УДК 517.9

М. О. Перестюк, О. С. Чернікова (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДЕЯКІ СУЧАСНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ*

We present a short survey of the principal results on the theory of impulsive differential equations obtained during last years.

Приведен краткий обзор основных результатов по теории импульсных дифференциальных уравнений, установленных в течение последних лет.

Теорія диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням є одним із найважливіших розділів сучасної теорії диференціальних рівнянь. Становлення та формування теорії імпульсних систем пов'язане з дослідженнями вчених київської наукової школи нелінійної механіки (див., наприклад, [1, 2], а також огляд [3]). Одним із перших таких досліджень було вивчення коливань маятника, що піддається імпульсній дії [4]. У подальшому ідеї [4] було розвинуто Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком та їхніми учнями [1, 2, 5 – 7]. Результати вказаних робіт привернули увагу фахівців в усьому світі, стимулювали подальший всебічний розвиток теорії диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

В останній час спостерігається зростання інтересу спеціалістів до різних аспектів теорії імпульсних систем, все ширшим стає коло досліджуваних питань. Значна кількість публікацій останніх років пов'язана з питаннями стійкості та різноманітних „стійкоподібних" властивостей розв'язків і множин (інтегральних, інваріантних) для різних класів імпульсних систем. Об'єктами вивчення є як системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією, так і системи рівнянь з запізненням та імпульсним збуренням, сингулярно збурені диференціальні рівняння з імпульсною дією, рівняння з випадковим імпульсним збуренням, імпульсні диференціальні рівняння в банаховому просторі тощо. При цьому основними методами дослідження стійкості є прямий метод Ляпунова, поширений [1, 2] на випадок імпульсних систем, метод порівняння [8], а також поєднання названих методів. Часто при аналізі властивостей та поведінки розв'язків імпульсних систем застосовують метод інтегральних нерівностей, зокрема аналоги відомих нерівностей Гронуолла – Беллмана, Біхарі для кусково-неперервних функцій (див., наприклад, [1, 2]). Окремий цикл робіт присвячено дослідженню крайових задач для імпульсних систем диференціальних рівнянь; результати цих досліджень викладено у монографіях [9, 10].

У даній статті наведено огляд деяких результатів з теорії імпульсних систем, встановлених протягом останніх років. При цьому збережено позначення, прийняті авторами вказаних публікацій.

Як було зазначено вище, велику кількість досліджень у теорії імпульсних систем присвячено питанням стійкості розв'язків різних класів імпульсних систем. Перші глибокі систематичні дослідження у цьому напрямку було проведено математиками київської школи нелінійної механіки. Результати, встановлені в 1970 – 1980-х роках представниками цієї наукової школи, на даний час є загальновідомими і широко застосовуються у дослідження як вітчизняних, так і закордонних математиків (стислий огляд відповідних публікацій наведено в [3]). Методика вивчення питань стійкості та асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь, запропонована авторами [1, 2], виявилася ефективною і при дослідженні питань стійкості множин. Питання стійкості інваріантних та інтегральних множин деяких класів імпульсних систем досліджено в роботах [11 – 15]. Наведемо окремі з встановлених у цих роботах ре-

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України.

© М. О. ПЕРЕСТЮК, О. С. ЧЕРНІКОВА, 2008

зультати, які характеризують їх зміст.

У роботі [11] вивчається питання асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad t \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x, \tag{1}$$

де $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathfrak{I}_m)$; $P(\varphi)$, $B(\varphi) \in C(\mathfrak{I}_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — малий параметр; $\tau_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$, $\tau_j > t_0$, t_0 — початковий момент, і системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad t \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = B(\varphi)x + I(\varphi, x), \tag{2}$$

де $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x) \in C(\mathfrak{I}_m)$,

$$\|f(\varphi, x)\| \leq a\|x\|, \quad \|I(\varphi, x)\| \leq a\|x\| \tag{3}$$

при всіх $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, $\|x\| \leq h$, $h > 0$, $a > 0$.

Відносно послідовності $\{\tau_j\}$ вважається, що рівномірно відносно $t \geq t_0$ існує скінченна границя

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p, \tag{4}$$

де $i(t, t+T)$ — кількість точок послідовності $\{\tau_j\}$, що належать проміжку $[t, t+T]$. Нехай Ω_φ — ω-гранична множина додатної півтраєкторії розв'язку $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, $t \in [0, +\infty)$, першого рівняння системи (1), $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \Omega_\varphi$.

Для систем (1) і (2) встановлено наступні достатні умови асимптотичної стійкості тривіального інваріантного тора.

Теорема 1 [11]. *Нехай у системі* (1) *послідовність* $\{\tau_j\}$ *задовольняє умову* (4).

Тоді якщо виконується нерівність

$$\gamma + p\ln\alpha < 0, \tag{5}$$

де $\gamma = \max\limits_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi\in\Omega}} \text{Re}\big(\lambda_j(P(\varphi))\big)$, $\alpha^2 = \max\limits_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \varphi\in\Omega}} \lambda_j\big((E + B(\varphi))^T(E + B(\varphi))\big)$, *то при достатньо малих значеннях* $\varepsilon > 0$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ *системи* (1) *є асимптотично стійким.*

Теорема 2 [11, 12]. *Нехай у системі* (2) *послідовність* $\{\tau_j\}$ *задовольняє умову* (4).

Тоді якщо виконується нерівність (5) *і функції* $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ *задовольняють умову* (3) *з достатньо малим значенням* a, *то при достатньо малих значеннях* $\varepsilon > 0$ *тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ *системи* (2) *є експоненціально стійким.*

Важливим моментом у цих теоремах є те, що власні значення матриць достатньо розглядати на множині Ω, а не на всьому торі. При доведенні використовується метод заморожування.

Для дослідження стійкості інваріантних та інтегральних множин застосовується також другий метод Ляпунова, точніше, узагальнення другого методу Ляпунова [1, 2] на випадок імпульсних систем. У роботі [11] розглядається система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = f(\varphi, x), \quad t \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_j} = I(\varphi, x), \tag{6}$$

де $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\Im_m)$; $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ — задані в області $Z = \{\varphi \in \Im_m, x \in \bar{J}_h\}$, де $\bar{J}_h = \{x \in R^n, \|x\| \leq h, h > 0\}$, неперервні та 2π-періодичні по φ_ν, $\nu = 1, \ldots$ $\ldots, m$, функції і $f(\varphi, 0) \equiv 0$, $I(\varphi, 0) \equiv 0$ для всіх $\varphi \in \Im_m$.

Послідовність $\{\tau_j\}$ моментів часу імпульсного збурення задовольняє умову

$$\tau_j > \tau_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{i \to \infty} \tau_i = \infty.$$

Поряд з областю Z вводиться до розгляду область $Z_\Omega = \{\varphi \in \Omega, x \in \bar{J}_h\}$, де $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \Im_m} \Omega_\varphi$, а через Ω_φ позначено ω-граничну множину додатної півтраєкторії розв'язку $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $t \in [0, +\infty)$, першого рівняння системи (6).

До розгляду вводяться допоміжні функції (аналоги класичних функцій Ляпунова), визначені і неперервно диференційовні в області Z.

Функція $V(\varphi, x)$ називається додатно визначеною в області Z, якщо в J_h існує неперервна скалярна функція $W(x)$, $W(0) = 0$, така, що

$$V(\varphi, x) \geq W(x) > 0$$

при $x \neq 0$, $\varphi \in \Im_m$.

Функція $V(\varphi, x)$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого додатного числа A існує додатне число R таке, що $V(\varphi, x) > A$, як тільки $\|x\| > R$.

Теорема 3 [11]. *Якщо для системи* (6) *в області* Z *існує додатно визначена нескінченно велика функція* $V(\varphi, x)$ *така, що в області* Z_Ω *задовольняє нерівності*

$$\langle \text{grad}_\varphi V(\varphi, x), a(\varphi) \rangle + \langle \text{grad}_x V(\varphi, x), f(\varphi, x) \rangle \leq 0,$$
$$V(\varphi, x + I(\varphi, x)) - V(\varphi, x) \leq -\psi(V(\varphi, x)),$$

де $\psi(s)$ — *неперервна функція, визначена для всіх* $s \geq 0$, *причому* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$, *то тривіальний інваріантний тор* $x = 0$, $\varphi \in \Im_m$ *системи* (6) *є асимптотично стійким в цілому.*

В [12] досліджено стійкість тривіального інваріантного тора для розривної динамічної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = f(\varphi, x), \quad \varphi \notin \Gamma,$$
$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = I(\varphi, x),$$

де $\varphi \in \Im_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\Im_m)$; $f(\varphi, x)$, $I(\varphi, x)$ — неперервні та 2π-періодичні по φ_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, функції і $f(\varphi, 0) \equiv 0$, $I(\varphi, 0) \equiv 0$ для всіх $\varphi \in \Im_m$; множина Γ — підмножина тора $\Im_m$: $\Gamma = \{\varphi \in \Im_m : \langle b, \varphi \rangle = 0\}$; $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — вектор з цілочисловими додатними координатами, причому виконується умова трансверсальності $\langle a(\varphi), b \rangle|_{\varphi \in \Gamma} \neq 0$.

Слід зазначити, що питання, пов'язані з існуванням і властивостями інваріантних множин для окремих випадків системи (6), розглядалися в [2], а також пізніше в роботі [16]. В [2] встановлено достатні умови існування інваріантної множини вигляду $x = u(\varphi)$ та стійкості такої множини для систем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \notin \Gamma, \quad \Delta x = I(\varphi), \quad \varphi \in \Gamma,$$

і

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad \varphi \notin \Gamma, \quad \Delta x = I(\varphi, x), \quad \varphi \in \Gamma,$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — вектор з додатними компонентами; f, I — неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду на множині Γ) функції, 2π-періодичні по кожній компоненті φ_j, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$; $A(\varphi)$ — неперервна 2π-періодична по кожній компоненті φ_j квадратна матриця. Множина Γ — многовид розмірності $m - 1$, який визначається рівнянням $\Phi(\varphi) = 0$, де $\Phi(\varphi)$ — скалярна функція змінної φ, неперервна і 2π-періодична по кожній компоненті змінної φ.

В [16] розглядаються питання про існування та властивості інваріантної множини вигляду $x = u(\varphi)$, $\varphi \in \Im_m$, $x \in R^n$, для системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \notin \Gamma, \quad \Delta x = I(\varphi), \quad \varphi \in \Gamma.$$

Дослідження зі стійкості розв'язків імпульсних систем, розпочаті А. М. Самойленком і М. О. Перестюком [1, 2], продовжено і доповнено в [17 – 20]. Зокрема, в [17] за допомогою другого методу Ляпунова встановлено достатні умови рівномірної асимптотичної стійкості і достатні умови нестійкості тривіального розв'язку періодичної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу. Наведемо один із встановлених у цій статті результатів.

Нагадаємо [1, 2], що система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= I_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

називається періодичною з періодом $\omega > 0$, якщо $f(t + \omega, x) \equiv f(t, x)$, $t \neq \tau_i$, та існує таке $p \in N$, що $I_{i+p}(x) \equiv I_i(x)$, $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$, $i = 1, 2, \ldots$.

Нехай $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, $G_k = \left\{(t, x) \in R^{n+1} : \tau_{k-1} < t < \tau_k, x \in B_H\right\}$, $B_H = \left\{x \in R^n : \|x\| \leq H\right\}$. У роботі [17] наведено наступні означення.

Функція $g\colon R_+ \to R^m$, $m \in N$, називається фінально ненульовою, якщо для довільного $m > 0$ існує таке $t > M$, що $g(t) \neq 0$.

Числова послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається фінально ненульовою, якщо для довільного натурального числа M існує $k > M$ таке, що $u_k \neq 0$.

Теорема 4 [17]. *Нехай для системи* (7) *існує періодична відносно* t з *періодом* ω *неперервно диференційовна в області* G *функція* $V(t, x)$, *яка задовольняє умови*

$$a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|), \quad a, b \in K,$$

де K — *клас функцій Хана*,

$$\frac{dV}{dt} \le 0 \quad \textit{при} \quad (t, x) \in G,$$

$$\Delta V_i(x) = V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le 0.$$

Якщо вздовж довільного фінально ненульового розв'язку системи (7) *виконується хоча б одна з умов*:

1) $\frac{dV}{dt}$ — *фінально ненульова функція*,

2) *послідовність* $\{V_i\}$ *фінально ненульова*,

то тривіальний розв'язок системи (7) *є рівномірно асимптотично стійким*.

Привертають увагу результати роботи [20], де поряд з достатніми умовами встановлено й необхідні умови стійкості розв'язків імпульсної системи.

В роботах [21 – 24] досліджується поведінка розв'язків імпульсних систем зі структурними збуреннями. При цьому ефективним є застосування матричнозначних функцій Ляпунова. За допомогою вказаного підходу встановлено достатні умови стійкості (асимптотичної стійкості) розв'язків відносно двох мір, достатні умови збереження стійкості відносно двох мір у випадку, коли неперервна система зі структурними збуреннями піддається додатково імпульсному збуренню, а також розглянуто питання, пов'язані з побудовою допоміжних матричнозначних функцій.

У роботі [25] для лінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу

$$\dot{u} = Pu, \quad t \ne \tau_i, \quad u(t^+) = Qu, \quad t = \tau_i, \tag{8}$$

де $u \in K$, $K \subset R^n$ — конус у просторі R^n, $QK \subset K$, $\det Q \ne 0$, функція $f(u) = Pu$ — квазімонотонна відносно конуса K, встановлено достатні умови асимптотичної стійкості відносно конуса K тривіального розв'язку системи (8). Розглянуто питання про практичну та технічну стійкість відносно конуса R_+^n тривіального розв'язку системи (8). Деякі з результатів [25], а також метод порівняння застосовано у [26], де встановлено достатні умови практичної та технічної стійкості положення рівноваги квазілінійної імпульсної системи.

В роботі [27] за допомогою другого методу Ляпунова та принципу порівняння встановлено достатні умови властивостей стійкості тривіального розв'язку імпульсної системи

$$x' = f(t, x, \lambda_k(x_k)), \quad t \in \left(t_k, t_{k+1}\right],$$

$$x(t_k^+) = x_k^+, \quad x_k^+ = x_k + I_k(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_k = x(t_k), \quad I_0(x_0) \equiv 0, \quad x(t_0^+) = x_0,$$

де $f \in C\left[R_+ \times R^n \times R^m, R^n\right]$, $I_k \in C\left\lfloor R^n, R^n \right\rfloor$, $\lambda_k \in C\left\lfloor R^n, R^m \right\rfloor$; $f(t, 0, \lambda_k(0)) \equiv 0$, $I_k(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

У роботі [28] досліджується стійкість так званих „рухомих" інваріантних многовидів для імпульсних систем вигляду

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad t \ne \tau_k, \quad t > t_0, \\ \Delta x(\tau_k) = I_k\left(x(\tau_k), \lambda\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{9}$$

де $f \in C\left(R_+ \times R^n \times R^d, R^n\right)$, $\lambda \in R^d$ — параметр.

Для послідовності $r_k = r_k(\lambda) > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, введено до розгляду многовид $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k$, $\Omega_k = \left\{x \in R^n : (t, x) \in G_k, \|x\| = r_k\right\}$, $G_k = \left\{(t, x) \in R_+ \times R^n : \tau_k < t \leq \tau_{k+1}\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, який називають інваріантним, якщо з рівності $\|x_0\| = r_0$ випливає рівність $\|x(t)\| = r_k$, $t \in \left(\tau_k, \tau_{k+1}\right]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, де $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. Встановлено достатні умови існування інваріантного многовиду вказаної структури для системи (9), а також умови його рівномірної асимптотичної стійкості.

У статті [29] встановлюються достатні умови стійкості (рівномірної, асимптотичної, рівномірної асимптотичної) множин у розширеному фазовому просторі для системи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t > t_0, \quad t \neq \tau_k(x(t)),$$
$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0),$$
$$\Delta x(t)|_{t=\tau_k(x(t))}\tau_k = I_k(x(t)), \quad t > t_0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

У роботі [30] досліджуються деякі властивості розв'язків майже періодичних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. При цьому із застосуванням кусково-неперервних допоміжних функцій встановлено достатні умови асимптотичної стійкості в цілому тривіальному розв'язку розглядуваної імпульсної системи. Питанням існування майже періодичної кусково-неперервної допоміжної функції типу функції Ляпунова для імпульсних систем присвячено роботу [31]. Слід зазначити, що різні властивості розв'язків майже періодичних систем з імпульсним збуренням за допомогою інших методів вивчалися в [1, 2, 32].

Різноманітні питання, пов'язані зі стійкістю та обмеженістю розв'язків різних класів імпульсних систем, розглядалися в публікаціях [33 – 40].

У статті [33] для системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу введено поняття неперервної залежності та рівномірної стійкості розв'язків щодо моментів часу імпульсної дії і встановлено достатні умови таких властивостей розв'язків. Наведемо відповідні означення [33].

Нехай $x(t, t_0, x_0)$ — розв'язок системи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i\big(\tau_i, x(\tau_i)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$
$$x(t_0) = x_0,$$

де $f\colon R_+ \times D \to R^n$, D — область в R^n, $D \neq \varnothing$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$; $I_i\colon R_+ \times D \to R^n$; $t_0 \in R_+,\ x_0 \in D$, а $x^*(t, t_0^*, x_0^*)$ — розв'язок системи

$$\dot{x}^* = f(t, x^*), \quad t \neq \tau_i^*,$$
$$\Delta x^*|_{t=\tau_i} = I_i\big(\tau_i^*, x(\tau_i^*)\big), \quad i = 1, 2, \ldots,$$
$$x^*(t_0^*) = x_0^*,$$

де $t_0^* \in R_+$, $x_0^* \in D$, $t_0^* < \tau_1^* < \tau_2^* < \ldots$.

Розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (10) називається неперервно залежним від моментів імпульсної дії $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$: $\forall (t_0^*, x_0^*) \in R_+ \times D$, $|t_0 - t_0^*| < \delta$, $\|x_0 - x_0^*\| < \delta$, $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x(t, t_0, x_0) - x^*(t, t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon$ для $t \in [\bar{t}_0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle \tau_i, \tau_i^* \rangle$, де

$$\langle \tau_i, \tau_i^* \rangle = \begin{cases} (\tau_i, \tau_i^*], & \tau_i \le \tau_i^*, \\ (\tau_i^*, \tau_i], & \tau_i > \tau_i^*, \end{cases}$$

$$\bar{t}_0 = \max[t_i, t_0^*].$$

Розв'язок $x(t, t_0, x_0)$ системи (10) називається рівномірно стійким відносно моментів імпульсної дії $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall (t_0^*, x_0^*) \in R_+ \times D$, $|t_0 - t_0^*| < \delta$, $\|x_0 - x_0^*\| < \delta$, $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0) - x^*(t, t_0^*, x_0^*)\| < \varepsilon$ для $t \in [\bar{t}_0, \infty] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle \tau_i, \tau_i^* \rangle$.

В [34, 35] встановлено умови, за яких стійкість (нестійкість) у термінах двох мір імпульсної системи випливає з аналогічної властивості певної системи диференціальних рівнянь без імпульсного збурення; результати встановлено за допомогою так званого „варіаційного" методу Ляпунова.

В [36] ідеї другого методу Ляпунова застосовано для встановлення достатніх умов деяких форм обмеженості для систем з імпульсним збуренням у випадкові моменти часу.

В [37] розглядається система диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною і випадковим імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \xi(t)), \quad t \ne t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = I_i(x, \eta_i), \tag{11}$$

де $t \in R$, $x \in R^n$, $i \in Z$. Відносно функцій $f(t, x, y)$, $I_i(x, z)$, $y \in R^k$, $z \in R^l$ і моментів часу t_i вважається, що f періодична по t з періодом T, і при деякому натуральному p виконуються рівності $I_{i+p}(x, z) = I_i(x, z)$, $t_{i+p} = t_i + T$.

Нехай $\xi(t)$ — стохастично неперервний випадковий процес, η_i — послідовність випадкових величин, які задано на деякому ймовірнісному просторі (Ω, F, P) і які набувають значень відповідно в R^k, R^l. Вважається також, що $\xi(t)$ і η_i періодично зв'язані, тобто для $s_1, s_2, \ldots, s_m \in R$, $l_1, l_2, \ldots, l_r \in Z$, $A_1, A_2, \ldots, A_m \in B(R^k)$, $B_1, B_2, \ldots, B_m \in B(R^l)$, де $B(R^k)$, $B(R^l)$ — борелеві σ-алгебри на R^k, R^l,

$$\mathrm{P}\{\xi(s_1 + T) \in A_1, \ldots, \xi(s_m + T) \in A_m, \eta_{l_1 + p} \in B_1, \ldots, \eta_{l_r + p} \in B_r\} =$$
$$= \mathrm{P}\{\xi(s_1) \in A_1, \ldots, \xi(s_m) \in A_m, \eta_{l_1} \in B_1, \ldots, \eta_{l_r} \in B_r\}.$$

Вважається, що функції $f(t, x, y)$, $I_i(x, z)$ вимірні за сукупністю змінних і виконуються умови:

1) існують випадковий локально інтегровний на R процес $B(t)$ і послідовність випадкових величин $L_i(\omega)$ такі, що $|f(x_1, \xi(t)) - f(x_2, \xi(t))| \le B(t) \times$

$\times |x_1 - x_2|$, $|I_i(x_1, \eta_i) - I_i(x_2, \eta_i)| \leq L_i |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in R^n$;

2) для довільного $s \in R$

$$\mathrm{P}\left\{ \int_0^s |f(t, 0, \xi(t))| dt < \infty \right\} = 1;$$

3) відображення A_i: $A_i x = x + I_i(x, z)$ для кожного $z \in R^l$ визначене на всьому просторі R^n і областю його значень є простір R^n.

Розв'язок системи (11) — це випадковий процес $x(t, \omega)$, що з імовірністю 1 на інтервалі $(t_i, t_{i+1}]$ задовольняє перше із співвідношень (11), а при $t = t_i$ — друге.

Встановлено такий результат.

Теорема 5 [37]. *Нехай для системи* (11) *виконуються умови* 1 – 3. *Тоді для існування T-періодичного і періодично зв'язаного з* $\xi(t)$ *і* η_i *її розв'язку необхідно і достатньо, щоб ця система мала розв'язок* $y(t)$, *який рівномірно відносно* $k = 1, 2, \ldots$ (*або* $k = -1, -2, \ldots$) *задовольняє умову*

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}\{|y(iT)| > r\} \to 0$$

при $r \to \infty$.

За допомогою цього результату в [37] досліджується існування періодичних розв'язків окремих класів систем із випадковим імпульсним збуренням (систем із малим збуренням, лінійних та близьких до них систем). Наведемо, наприклад, одержаний при цьому результат для випадку, коли системи (10) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \xi(t), \quad t = t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + \eta_i. \tag{12}$$

Тут $\xi(t)$ і η_i — випадковий процес і послідовність випадкових величин, які задовольняють наведені вище умови, а також умови

$$\int_0^T \mathrm{M}|\xi(t)| dt < \infty, \qquad \sum_{i=1}^{p} \mathrm{M}|\eta_i| < \infty.$$

$A(t)$, B_i, $\xi(t)$ і η_i вважаються комплекснозначними.

Нехай $X(t)$ — матрицант лінійної однорідної імпульсної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x. \tag{13}$$

Теорема 6 [37]. *Для того щоб для довільного вказаного вище випадкового процесу* $\xi(t)$ *і послідовності випадкових величин* η_i *система* (12) *мала єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності T-періодичний і періодично зв'язаний з* $\xi(t)$ *і* η_i *розв'язок* $x(t)$ *такий, що* $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathrm{M}|x(t)| < \infty$, *необхідно і достатньо, щоб спектр матриці монодромії* $X(T)$ *системи* (13) *не перетинався з одиничним колом, тобто* $\sigma(X(T)) \cap S = \varnothing$, *де* $S = \{\lambda \in C \mid \|\lambda\| = 1\}$.

Теорема 6 поширює відповідний результат для лінійної періодичної імпульсної системи [2] на клас імпульсних систем з випадковим збуренням.

Питання про існування періодичних розв'язків імпульсних рівнянь досліджуються також в [38], де встановлено достатні умови існування єдиного періодичного по змінній t розв'язку $u(t, x)$ слабконелінійної системи рівнянь з частинними похідними з імпульсною дією

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial x} + f\big(t, x, u, (t, x), u'_x(t, x)\big), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=t_i} = B\frac{\partial u}{\partial x} + I_i(x, u, u'_x), \qquad u(t, 0) = 0,$$

де $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $I_i = (I_i^{(1)}, \ldots, I_i^{(m)})$, A, B — сталі $(n \times n)$-матриці, функції f, I_i задовольняють співвідношення

$$f(t, x, u, u'_x) = f(t+T, x, u, u'_x), \qquad I_{i+p}(x, u, u'_x) = I_i(x, u, u'_x)$$

для деякого натурального числа p, T — період системи, $-\infty < t < +\infty$; $|x| \leq a$, $\|u\| \leq h$, $\|u'_x\| \leq l$.

Велика кількість досліджень останніх років пов'язана з властивостями розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсним збуренням (див. [39 – 44]). Як і вище, вкажемо лише основні результати, встановлені в цьому напрямку за останні роки. При цьому, як і вище, ми зберігаємо позначення, які введені авторами вказаних робіт.

У статтях [39, 40] продовжено дослідження руху осцилятора під дією імпульсних сил, розпочаті в [2]. В [39] вивчаються періодичні розв'язки лінійного диференціального рівняння з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=\tau_k} = I_k, \quad I_k \in R, \quad k \in Z,$$

і лінійного рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

у випадку, коли імпульсне збурення відбувається у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення, і імпульсну дію можна описати таким чином:

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_0} = I(\dot{x}).$$

У статті [40] детально досліджено питання про існування періодичних розв'язків та поведінку фазових траєкторій диференціального рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу (імпульсне збурення відбувається у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$)

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad x \neq x_*,$$

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_*} = I(\dot{x}),$$

де $I(y)$ — неперервна функція свого аргументу.

Ряд публікацій присвячено дослідженню коливності розв'язків рівнянь другого порядку з імпульсною дією, а також стійкості розв'язків. Так, в [41] встановлено достатні умови коливності розв'язків рівняння

$$x'' + f(t, x) = 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k,$$

$$x\big(t_k^+\big) = g_k(x(t_k)), \qquad x'\big(t_k^+\big) = h_k\big(x'(t_k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, $x'(t_k) = \lim\limits_{h\to -0} \dfrac{x(t_k+h)-x(t_k)}{h}$, $x\left(t_k^+\right) = \lim\limits_{h\to +0} \dfrac{x(t_k+h)-x\left(t_k^+\right)}{h}$.

В [42] вивчаються осциляційні властивості розв'язків рівняння з імпульсною дією

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad t \ne t_k,$$

$$x(t_k+0) = x(t_k), \qquad \dot{x}(t_k+0) = b_k\dot{x}(t_k).$$

В [43] розглядається рівняння другого порядку з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\left(p(t)y'(t)\right)' = f\left(t, y(t)y'(t)\right), \quad t \ne t_k, \quad t \ge 0,$$

$$y(t_k^+) - y(t_k) = I_k\left(y(t_k)\right), \qquad y'(t_k^+) - y'(t_k) = J_k\left(y'(t_k)\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $p: [0,\infty) \to (0,\infty)$ — неперервна функція і $\int_0^t \dfrac{1}{p(s)} ds \to \infty$ при $t \to \infty$; f: $[0,\infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to (0,\infty)$ — неперервна функція, яка є неспадною відносно другого і третього аргументів; функції I_k і $J_k: \mathbf{R} \to (0,\infty)$ є неперервними і неспадними, $k = 1, 2, \ldots$; $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n < \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$. Встановлено достатні умови існування розв'язків $y(t)$ розглядуваного рівняння, визначених на $[0,\infty)$, які мають властивості такого роду: $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)y'(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)y'(t) \in$ $\in (0,\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)y'(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)y'(t) \in (-0,\infty)$.

Привертає увагу підхід, за допомогою якого в роботі [44] досліджуються осциляційні властивості розв'язків рівняння другого порядку з імпульсною дією. Встановлено необхідні і достатні умови коливності розв'язків імпульсного рівняння вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)\right) = 0, \quad t \in (t_0, +\infty) \setminus T, \\
x(t+0) = x(t-0) = x(t), \quad t \in (t_0, +\infty) \cap T, \\
\Delta\frac{dx(t)}{dt} + g\left(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)\right) = 0, \quad t \in (t_0, +\infty) \cap T,
\end{gathered} \tag{14}$$

де $m \in N$ і f: $([0,+\infty)\setminus T) \times E^{m+1} \to E$ і g: $T \times E^{m+1} \to E$ — неперервні відображення, E — дійсний банахів простір, T — довільна зліченна множина дійсних чисел t_n, $n \in N$, для якої $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$; $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — додатні числа, $\Delta\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d_+x(t)}{dt} - \dfrac{d_-x(t)}{dt}$, $\dfrac{d_-x(t)}{dt}$ і $\dfrac{d_+x(t)}{dt}$ — відповідно ліва і права похідні розв'язку $x(t)$ в точці t, $t_0 \in [0,+\infty)\setminus T$. Вводяться до розгляду: E_1 — довільний підпростір простору E, для якого $\operatorname{codim} E_1 = 1$, φ — довільний неперервний функціонал на E з ядром $\ker\varphi = E_1$, $E_2 = \{e \in E$: $\varphi(e) > 0\}$, $E_3 = \{e \in E$: $\varphi(e) > 0\}$, X_+ — множина всіх розв'язків $x = x(t)$ системи (10), для яких $\varphi(x(t)) > 0$ при досить великих $t > 0$, X_- — множина всіх розв'язків $x = x(t)$, для яких $\varphi(x(t)) < 0$ для досить великих $t > 0$.

Розв'язок $x = x(t)$ називається осцилюючим щодо простору E_1, якщо для довільного числа $a > 0$ знайдуться такі числа $s_1,\ s_2 \in (a, +\infty)$, що $\varphi(x(s_1)) \times \times\, \varphi(x(s_2)) < 0$. В роботі [44] встановлено необхідні і достатні умови виконання співвідношення $X_+ \cup X_- \neq \varnothing$. Виконання останнього співвідношення очевидним чином пов'язане із питанням про осциляцію розв'язків системи (14) щодо простору E_1.

У припущенні, що

$$f(s, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s) f_k(x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

$$g(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) g_k(x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

де $(s, x_0, x_1, \ldots, x_m) \in ([0, +\infty) \setminus T) \times E^{m+1}$, $(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) \in T \times E^{m+1}$, $n \in N$, $p_k\colon (0, +\infty) \setminus T \to (0, +\infty)$, $k = \overline{1, n}$, — неперервні обмежені функції, $q_k\colon T \to \to (0, +\infty)$, $k = \overline{1, n}$, — довільні відображення і $f_k\colon E^{m+1} \to E$, $g_k\colon E^{m+1} \to E$, $k = \overline{1, n}$, — неперервні відображення, для яких $f_k E_i^{m+1} \subset E_i$, $g_k E_i^{m+1} \subset E_i$ для всіх $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, 3}$, доведено наступні твердження.

Теорема 7 [44]. *Нехай*:

A) $\displaystyle \inf_{s \geq t \geq \tau} \frac{\varphi\big(f_k(z(s), z(s-\tau_1), \ldots, z(s-\tau_m))\big)}{\varphi\big(f_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m))\big)} > 0$

і

$$\inf_{s \geq t \geq \tau} \frac{\varphi\big(g_k(z(s), z(s-\tau_1), \ldots, z(s-\tau_m))\big)}{\varphi\big(g_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m))\big)} > 0$$

для всіх $z \in \Phi_2 \cup \Phi_3$, $k = \overline{1, n}$; *через* Φ_k *позначено множину неперервних на* $[0, +\infty)$ *і диференційовних на* $[0, +\infty)$ *функцій* $z = z_k(t)$ *із значеннями в* E_k, $k = 1, 2$, *для кожної з яких* $|\varphi(z_k(t))|$ — *монотонна неспадна на* $[0, +\infty)$ *функція*; $\tau = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$;

B) *невласні інтеграли*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi(z(t))}{\varphi\big(f_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m))\big)}, \quad k = \overline{1, n},$$

і числові ряди

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{\Delta\varphi\big(z(t_{l-1})\big)}{\varphi\big(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1), \ldots, z(t_l-\tau_m))\big)}, \quad k = \overline{1, n},$$

збігаються для всіх $z \in \Phi_2 \cup \Phi_3$;

C) *виконується співвідношення* $X_+ \cup X_- \neq \varnothing$.

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} t p_k(t)\, dt + \sum_{t \in T} t q_k(t) \right) < +\infty. \tag{15}$$

Теорема 8 [44]. *Нехай відображення* f_k *і* g_k, $k = \overline{1, n}$, *локально ліпшицеві або цілком неперервні і виконується співвідношення* (15). *Тоді для системи* (14) *для досить великого* t_0 *справджується нерівність* $X_+ \cup X_- \neq \varnothing$.

Ряд досліджень, пов'язаних із вивченням якісної поведінки розв'язків деяких класів імпульсних систем, здійснено за допомогою методів теорії глобальних атракторів динамічних систем. У роботі [45] досліджується якісна поведінка розв'язків задачі

$$\partial_t u(t) + Au(t) + B(u(t)) = g(t), \tag{16}$$

$$u(\tau) = u_\tau,$$

$$u(t_i + 0) - u(t_i) \in \psi_i(u(t_i)), \quad i \in Z, \tag{17}$$

де (16) — двовимірна система рівнянь Нав'є – Стокса у функціональній постановці [46] із фазовим простором H, T-періодичною правою частиною g. Розв'язки задачі (16) зазнають у фіксовані моменти часу $\{t_i\}$ імпульсних збурень (17), величина яких характеризується багатозначними функціями $\{\psi_i : H \mapsto \beta(H)\}$ (через $\beta(H)$ позначено сукупність усіх непорожніх обмежених підмножин H). Вважається, що $g \in L_\infty(R; H)$, $g(t+T) \equiv g(t)$, $t_{i+p} = t_i + T$, $t_0 < 0 < t_1 < \ldots < t_p < T$, $\psi_{i+p} = \psi_i$, ψ_i — компактнозначне, опуклозначне, напівнеперервне зверху відображення. Доведено, що всі розв'язки розглядуваної задачі в фазовому просторі притягуються з часом до компактної, в певному сенсі мінімальної множини.

В роботах [47, 48] методами теорії глобальних атракторів неавтономних динамічних систем вивчається якісна поведінка розв'язків імпульсно збурених нескінченновимірних систем. Зокрема, доведено, що система нелінійних рівнянь типу реакції-дифузії, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення у фіксовані моменти часу (розглянуто затухаючий, періодичний та трансляційно-компактний характер збурень) породжує неавтономну динамічну систему, для якої у фазовому просторі існує компактна притягуюча множина — глобальний атрактор.

Як зазначалося вище, цикл публікацій (в тому числі дві монографії) пов'язано з дослідженням властивостей розв'язків крайових задач [9, 10, 49 – 52]. В роботі [49] уперше було розглянуто періодичні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією із застосуванням теорії псевдообернених матриць. Тут показано, що лінеаризована періодична крайова задача є фредгольмовою, та досліджено слабконелінійну задачу як в некритичному, так і в найбільш складному для дослідження критичному, або резонансному випадку. Потім цей підхід було застосовано для загальних нетерових крайових задач [50, 51] та для імпульсних систем із запізненням [52]. Характерним для цих задач є те, що в них кількість крайових умов не збігається з розмірністю диференціальної системи, тобто розглядаються як недовизначені крайові задачі для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією, так і перевизначені. В подальшому результати розгляду таких імпульсних крайових задач з нетеровим оператором у лінійній частині ввійшли до монографій [9, 10].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 282 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapure: World Sci., 1995. – 462 p.
3. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Устойчивость решений импульсных систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 98 – 111.
4. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнения второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750 – 762.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Там же. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56 – 64.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Интегральные множества одного

класса дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1987. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики).

8. *Lakshmikantham V., Leela S., Kaul S.* Comparison principle for impulsive differential equations with variable times and stability theory // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1994. – **22**, № 4. – P. 499 – 503.
9. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
11. *Дудзяний І. О., Перестюк М. О.* Про стійкість тривіального інваріантного тора одного класу систем з імпульсним збуренням // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – С. 338 – 349.
12. *Perestyuk N., Doudzianiy S.* Stability of invariant toruses of impulsive systems // Proc. XXV Summer School „Applications of Mathematics in Engineering and Economics" (Sozopol, 1999). – Sofia: Heron Press, 2000. – P. 28 – 32.
13. *Perestyuk N., Chernikova O.* Some conditions for stability of invariant sets of discontinuous dynamical systems // Ibid. – P. 25 – 27.
14. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Про стійкість інваріантних множин розривних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 1. – С. 78 – 84.
15. *Perestyuk N., Chernikova O.* On the stability of integral sets of impulsive differential systems // Math. Notes. – 2001. – **2**, № 1. – P. 49 – 60.
16. *Schneider K., Kostadinov S. I., Stamov G. T.* Integral manifolds of impulsive differential equations defined on torus // Proc. Jap. Acad.Ser. A. – 1999. – **75**. – P. 53 – 57.
17. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Мат. заметки. – 2004. – **76**, вып. 1. – С. 44 – 51.
18. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. – 2003. – **194**, № 10. – С. 117 – 132.
19. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* Исследование устойчивости по части переменных импульсных систем методом функций Ляпунова // Избр. тр. 8-го междунар. сем. „Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (STAB-04). – М.: Ин-т пробл. управления РАН, 2004. – С. 53 – 61.
20. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1035 – 1043.
21. *Martynyuk A. A., Stavroulakis I. P.* Stability analysis of linear impulsive differential systems under structural perturbation // Там же. – 1999. – **51**, № 6. – С. 784 – 795.
22. *Martynyuk A. A., Stavroulakis I. P.* Stability analysis with respect to two measures of impulsive systems under structural perturbations // Там же. – № 11. – С. 1476 – 1484.
23. *Martynyuk A. A., Begmuratov K. A.* Analytical construction of the hierarchical matrix Lyapunov function for impulsive systems // Там же. – 1997. – **49**, № 4. – С. 548 – 557.
24. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 2. – С. 134 – 144.
25. *Двирный А. И, Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 37 – 43.
26. *Двирный А. И.* Достаточные условия практической и технической устойчивости квазилинейных импульсных систем // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 1. – С. 135 – 141.
27. *Lakshmikantham V., Liu X.* Impulsive hybrid systems and stability theory // Dynam. Systems and Appl. – 1998. – № 7. – P. 1 – 9.
28. *Stamov G. T.* Stability of moving invariant manifolds for impulsive differential equations // J. Techn. Univ. Plovdiv "Fundamental Sci. and Appl.". – 1999. – **7**. – P. 99 – 107.
29. *Bainov D. D., Stamova I. M.* Stability of sets for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations // Communs Appl. Nonlinear Anal. – 1998. – **5**, № 1. – P. 69 – 81.
30. *Stamov G. T.* Asymptotic stability in the large of the solutions of almost periodic impulsive differential equations // Note Math. – 2005. – **25**, № 2. – P. 75 – 83.
31. *Stamov G. T.* Almost periodic functions of Lyapunov for impulsive differential equations // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A. Math. Anal. – 2002. – **9**. – P. 339 – 351.
32. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 9. – С. 1475 – 1483.
33. *Angelova J., Dishliev A.* Continuous dependence and uniform stability of solutions of impulsive differential equations on impulsive moments // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1997. – **28**, № 5. – P. 825 – 835.
34. *Kou C., Zhang S., Wu S.* Stability analysis in terms of two measures for impulsive differential equations // J. London Math. Soc. – 2002. – **66**, № 2. – P. 142 – 152.

35. *Kou C., Zhang S., Duan Y.* Variational Lyapunov method and stability analysis for impulsive delay differential equations // Comput. and Math. Appl. – 2003. – **46**. – P. 1761 – 1777.
36. *Wu S., Meng X.* Boundedness of nonlinear differential with impulsive effect on random moments // Acta math. appl. sinica. English Ser. – 2004. – **20**, № 1. – P. 147 – 154.
37. *Перестюк Н. А., Самойленко А. М., Станжицкий А. Н.* О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1061 – 1079.
38. *Перестюк Н. А., Ткач А. Б.* Периодические решения слабонелинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием // Там же. – 1997. – **49**, № 4. – С. 601 – 605.
39. *Самойленко В. Г., Єлгондиєв К. К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Там же. – № 1. – С. 141 – 148.
40. *Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Собчук В. В.* Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Там же. – 1999. – **51**, № 6. – С. 827 – 834.
41. *Chen Yong-shao, Feng Wei-zhen.* Oscillations of second order nonlinear ODE with impulses // J. Math. Anal. and Appl. – 1997. – **210**. – P. 150 – 169.
42. *Graef J., Karsai J.* Intermittant and impulsive effect in second order systems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1997. – **30**, № 3. – P. 1561 – 1571.
43. *Cheng D., Yan J.* Global existence and asymptotic behaviour of solutions of second-order nonlinear impulsive differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2001. – **25**, № 3. – P. – 175 – 182.
44. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Умови існування неколивних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсним збуренням у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 790 – 798.
45. *Перестюк М. О.* Глобальні атрактори еволюційних неавтономних рівнянь без єдиності розв'язку // Київ. нац. ун-т. Наук. зап. – 2004. – **8**. – С. 81 – 87.
46. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 289 с.
47. *Капустян А. В., Перестюк Н. А.* Глобальный аттрактор эволюционного включения с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1058 – 1068.
48. *Kapustyan O. V., Iovane G.* Global attractors for impulsive reaction-diffusion equation // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 319 – 328.
49. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1516 – 1521.
50. *Бойчук А. А., Хращевская Р. Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 221 – 225.
51. *Самойленко А. М., Бойчук А. А.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Там же. – 1992. – **44**, № 4. – С. 564 – 568.
52. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 10. – С. 1677 – 1682.

Одержано 15.10.07