_{n_l}\}$ обмежена в $L_2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^N) + L_q(0,T;(L_q(\Omega))^N) \subset L_q(0,T;(H^{-s}(\Omega))^N)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $s \ge \max\left\{1; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)n\right\}$. Тоді за лемою про компактність [6] по підпослідовності $u_n \to u$ в $L_2(0,T;E)$, $u_n(t) \to u(t)$ слабко в E для будь-якого $t \in [0,T]$, $u_n(x,t) \to u(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$. Далі, $f(u_n(x,t), y_n(t)) \to f(u(x,t), y(t))$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, $\{f(u_n,y_n)\}$ — обмежена в $L_q(0,T;(L_q(\Omega))^N)$, отже, $f(u_n,y_n) \to f(u,y)$ слабко в $L_q(0,T;(L_q(\Omega))^N)$. Переходячи до границі в задачі (3), отримуємо, що $u(\cdot) \in W_0$ — розв'язок (3), $u(0) = \eta$. Тоді монотонні неперервні функції $J_n(t) = \|u_n(t)\|_E^2 - C_3 t$ збігаються майже скрізь на $(0,T)$ до монотонної неперервної функції $J(t) = \|u(t)\|_E^2 - C_3 t$, а отже, $J_n(t) \to J(t)$ $\forall t \in (0,T)$. Звідси $u_n(t_1) = \xi_n \to u(t_1) = \xi$, що і доводить включення $\xi \in U_\sigma(t_1,0,\eta)$. Тепер легко показати, що відображення $(\sigma,u) \mapsto U_\sigma(t,0,u)$ з леми 1 є замкненим і напівнеперервним зверху, а із включень $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n,0,B) \subset U_{\sigma_n}(t_n,t_n-t,U_{\sigma_n}(t_n-t,0,B)) \subset U_{\sigma_n}(t_n,t_n-t,B_*) \subset U_{G(t_n-t,\sigma_n)}(t,0,B_*)$ і компактності Σ маємо передкомпактність $\{\xi_n\}$ в E.

Теорему доведено.

Зауваження. В якості задачі (4) можна розглядати, зокрема, систему гальоркінських апроксимацій m-го порядку для n-вимірної системи рівнянь Нав'є – Стокса.

Приклад 2 (система рівнянь в'язкої нестисливої рідини з пасивними компонентами). Розглядається каскадна система

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - (y,\nabla)u - f(u,y) + \varphi, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=\tau} = u_\tau \in (L_2(\Omega))^N = E, \end{gathered} \tag{9}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial y}{\partial t} = -\nu A y - B(y, y) + g, \\
y\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad y\big|_{t=0} = y_0 \in H.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Тут $\Omega \subset R^3$ — обмежена область з гладкою межею, умови на a, f ті самі, що і в попередньому прикладі, $p \geq 6$, $\varphi \in E$, (10) — тривимірна система рівнянь Нав'є – Стокса в слабкій постановці [7 – 9], H і V — замикання множини $\{\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \operatorname{div}\varphi = 0\}$ в $(L_2(\Omega))^3$ і $(H_0^1(\Omega))^3$ відповідно, $g \in H$, P — ортогональна проекція $(L_2(\Omega))^3$ на H, $A = -P\Delta$, $B(u, v) = P((u, \nabla)v)$.

Теорема 2. *Каскадна система* (9), (10) *породжує сім'ю м-напівпроцесів, для якої в фазовому просторі* E *існує компактний глобальний атрактор.*

Доведення. Нехай $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис у H, складений із власних функцій оператора A, $\{\lambda_i \mid 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots\}$ — власні значення, P_N — ортогональна проекція в H на $\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_N\}$.

Відомо [7], що задача (10) для будь-якого $T > 0$ і $y_0 \in H$ має принаймні один розв'язок $y(\cdot)$ у класі $L_\infty(0, T; H) \cap L_2(0, T; V)$, який можна отримати як границю гальоркінських апроксимацій $y_N(\cdot)$, де $y_N(\cdot)$ — розв'язок задачі Коші системи звичайних диференціальних рівнянь

$$
\begin{gathered}
\frac{dy_N}{dt} + \nu A y_N + P_N B(y_N, y_N) = P_N g, \\
y_N(0) = y_N^0, \quad y_N^0 \to y_0 \text{ слабко в } H.
\end{gathered}
$$

При цьому по підпослідовності

$$
\begin{gathered}
y_N(t) \to y(t) \text{ слабко в } H \quad \forall t \in [0, T], \\
y_N(\cdot) \to y(\cdot) \text{ сильно в } L_2(0, T; H) \text{ і слабко в } L_2(0, T; V).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Збіжності (11) будемо позначати $y(\cdot) = \lim y_N(\cdot)$ на $[0, T]$. Для $y_N(\cdot)$ виконується оцінка [8, 9]

$$
\| y_N(t) \|_H^2 - \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2} \| g \|_H^2 \leq e^{-\nu\lambda_1 t} \left(\| y_N(0) \|_H^2 - \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2} \| g \|_H^2 \right).
$$

Покладемо $R_3 = \sqrt{1 + \frac{\| g \|_H^2}{(\nu\lambda_1)^2}}$ і для $y_0 \in \overline{B_{R_3}(0)}$ розглянемо відображення

$$
\begin{gathered}
G(t, y_0) = \{ y(t) \mid y(\cdot) \text{ — розв'язок (10)}, \\
y(\cdot) = \lim y_N(\cdot) \text{ на } [0, t], \ \| y_N(0) \|_H \leq R_3, \ y(0) = y_0 \}.
\end{gathered}
$$

Тоді для будь-якого $t \geq 0$ $G(t, \cdot): \overline{B_{R_3}(0)} \mapsto P(\overline{B_{R_3}(0)})$. Дійсно, з (11) маємо $y(\cdot) \in C_w(0, t; H)$, і оскільки $y_N(s) \to y(s)$ слабко в H для будь-якого $s \in [0, t]$, то $\| y(t) \|_H \leq \underline{\lim} \| y_N(t) \|_H \leq R_3$.

Замкнена куля $\overline{B_{R_3}(0)}$ зі слабкою топологією простору H є компактним метричним простором, в якому відображення $G(t, \cdot)$ має замкнений графік. Крім того, $\forall y_0 \in \overline{B_{R_3}(0)}$ $G(t_1 + t_2, y_0) \subset G(t_1, G(t_2, y_0))$. Дійсно, для будь-якого $y \in G(t_1 + t_2, y_0)$ $y = y(t_1 + t_2)$, $y(\cdot) = \lim y_N(\cdot)$ на $[0, t_1 + t_2]$, $\| y_N(0) \|_H \leq R_3$. Тоді $y(t_2) \in G(t_2, y_0)$ і для $z(t) = y(t_1 + t_2)$, $t \in [0, t_1]$, маємо

$z(\cdot) = \lim y_N(\cdot + t_2)$ на $[0, t_1]$, $\| y_N(0 + t_2) \|_H \le R_3$, $\| z(0) \|_H = \| y(t_2) \|_H \le R_3$, $z(\cdot)$ — розв'язок (10), отже, $z(t_1) = y(t_1 + t_2) \in G(t_1, y(t_2)) \subset G(t_1, G(t_2, y_0))$.

Таким чином, для $\Sigma := \overline{B_{R_3}(0)}$ зі слабкою в H топологією $\{ G(t, \cdot) : \Sigma \mapsto \mapsto C(\Sigma) \}_{t \ge 0}$ — м-напівпотік, що задовольняє умови леми 1.

Розглянемо задачу (9). Зберігаючи позначення прикладу 1 із заміною $(H_0^1(\Omega))^N$ на $(H^1(\Omega))^N$, отримуємо, що оскільки для будь-якого $y \in H$, $u \in (H^1(\Omega))^N$ $((y, \nabla) u, u) = 0$, то для довільних $y_0 \in \Sigma$, $y(\cdot) \in G(\cdot, y_0)$, $\tau \ge 0$, $u_\tau \in E$ існує принаймні один розв'язок (9) $u(\cdot) \in W_\tau$, що задовольняє оцінки (6), (7) при $t \ge s$ для майже всіх $t \ge \tau$. Оскільки для $y(\cdot) \in G(\cdot, y_0)$ із [7] маємо включення $y(\cdot) \in L_4^{\mathrm{loc}}(R_+; (L_3(\Omega))^3)$ і $p \ge 6$, то $(y(\cdot), \nabla) u(\cdot) \in L_q^{\mathrm{loc}}(\tau, +\infty; (L_q(\Omega))^N)$. Це включення дозволяє довести [6], що для довільного розв'язку (9) із W_τ виконуються $u(\cdot) \in C([\tau, +\infty); E)$ і оцінки (6), (7) при $t \ge s \ge \tau$. Це дозволяє коректно означити сім'ю м-напівпроцесів

$$U_{y_0}(t, \tau, u_\tau) = \{ u(t) \mid u(\cdot) \in W_\tau \text{ — розв'язок (9)}, \; y(\cdot) \in G(\cdot, y_0), \; u(\tau) = u_\tau \},$$

що задовольняє умови леми 1.

Теорему доведено.

1. *Vishik M. I., Chepyzhov V. V.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures et Appl. – 1994. – **73**, № 3. – P. 279 – 333.
2. *Мельник В. С., Капустян А. В.* О глобальных аттракторах многозначных полудинамических систем и их аппроксимациях // Докл. РАН. – 1999. – **366**, № 4. – С. 445 – 448.
3. *Капустян О. В.* Многозначні напівпроцеси: глобальні атрактори і залежність від параметра // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2002. – № 1. – С. 147 – 151.
4. *Капустян А. В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 7. – С. 1 – 4.
5. *Филиппов А. В.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1989. – 223 с.
6. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 293 с.
7. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса: теория и численный анализ. – М.: Мир, 1987. – 425 с.
8. *Ball J. M.* Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier – Stokes equations // J. Nonlinear Sci. – 1997. – **7**. – P. 475 – 502.
9. *Sell G. R.* Global attractors for the three-dimensional Navier – Stokes equations // J. Dynam. and Different. Equat. – 1996. – **8**, № 1. – P. 1 – 33.

Отримано 10.12.2002,
після доопрацювання — 26.02.2003