УДК 517.956.223

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. технол. ун-т)

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ДВУСТОРОННЕЙ УТОЧНЕННОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ

A regular elliptic boundary-value problem over a bounded domain with smooth boundary is studied. We prove that the operator of this problem is a Fredholm one in the two-sided refined scale of the functional Hilbert spaces and generates a complete collection of isomorphisms. Elements of this scale are the Hörmander – Volevich – Paneyakh isotropic spaces and some their modifications. An a priori estimate for the solution is established and its regularity is investigated.

Вивчається регулярна еліптична крайова задача в обмеженій області з гладкою межею. Доведено, що оператор цієї задачі є фредгольмовим у двобічній уточненій шкалі функціональних гільбертових просторів та породжує там повний набір ізоморфізмів. Елементами цієї шкали є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха та деякі їх модифікації. Встановлено апріорну оцінку розв'язку та досліджено його регулярність.

Введение. В работах Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса [1] и Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [2 – 5] установлены теоремы о полном наборе изоморфизмов, который осуществляет оператор регулярной эллиптической краевой задачи в двусторонней шкале пространств функций/распределений. Полнота набора означает, что указанные изоморфизмы выполняются между пространствами функций/распределений, которые имеют соответственно s и $s - 2q$ производных, где s — *произвольное* вещественное число, а $2q$ — порядок оператора. Позитивная часть двусторонней шкалы ($s \geq 2q$) состоит из пространств Соболева, а негативная часть ($s < 2q$) — из модифицированных специальным образом соболевских пространств. Известны две такие модификации. Модификация Лионса – Мадженеса состоит из некоторых *сужений* соболевских пространств, что позволяет обеспечить непрерывность краевых операторов в них. Иной подход предложен Я. А. Ройтбергом [3 – 5] и основывается на *расширении* соболевских пространств. Более точно, обобщенное решение краевой задачи трактуется как вектор, компоненты которого принадлежат соболевским пространствам и связаны определенным образом между собой. Это позволило исследовать эллиптическую краевую задачу, правые части которой являются произвольными распределениями.

Теоремы о полном наборе изоморфизмов были доказаны Я. А. Ройтбергом [5] также для нерегулярных эллиптических краевых задач и краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений. В наиболее общем виде они установлены А. Н. Кожевниковым [6] для псевдодифференциальных эллиптических краевых задач. Эти теоремы имеют ряд важных приложений (см. [5] и приведенную там библиографию). Среди них особое место занимают утверждения о повышении локальной гладкости решения эллиптической краевой задачи. В этой связи является актуальным изучение эллиптических задач в двусторонних шкалах пространств, дающих более тонкую градацию гладкостных свойств распределений, чем соболевская шкала. К их числу относится гильбертова шкала специальных изотропных пространств Хермандера – Волевича – Панеяха [7 – 10]

$$H^{s,\varphi} := H_2^{\langle\cdot\rangle^s\,\varphi(\langle\cdot\rangle)}, \quad \langle\xi\rangle := \left(1+|\xi|^2\right)^{1/2},$$

где $s \in \mathbb{R}$, а функциональный параметр φ является медленно меняющейся на $+\infty$ по Карамата функцией $t \gg 1$. В частности, допустима любая эталонная функция

$$\varphi(t) = (\log t)^{r_1}(\log\log t)^{r_2}\ldots(\log\ldots\log t)^{r_n}, \quad \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта *уточненная* шкала изучена в [11, 12]. Она содержит соболевскую шкалу $\{H^s\} \equiv \{H^{s,1}\}$, привязана к ней числовым параметром s, но намного тоньше ее.

Пространства $H^{s,\varphi}$ естественно возникают в ряде спектральных задач: сходимость спектральных разложений самосопряженных эллиптических операторов почти всюду, по норме пространства L_p с $p > 2$ или C (см. обзор [13]); спектральная асимптотика общих самосопряженных эллиптических операторов в ограниченной области, формула Г. Вейля, точная оценка остаточного члена в ней (см. [14, 15]) и др. Можно ожидать, что они окажутся полезными и в иных „тонких" вопросах. Благодаря своим интерполяционным свойствам $H^{s,\varphi}$ занимают особое место среди пространств обобщенной гладкости, которые все активнее исследуются и используются в последние годы (см. обзор [16], недавние работы [17, 18] и приведенную в них библиографию).

В настоящей статье изучается регулярная эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств, негативная часть которой модифицирована по Ройтбергу. Доказано, что оператор этой задачи ограничен, фредгольмов и порождает полный набор изоморфизмов в такой шкале. Исследована уточненная локальная гладкость решения эллиптической задачи. В качестве приложения дано достаточное условие классичности обобщенного решения задачи.

Отметим для полноты изложения, что в позитивной части уточненной шкалы неоднородная эллиптическая краевая задача изучена ранее в [19, 12, 20]. *Полуоднородные* эллиптические краевые задачи можно исследовать в *двусторонних* уточненных шкалах *без* их модификации (см. [21, 22]). Однако, неоднородная краевая задача в негативной части шкалы не сводится к двум полуоднородным, так как их решения являются распределениями разной природы. Случай эллиптических операторов в двусторонней уточненной шкале пространств на замкнутом компактном многообразии исследован авторами в [23 – 25]. Отметим также работы [26, 27], где эллиптическая краевая задача изучалась в двусторонних модифицированных шкалах пространств Лизоркина – Трибеля и Никольского – Бесова.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей Γ, которая является бесконечно гладким замкнутым многообразием размерности $n-1$. Предполагается, что область Ω локально расположена по одну сторону от Γ. Обозначим $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Рассмотрим следующую неоднородную краевую задачу в области Ω:

$$A\,u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j\,u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q. \tag{1.1}$$

Здесь и далее A — линейное дифференциальное выражение в $\overline{\Omega}$ произвольного четного порядка $2q \geq 2$, а B_j, $j = 1, \ldots, q$, — граничное линейное дифференциальное выражение на Γ порядка $m_j \leq 2q-1$. Все коэффициенты выражений A и B_j являются комплекснозначными функциями, бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$ и на Γ соответственно. Положим $B := (B_1, \ldots, B_q)$.

Всюду далее предполагается, что краевая задача (1.1) является *регулярной эллиптической*. Это означает [1, с. 137, 138; 28, с. 167], что выражение A правильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$, а набор граничных выражений B нормальный и удовлетворяет условию дополнительности по отношению к A на Γ. Из условия нормальности следует, что порядки m_j граничных дифференциальных выражений все различны.

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим краевую задачу

$$A^{+}v=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j^{+}v=h_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j=1,\ldots,q. \tag{1.2}$$

Она формально сопряжена к задаче (1.1) относительно формулы Грина:

$$(Au,v)_{\Omega}+\sum_{j=1}^{q}(B_j u,\, C_j^{+}v)_{\Gamma}=(u,A^{+}v)_{\Omega}+\sum_{j=1}^{q}(C_j u,\, B_j^{+}v)_{\Gamma}, \quad u,v\in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,),$$

где A^{+} — сопряженное к A линейное дифференциальное выражение порядка $2q$ с коэффициентами класса $C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)$, а $\{B_j^{+}\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^{+}\}$ — некоторые нормальные системы линейных дифференциальных граничных выражений с коэффициентами класса $C^{\infty}(\Gamma)$. Их порядки удовлетворяют условию

$$\operatorname{ord}B_j+\operatorname{ord}C_j^{+}=\operatorname{ord}C_j+\operatorname{ord}B_j^{+}=2q-1.$$

Здесь через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ и $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ обозначены скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ функций, интегрируемых с квадратом в Ω и на Γ соответственно, а также естественные расширения по непрерывности этих скалярных произведений.

Положим

$$N:=\Big\{u\in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)\colon Au=0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \ B_j u=0 \ \text{ на } \ \Gamma \ \text{ для } \ j=1,\ldots,q\Big\},$$

$$N^{+}:=\Big\{v\in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)\colon A^{+}v=0 \ \text{ в } \ \Omega, \ \ B_j^{+}v=0 \ \text{ на } \ \Gamma \ \text{ для } \ j=1,\ldots,q\Big\}.$$

Поскольку задачи (1.1) и (1.2) являются регулярными эллиптическими, пространства N и N^{+} конечномерны [1, с. 191; 28, с. 168].

Для простоты формулировок предположим в этом пункте, что $N=N^{+}=\{0\}$.

Напомним следующий классический результат [1, с. 191; 28, с. 169]: оператор (A,B), соответствующий задаче (1.1), определяет топологический изоморфизм

$$(A,B)\colon H^{s}(\Omega)\leftrightarrow H^{s-2q}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{q}H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) \quad \text{при} \quad s\geq 2q, \tag{1.3}$$

где $H^{\sigma}(\Omega)$ и $H^{\sigma}(\Gamma)$, $\sigma\in\mathbb{R}$, — гильбертовы пространства Соболева в Ω и на Γ соответственно.

Легко заметить, что этот результат не верен в случае произвольного вещественного s. Так, при $s\leq m_j+1/2$ нельзя задать на пространстве $H^{s}(\Omega)$ граничный дифференциальный оператор B_j. Я. А. Ройтбергом [3], [5] (п. 2.4) (см. также [4] (гл. III, § 6), [29] (п. 7.9)) предложено следующее определение обобщенного решения краевой задачи (1.1), устраняющее этот недостаток.

В окрестности границы Γ запишем дифференциальные выражения A и B_j в виде

$$A = \sum_{k=0}^{2q} A_k \, D_\nu^k \quad \text{и} \quad B_j = \sum_{k=0}^{m_j} B_{j,k} \, D_\nu^k. \tag{1.4}$$

Здесь $D_\nu := i\,\partial/\partial\nu$, где ν — орт внутренней нормали к границе Γ, а A_k и $B_{j,k}$ — некоторые тангенциальные дифференциальные выражения. Проинтегрировав по частям, запишем следующую формулу Грина:

$$(Au, v)_\Omega = (u, A^+ v)_\Omega - i \sum_{k=1}^{2q} (D_\nu^{k-1} u, A^{(k)} v)_\Gamma \tag{1.5}$$

для произвольных функций $u, v \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Здесь $A^{(k)} := \sum_{r=k}^{2q} D_\nu^{r-k} A_r^+$, где A_r^+ — дифференциальное выражение, сопряженное к A_r. С помощью предельного перехода убеждаемся, что формула (1.5) справедлива для каждого распределения $u \in H^{2q}(\Omega)$. Обозначим

$$u_0 := u \quad \text{и} \quad u_k := (D_\nu^{k-1} u) \restriction \Gamma \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, 2q. \tag{1.6}$$

В силу (1.4), (1.5) краевая задача (1.1) относительно искомой функции $u \in H^{2q}(\Omega)$ равносильна системе условий

$$(u_0, A^+ v)_\Omega - i \sum_{k=1}^{2q} (u_k, A^{(k)} v)_\Gamma = (f, v)_\Omega \quad \text{для любого} \quad v \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,), \tag{1.7}$$

$$\sum_{k=0}^{m_j} B_{j,k} \, u_{k+1} = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q. \tag{1.8}$$

Заметим, что эти условия имеют смысл в случае произвольных (вообще говоря, нерегулярных) распределений

$$u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{supp} u_0 \subseteq \overline{\Omega}, \quad u_1, \ldots, u_{2q} \in \mathcal{D}'(\Gamma). \tag{1.9}$$

Здесь, как обычно, через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ обозначены линейные топологические пространства Шварца распределений в $\mathbb{R}^n$ и на Γ соответственно. Поэтому введем следующее определение.

Вектор $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$, удовлетворяющий условию (1.9), называется *обобщенным* (*по Ройтбергу*) *решением* краевой задачи (1.1), если выполняются условия (1.7), (1.8).

Мы будем изучать обобщенные решения задачи (1.1) в специально подобранных парах гильбертовых пространств, построенных на основе семейства пространств

$$\bigl\{\, H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \colon \; s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M} \bigr\}.$$

Оно изучено авторами в [12] и названо *уточненной* шкалой в $\mathbb{R}^n$. Определение пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ приведено в п. 2. Здесь отметим лишь, что это пространство гильбертово и состоит из распределений в $\mathbb{R}^n$, гладкость которых охарактеризована с помощью двух параметров — числового s и функционального φ. Последний пробегает достаточно широкое множество $\mathcal{M}$, состоящее из медленно меняющихся (по Карамата) на $+\infty$ функций, и уточняет основную (степенную) гладкость, задаваемую параметром s. В частном случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. В случае $s \geq 0$ обозначим через $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ гильбертово пространство сужений в область Ω всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Далее, в случае $s < 0$ обозначим через $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ пространство, сопряженное к пространству $H^{-s,\,1/\varphi,(0)}(\Omega)$ относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_\Omega$. (Здесь уместно отметить, что $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$.) Кроме того, обозначим через $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ гильбертово пространство распределений на Γ, принадлежащих локально пространству $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. (Детально указанные пространства будут определены в п. 2.) Для каждого $s \in \mathbb{R} \setminus \{1/2, 3/2, \ldots, 2q-1/2\}$ положим

$$K_{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) := \Big\{ (u_0, u_1, \ldots, u_{2q})\colon u_0 \in H^{s,\varphi,(0)}(\Omega), \quad u_k \in H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma),$$

$$k = 1, \ldots, 2q, \quad \text{причем} \quad u_k = (D_\nu^{k-1} u) \restriction \Gamma, \quad \text{если} \quad s > k - 1/2 \Big\}. \tag{1.10}$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1.1. *В предположении $N = N^+ = \{0\}$ оператор (A, B), соответствующий задаче* (1.1), *определяет топологический изоморфизм*

$$(A,B)\colon K_{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) \leftrightarrow H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \tag{1.11}$$

для произвольных параметров $s \in \mathbb{R} \setminus \{1/2, 3/2, \ldots, 2q-1/2\}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. При этом решение $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$ задачи (1.1) *понимается как обобщенное.*

Отождествляя функцию $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ с вектором $(u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$, компоненты которого вычисляются согласно (1.6), получаем, что операторы (1.3) и (1.11) совпадают на множестве классических решений $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ краевой задачи (1.1). Это множество плотно в пространствах $H^s(\Omega)$ и $K_{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$, являющихся областями определения указанных операторов.

Более общее утверждение, чем теорема 1.1, приведено и доказано в п. 5.

2. Уточненные шкалы пространств. Сначала приведем определение уточненной шкалы в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [12]). Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех функций $\varphi\colon [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ таких, что:

а) φ измерима по Борелю на полуоси $[1,+\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1,b]$, где $1 < b < +\infty$;

в) функция φ является медленно меняющейся на $+\infty$ по Карамата, т. е. [30] (п. 1.1)

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda\, t)}{\varphi(t)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ пространство всех медленно растущих распределений $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi<\infty.$$

Здесь интеграл берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle=(1+\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения возьмем величину

$$\bigl(u,v\bigr)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}:=\int \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2\bigl(\langle\xi\rangle\bigr)\,\widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{v}(\xi)}d\xi.$$

Она естественным образом порождает норму. Отметим, что мы рассматриваем распределения, являющиеся *антилинейными* функционалами.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — частный изотропный гильбертов случай пространств, рассмотренных Л. Хермандером [7, с. 54; 8, с. 13] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [9, с. 14; 10, с. 45]. В частном случае $\varphi\equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)=H^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$ порядка s. В общем случае справедливы включения

$$\bigcup_{\varepsilon>0}H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)=:H^{s+}(\mathbb{R}^n)\subset H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\subset H^{s-}(\mathbb{R}^n):=\bigcap_{\varepsilon>0}H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).\qquad(2.1)$$

Они означают, что в семействе гильбертовых сепарабельных пространств

$$\bigl\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathcal{M}\bigr\}$$

функциональный параметр φ *уточняет* основную (степенную) s-гладкость. Поэтому это семейство естественно назвать *уточненной* шкалой в $\mathbb{R}^n$ (по отношению к соболевской шкале).

Теперь, следуя стандартной процедуре, определим аналоги пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для областей $\overline{\Omega}$ и Ω (см. [22]).

Обозначим

$$H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n):=\bigl\{u\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon \operatorname{supp}u\subseteq\overline{\Omega}\bigr\}.$$

Отметим, что $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово сепарабельное пространство относительно скалярного произведения в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Далее, положим

$$H^{s,\varphi}(\Omega):=\Bigl\{u\restriction\Omega\colon u\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\Bigr\},$$

$$\|\,v\,\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)}:=\inf\Bigl\{\,\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\colon\ u=v\ \text{ в }\ \Omega\Bigr\}.$$

Пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ сепарабельное и гильбертово, поскольку норма в нем порождена скалярным произведением

$$\bigl(v_1,v_2\bigr)_{H^{s,\varphi}(\Omega)}:=\bigl(u_1-\Pi u_1,u_2-\Pi u_2\bigr)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь $u_j\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $u_j=v_j$ в Ω, $j=1,\,2$, а Π — ортопроектор пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $\bigl\{u\in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n): \operatorname{supp}u\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\Omega\bigr\}$.

Таким образом, пространство $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ состоит из распределений, сосредоточенных в замкнутой области $\overline{\Omega}$, а пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ — из распределений, заданных в открытой области Ω. Отметим следующие их свойства [22] (теорема 3.2). Множество

$$C_0^\infty(\Omega) := \bigl\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon \operatorname{supp} u \subset \Omega\bigr\}$$

плотно в $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, а множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ — в $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Пространства $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ взаимно сопряжены с равенством норм относительно расширения по непрерывности полуторалинейной формы $(u,v)_\Omega$, где $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Заметим здесь, что пространство $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ определено, поскольку $1/\varphi \in \mathcal{M}$.

Рассмотрим также пространства распределений на многообразии Γ. Возьмем конечный атлас из C^∞-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, где $j = 1,\ldots,k$. Здесь открытые множества U_j составляют конечное покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,k$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$. Положим

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) :=$$

$$:= \Bigl\{\, g \in \mathcal{D}'(\Gamma) \colon (\chi_j\, g) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \ \text{ для } \ j = 1,\ldots,k \Bigr\},$$

$$\bigl(g_1, g_2\bigr)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{k} \bigl((\chi_j\, g_1) \circ \alpha_j, (\chi_j\, g_2) \circ \alpha_j\bigr)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{2.2}$$

Здесь $h \circ \alpha_j$ — представление распределения $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ в локальной карте α_j. Скалярное произведение (2.2) естественным образом порождает норму в пространстве $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Это пространство гильбертово сепарабельное и с точностью до эквивалентных норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы [12] (п. 3). Множество $C^\infty(\Gamma)$ плотно в $H^{s,\varphi}(\Gamma)$.

Отметим далее следующее [12] (п. 3). Если $s > 1/2$, то для каждой функции $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ определен по замыканию ее след на границе Γ — функция $u \restriction \Gamma \in$ $\in H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)$. При этом

$$H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma) = \bigl\{u \restriction \Gamma \colon u \in H^{s,\varphi}(\Omega)\bigr\},$$

$$\|\, g \,\|_{H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)} \asymp \inf\left\{\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} \colon\ u \restriction \Gamma = g\right\}.$$

В случае $s < 1/2$ нельзя корректно определить след произвольного распределения $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ на границе Γ. Вводимые ниже пространства $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, лишены этого недостатка.

Определим для каждого целого $r \geq 0$ шкалу пространств

$$\bigl\{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) \colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\bigr\}. \tag{2.3}$$

Она сыграет центральную роль при изучении эллиптической краевой задачи (1.1).

Пусть сначала $r = 0$. В случае $s \geq 0$ обозначим через $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ гильбертово пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$. В случае $s < 0$ обозначим через $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ гильбертово пространство $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, сопряженное к пространству $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ относительно полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

С точки зрения приложений к дифференциальным операторам удобна трактовка пространства $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ как пополнения линеала $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по соответствующей норме. Действительно, пространство $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ при $s \geq 0$ совпадает с пополнением линеала $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по норме пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Далее заметим, что естественно отождествлять функции из пространства $L_2(\Omega) = H^0(\Omega)$ с их продолжениями нулем в $\mathbb{R}^n$; в этом смысле $L_2(\Omega) = H^0_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. При таком отождествлении получим в силу (2.1) включения

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\,\overline{\Omega}\,) \subset L_2(\Omega) = H^0_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) \quad \text{при} \quad s < 0.$$

Отсюда следует, что функции класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ (продолженные нулем в $\mathbb{R}^n$) образуют плотный линеал в пространстве $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ при $s < 0$. Значит, это пространство является пополнением множества функций $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по норме

$$\sup\left\{\frac{\left|(u,v)_\Omega\right|}{\|v\|_{H^{-s,1/\varphi}(\Omega)}}\colon\; v \in H^{-s,1/\varphi}(\Omega), \;\; v \neq 0\right\}.$$

Пусть теперь $r \in \mathbb{N}$. Положим $E_r := \{k - 1/2\colon k = 1, \ldots, r\}$. В случае $s \in \mathbb{R}\setminus E_r$ обозначим через $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ пополнение линейного пространства $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по норме

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{r} \left\|(D_\nu^{k-1}u) \restriction \Gamma\right\|^2_{H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Эта норма гильбертова, следовательно, и пространство $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ гильбертово. Оно сепарабельно, как будет показано ниже в п. 4.

В случае $s \in E_r$ определим пространство $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ посредством интерполяции:

$$H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) := \left[H^{s-\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega),\; H^{s+\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega)\right]_{1/2} \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.4}$$

Определение использованного здесь интерполяционного метода приведено в п. 3. В п. 7 будет показано, что пространство (2.4) с точностью до эквивалентных норм не зависит от ε.

Семейство гильбертовых сепарабельных пространств (2.3) называем *модифицированной* по Ройтбергу уточненной шкалой порядка r. В случае $\varphi \equiv 1$ (пространства Соболева) эта шкала введена и изучена Я. А. Ройтбергом [3], [5] (п. 2.4) (см. также [4] (гл. III, § 6), [28, с. 171], [29] (п. 7.9)).

В силу определения модифицированной шкалы оператор следа $u \mapsto u \restriction \Gamma$, $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора, действующего из пространства $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ в пространство $H^{s-1/2,\varphi}(\Gamma)$ при любых $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$. Более того, для произвольного $u \in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ корректно определен по формулам (1.6) посредством замыкания вектор $(u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$. Поэтому можно трактовать u как обобщенное решение $(u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$ задачи (1.1).

3. Интерполяция с функциональным параметром. Интерполяция с функциональным параметром пар гильбертовых пространств — это естественное обобщение классического интерполяционного метода [1, с. 21 – 23; 28, с. 251] на случай, когда в качестве параметра интерполяции вместо степенной берется более общая функция. Приведем определение и некоторые свойства такой интерполяции. Для наших целей достаточно ограничиться сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 будем называть *допустимой*, если пространства X_0, X_1 сепарабельные и справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.

Пусть задана допустимая пара $X := [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств. Как известно [1, с. 22], для X существует такой изометрический изоморфизм $J\colon\ X_1 \leftrightarrow \leftrightarrow X_0$, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J называется *порождающим* для пары X, этот оператор определяется парой X однозначно.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех функций, заданных, положительных и измеримых по Борелю на полуоси $(0, +\infty)$. Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. Поскольку спектр оператора J является подмножеством полуоси $(0, +\infty)$, в пространстве X_0 определен как функция от J оператор $\psi(J)$. Область определения оператора $\psi(J)$ есть линейное многообразие, плотное в X_0. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением графика

$$(u, v)_{X_\psi} = (u, v)_{X_0} + (\psi(J)u, \psi(J)v)_{X_0}.$$

Пространство X_ψ гильбертово сепарабельное, причем справедливо непрерывное плотное вложение $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцию $\psi \in \mathcal{B}$ называем *интерполяционным параметром*, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее условие. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T\colon\ X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T\colon\ X_\psi \to Y_\psi$.

Иными словами, функция ψ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда отображение $X \mapsto X_\psi$ является интерполяционным функтором, заданным на категории допустимых пар X гильбертовых пространств (см. [31], п. 1.2.2). В этом случае будем говорить, что *пространство X_ψ получено в результате интерполяции пары X с функциональным параметром ψ*.

Классический результат [1, с. 41; 28, с. 250 – 255] в теории интерполяции гильбертовых пространств состоит в том, что степенная функция $\psi(t) = t^{\theta}$ порядка $\theta \in (0, 1)$ является интерполяционным параметром. В этом случае θ естественным образом выступает в качестве числового параметра интерполяции и интерполяционное пространство X_ψ обозначается через X_θ. Нам понадобится следующий, более широкий, чем степенной, класс интерполяционных параметров [11] (теорема 2.1, лемма 2.1).

Предложение 3.1. *Пусть функция $\psi \in \mathcal{B}$ ограничена на каждом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < +\infty$. Пусть, кроме того, ψ — правильно меняющаяся на $+\infty$ по Карамата функция порядка θ, где $0 < \theta < 1$, т. е.* [30] (*п.* 1.1)

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(\lambda\, t)}{\psi(t)} = \lambda^{\theta} \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Тогда ψ является интерполяционным параметром. При этом справедливы непрерывные плотные вложения $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Ниже будут использованы следующие свойства интерполяции.

Предложение 3.2 ([19], теорема 4). *Пусть задано конечное число допустимых пар* $\big[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\big]$, $k = 1, \ldots, m$, *гильбертовых пространств. Тогда для любой функции* $\psi \in \mathcal{B}$ *справедливо*

$$\left[\prod_{k=1}^{m} X_0^{(k)},\ \prod_{k=1}^{m} X_1^{(k)}\right]_\psi = \prod_{k=1}^{m} \big[X_0^{(k)},\ X_1^{(k)}\big]_\psi \quad \text{с равенством норм.}$$

Предложение 3.3 ([32], теорема 2). *Пусть интерполяционные параметры* ζ, η, $\chi \in \mathcal{B}$ *удовлетворяют следующему условию: для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют положительные числа* $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ *такие, что*

$$1 \leq c_1(\varepsilon)\,\zeta(t) \leq c_2(\varepsilon)\,\eta(t) \quad \text{и} \quad 1 \leq c_1(\varepsilon)\,\chi(t) \quad \text{при} \quad t > \varepsilon.$$

Тогда для произвольной допустимой пары X *гильбертовых пространств справедливо равенство пространств* $[X_\zeta, X_\eta]_\chi = X_\psi$ *с эквивалентностью норм. Здесь функция* $\psi(t) := \zeta(t)\,\chi\big(\eta(t)/\zeta(t)\big)$ *аргумента* $t > 0$ *является интерполяционным параметром.*

Напомним следующее определение. Линейный ограниченный оператор $T : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *фредгольмовым*, если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность. *Индексом* фредгольмового оператора T называется число $\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim(Y/\,T(X))$.

Предложение 3.4 ([33], предложение 5.2). *Пусть заданы две допустимые пары* $X = [X_0, X_1]$ *и* $Y = [Y_0, Y_1]$ *гильбертовых пространств. Пусть, кроме того, на* X_0 *задано линейное отображение* T, *для которого существуют ограниченные фредгольмовы операторы* $T\colon\ X_j \to Y_j$, $j = 0, 1$, *имеющие общее ядро* N *и одинаковый индекс* κ. *Тогда для произвольного интерполяционного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *ограниченный оператор* $T\colon\ X_\psi \to Y_\psi$ *фредгольмов с ядром* N, *областью значений* $Y_\psi \cap T(X_0)$ *и тем же индексом* κ.

4. Свойства модифицированной уточненной шкалы. Сначала изучим модифицированную шкалу (2.3) порядка $r = 0$. Отметим следующие ее свойства, установленные в [22] (теорема 3.3).

Предложение 4.1. *Пусть* s, $\sigma \in \mathbb{R}$ *и* φ, $\chi \in \mathcal{M}$. *Тогда*:

а) *если* $|s| < 1/2$, *то нормы в пространствах* $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ *и* $H^{s,\varphi}(\Omega)$ *эквивалентны на плотном линейном многообразии* $C_0^\infty(\Omega)$, *что означает следующее равенство пространств с эквивалентностью норм в них*:

$$H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad |s| < 1/2; \tag{4.1}$$

б) *пространства* $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ *и* $H^{-s,1/\varphi,(0)}(\Omega)$ *взаимно сопряжены (при* $s \neq 0$ *с равенством норм, а при* $s = 0$ *с эквивалентностью норм) относительно полуторалинейной формы* $(\cdot,\cdot)_\Omega$;

в) *если* $s < \sigma$, *то справедливо компактное плотное вложение* $H^{\sigma,\chi,(0)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$;

г) *если* $\varphi(t) \leq c\,\chi(t)$ *при* $t \gg 1$ *для некоторого числа* $c > 0$, *то справедливо непрерывное плотное вложение* $H^{s,\chi,(0)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$; *это вложение компактно, если* $\varphi(t)/\chi(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$;

д) *неравенство*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\,\varphi^{2}(t)} < \infty, \tag{4.2}$$

равносильно непрерывности вложения $H^{\rho+n/2,\varphi,(0)}(\Omega) \hookrightarrow C^{\rho}(\,\overline{\Omega}\,)$, *где целое* $\rho \geq 0$; *непрерывность такого вложения влечет его компактность.*

В связи с пунктами в), г) предложения 4.1 отметим следующее. Плотное непрерывное вложение $H^{\sigma,\chi,(0)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ понимается следующим образом. Существует число $c > 0$ такое, что

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{H^{\sigma,\chi,(0)}(\Omega)} \quad \text{для любого} \quad u \in C^{\infty}\big(\,\overline{\Omega}\,\big).$$

Кроме того, тождественное отображение, заданное на плотном линейном многообразии $C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного линейного *инъективного* оператора $I\colon\ H^{\sigma,\chi,(0)}(\Omega) \to H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ (он называется оператором вложения). Аналогично понимается плотное непрерывное вложение $H^{\sigma,\chi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ (см. ниже).

Следующая теорема устанавливает тот факт, что каждое пространство $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ может быть получено в результате интерполяции пары соболевских пространств с подходящим функциональным параметром.

Теорема 4.1. *Пусть заданы функция* $\varphi \in \mathcal{M}$ *и положительные числа* ε, δ. *Положим* $\psi(t) := t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ *при* $t \geq 1$ *и* $\psi(t) := \varphi(1)$ *при* $0 < t < 1$. *Тогда*:

а) *функция* $\psi \in \mathcal{B}$ *является интерполяционным параметром*;

б) *для каждого числа* $s \in \mathbb{R}$ *такого, что* $s - \varepsilon > -1/2$ *или* $s + \delta < 1/2$, *справедливо*

$$\Big[H^{s-\varepsilon,1,(0)}(\Omega),\ H^{s+\delta,1,(0)}(\Omega)\Big]_{\psi} = H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) \quad \textit{с эквивалентностью норм.}$$

Доказательство. *Пункт* а). Непосредственно проверяется, что функция $\psi \in \mathcal{B}$ удовлетворяет условию предложения 3.1, где $\theta = \varepsilon/(\varepsilon+\delta) \in (0,1)$. Следовательно, она является интерполяционным параметром.

Пункт б). Как установлено в [12] (теоремы 3.5, 3.7) и [22] (теорема 3.1), для произвольного $s \in \mathbb{R}$ справедливы следующие равенства пространств с эквивалентностью норм в них:

$$\big[H^{s-\varepsilon,1}(\Omega), H^{s+\delta,1}(\Omega)\big]_{\psi} = H^{s,\varphi}(\Omega), \tag{4.3}$$

$$\Big[H^{s-\varepsilon,1}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^{n}), H^{s+\delta,1}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^{n})\Big]_{\psi} = H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^{n}). \tag{4.4}$$

Если $s - \varepsilon > -1/2$, то в силу (4.1) и (4.3) получаем

$$\Big[H^{s-\varepsilon,1,(0)}(\Omega),\ H^{s+\delta,1,(0)}(\Omega)\Big]_{\psi} =$$

$$= \big[H^{s-\varepsilon,1}(\Omega), H^{s+\delta,1}(\Omega)\big]_{\psi} = H^{s,\varphi}(\Omega) = H^{s,\varphi,(0)}(\Omega).$$

Если $s + \varepsilon < 1/2$, то в силу (4.1) и (4.4) имеем

$$\Big[H^{s-\varepsilon,1,(0)}(\Omega),\, H^{s+\delta,1,(0)}(\Omega)\Big]_{\psi} =$$

$$= \Big[H^{s-\varepsilon,1}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta,1}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Big]_{\psi} = H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi,(0)}(\Omega).$$

Здесь наряду с равенством пространств выполняется эквивалентность норм в них. Пункт б) доказан.

Далее изучим модифицированную шкалу (2.3) порядка $r \in \mathbb{N}$. Нам понадобятся следующие свойства пространства $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, установленные в [12] (теоремы 3.5, 3.6, 3.8).

Предложение 4.2. *Пусть s, $\sigma \in \mathbb{R}$ и φ, $\chi \in \mathcal{M}$. Тогда*:

а) *для произвольных положительных чисел ε, δ справедливо*

$$\big[H^{s-\varepsilon,1}(\Gamma),\, H^{s+\delta,1}(\Gamma)\big]_{\psi} = H^{s,\varphi}(\Gamma) \quad \text{с эквивалентностью норм},$$

где ψ — интерполяционный параметр из теоремы 4.1;

б) *пространства $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ и $H^{-s,1/\varphi}(\Gamma)$ взаимно сопряжены* (*с эквивалентностью норм*) *относительно полуторалинейной формы* $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$;

в) *пункты* в), г) *предложения* 4.1 *сохраняют силу, если в их формулировках заменить пространства $H^{\sigma,\chi,(0)}(\Omega)$, $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$, $H^{s,\chi,(0)}(\Omega)$ на пространства $H^{\sigma,\chi}(\Gamma)$, $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, $H^{s,\chi}(\Gamma)$ соответственно*;

г) *неравенство* (4.2) *равносильно непрерывности вложения $H^{\rho+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow \hookrightarrow C^{\rho}(\Gamma)$, где целое $\rho \geq 0$; непрерывность такого вложения влечет его компактность*;

д) *для любых $k \in \mathbb{N}$, $s > k - 1/2$ линейное отображение $u \mapsto (D_{\nu}^{k-1}u) \restriction \Gamma$, $u \in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора, действующего из пространства $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega)$ в пространство $H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)$.*

Для произвольных $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ положим

$$\Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) \times \prod_{k=1}^{r} H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Кроме того, если $s \notin E_r$, обозначим (см. (1.10))

$$K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma) := \Big\{ (u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma):$$

$$u_k = (D_{\nu}^{k-1}u) \restriction \Gamma \;\text{ для всех }\; k = 1,\ldots,r \;\text{ таких, что }\; s > k - 1/2\Big\}.$$

В силу предложения 4.2 д) $K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$ — (замкнутое) подпространство в $\Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$.

Теорема 4.2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R} \setminus E_r$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда*:

а) *линейное отображение*

$$T_r : u \mapsto \big(u, u \restriction \Gamma, \ldots, (D_{\nu}^{r-1}u) \restriction \Gamma\big), \quad u \in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,), \tag{4.5}$$

продолжается по непрерывности до изометрического изоморфизма

$$T_r\colon\ H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\leftrightarrow K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma); \tag{4.6}$$

б) *для произвольных положительных чисел* ε, δ *таких, что числа* s, $s-\varepsilon$, $s+\delta$ *принадлежат одному из интервалов*

$$\alpha_0:=(-\infty,1/2),\qquad \alpha_k:=(k-1/2,\,k+1/2),\quad k=1,\ldots,r-1,$$
$$\alpha_r:=(r-1/2,+\infty),$$

справедливо

$$\bigl[H^{s-\varepsilon,1,(r)}(\Omega),\,H^{s+\delta,1,(r)}(\Omega)\bigr]_{\psi}=H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\quad \textit{с эквивалентностью норм}, \tag{4.7}$$

где ψ *— интерполяционный параметр из теоремы* 4.1.

Доказательство. В случае $\varphi\equiv 1$ (модификация соболевских пространств) пункт а) установлен Я. А. Ройтбергом [5] (лемма 2.2.1). Выведем отсюда пункт б) для произвольного $\varphi\in\mathcal{M}$, а затем пункт а).

Обозначим через X_ψ левую часть равенства (4.7). Рассмотрим изометрические операторы

$$T_r\colon\ H^{\sigma,1,(r)}(\Omega)\to\Pi_{\sigma,1,(r)}(\Omega,\Gamma),\quad \sigma\in\{s-\varepsilon,s+\delta\}.$$

Применив к ним интерполяцию с параметром ψ, получим ограниченный оператор

$$T_r\colon\ X_\psi\to\bigl[\,\Pi_{s-\varepsilon,1,(r)}(\Omega,\Gamma),\,\Pi_{s+\delta,1,(r)}(\Omega,\Gamma)\,\bigr]_{\psi}. \tag{4.8}$$

В силу предложений 3.2, 4.2 а) и теоремы 4.1 имеем

$$\bigl[\,\Pi_{s-\varepsilon,1,(r)}(\Omega,\Gamma),\,\Pi_{s+\delta,1,(r)}(\Omega,\Gamma)\,\bigr]_{\psi}=$$
$$=\Bigl[H^{s-\varepsilon,1,(0)}(\Omega),\,H^{s+\delta,1,(0)}(\Omega)\Bigr]_{\psi}\times\prod_{k=1}^{r}\Bigl[H^{s-\varepsilon-k+1/2,1}(\Gamma),\,H^{s+\delta-k+1/2,1}(\Gamma)\Bigr]_{\psi}=$$
$$=H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)\times\prod_{k=1}^{r}H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)=\Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$$

с эквивалентностью норм. Следовательно,

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)}=\bigl\|T_r u\,\bigr\|_{\Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)}\le c_1\,\|u\|_{X_\psi}\quad \text{для всех}\quad u\in C^\infty\bigl(\,\overline{\Omega}\,\bigr). \tag{4.9}$$

Здесь c_1 — норма оператора (4.8).

Докажем неравенство, обратное к (4.9). По условию $s,s-\varepsilon,s+\delta\in\alpha_p$ для некоторого номера $p\in\{0,1,\ldots,r\}$. Рассмотрим линейное отображение

$$T_{r,p}:\ u\mapsto\Bigl(u,\ \bigl\{\bigl(D_\nu^{k-1}u\bigr)\restriction\Gamma\colon\ p+1\le k\le r\bigr\}\Bigr),\quad u\in C^\infty\bigl(\overline{\Omega}\bigr).$$

(Как и прежде, индекс k целый.) Это отображение продолжается по непрерывности до топологического изоморфизма

$$T_{r,p}\colon\ H^{\sigma,1,(r)}(\Omega)\ \leftrightarrow\ H^{\sigma,1,(0)}(\Omega)\ \times \prod_{p+1\le k\le r} H^{\sigma-k+1/2,1}(\Gamma),\quad \sigma\in\{s-\varepsilon,s+\delta\}. \tag{4.10}$$

Действительно, существование и ограниченность оператора (4.10) следует из определения пространства $H^{\sigma,1,(r)}(\Omega)$. Покажем, что этот оператор биективный. Пусть $u\in H^{\sigma,1,(r)}(\Omega)$,

$$\Bigl(u_0,\,\{u_k\colon\ p+1\le k\le r\}\Bigr)\in H^{\sigma,1,(0)}(\Omega)\ \times \prod_{p+1\le k\le r} H^{\sigma-k+1/2,1}(\Gamma).$$

Положим $u_k:=(D_\nu^{k-1}u_0)\upharpoonright\Gamma$ при $1\le k\le p$. Распределение u_k определено корректно в силу предложения 4.2 д), поскольку $\sigma>k-1/2$ для указанных номеров k. Заметим, что $\sigma<k-1/2$ при $p+1\le k\le r$. Поэтому $(u_0,u_1,\dots,u_r)\in$ $\in K_{\sigma,1,(r)}(\Omega,\Gamma)$. Как отмечено выше, пункт а) известен в случае $\varphi\equiv 1$. Значит, существуют топологические изоморфизмы

$$T_r\colon\ H^{\sigma,1,(r)}(\Omega)\leftrightarrow K_{\sigma,1,(r)}(\Omega,\Gamma),\quad \sigma\in\{s-\varepsilon,s+\delta\}.$$

Отсюда, поскольку

$$T_r\,u=(u_0,u_1,\dots,u_r)\ \Leftrightarrow\ T_{r,p}\,u=\bigl(u_0,\,\{u_k\colon\ p+1\le k\le r\}\bigr),$$

следует, что ограниченный оператор (4.10) является биективным. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе (4.10) — топологический изоморфизм.

Применим к (4.10) интерполяцию с параметром ψ. В силу предложений 3.2, 4.2 а) и теоремы 4.1 получим топологический изоморфизм

$$T_{r,p}\colon\ X_\psi\ \leftrightarrow\ H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)\ \times \prod_{p+1\le k\le r} H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma). \tag{4.11}$$

Отсюда следует неравенство, обратное к (4.9):

$$\|u\|_{X_\psi}\le c_2\left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)}+\sum_{p+1\le k\le r}\bigl\|(D_\nu^{k-1}u)\upharpoonright\Gamma\bigr\|^2_{H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)}\right)^{1/2}\le$$
$$\le c_2\,\|u\|_{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)}$$

для всех $u\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Здесь c_2 — норма оператора, обратного к (4.11). Таким образом, нормы в пространствах X_ψ и $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ эквивалентны на множестве $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Оно плотно в $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ по определению и в X_ψ в силу предложения 3.1. Следовательно, $X_\psi=H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ с точностью до эквивалентных норм. Пункт б) доказан.

Докажем пункт а). Согласно определению пространства $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ отображение (4.5) продолжается по непрерывности до изометрического оператора

$$T_r\colon\ H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\to\Pi_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma). \tag{4.12}$$

На основании предложения 4.2 д) справедливо включение $T_r\bigl(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\bigr)\subseteq$ $\subseteq K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$. Докажем обратное включение. Пусть $(u_0,u_1,\dots,u_r)\in$

$\in K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$. В силу (4.11) и равенства $X_\psi = H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ существует топологический изоморфизм

$$T_{r,p}\colon\ H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) \leftrightarrow H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) \times \prod_{p+1\le k\le r} H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Поэтому найдется такое $u \in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$, что

$$T_{r,p}\,u = \bigl(u_0,\ \{u_k\colon\ p+1 \le k \le r\}\bigr).$$

Отсюда в силу предложения 4.2 д) вытекает равенство $T_r\,u = (u_0, u_1, \ldots, u_r)$. Тем самым доказано включение $K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma) \subseteq T_r(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$. Таким образом, $T_r(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)) = K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$, что вместе с изометрическим оператором (4.12) влечет изометрический изоморфизм (4.6). Пункт а) доказан.

Теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $s,\sigma \in \mathbb{R}$ и $\varphi,\chi \in \mathcal{M}$. Тогда*:

а) *гильбертово пространство $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ сепарабельное*;

б) *множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в пространстве $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$*;

в) *если $s > r - 1/2$, то $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega)$ с эквивалентностью норм*;

г) *пункты* в), г) *предложения* 4.1 *сохраняют силу, если в их формулировках в обозначениях пространств заменить* (0) *на* (r).

Доказательство. *Пункт* а). Для $s \notin E_r$ сепарабельность пространства $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ вытекает из теоремы 4.2 а) и сепарабельности пространства $K_{s,\varphi,(r)}(\Omega,\Gamma)$. Если $s \in E_r$, то пространство $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ сепарабельно в силу (2.4) как результат интерполяции сепарабельных гильбертовых пространств.

Пункт б) в случае $s \notin E_r$ содержится в определении пространства $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$. Если $s \in E_r$, то в силу (2.4) и предложения 3.1 справедливо непрерывное плотное вложение $H^{s+\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Поскольку $s+\varepsilon \notin E_r$, множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в пространстве $H^{s+\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega)$. Следовательно, это множество плотно и в пространстве $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$.

Пункт в). Если $s > r - 1/2$, то в силу предложения 4.2 д) нормы в пространствах $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ и $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega)$ эквивалентны на плотном линейном многообразии $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Следовательно, эти пространства равны.

Пункт г) для $s,\ \sigma \notin E_r$ вытекает из предложений 4.1 в), г) и 4.2 в) в силу теоремы 4.2 а). Если $\{s,\sigma\} \cap E_r \ne \varnothing$ и $s < \sigma$, то в силу (2.4) и предложения 3.1 для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ справедливы непрерывные плотные вложения

$$H^{\sigma,\chi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma-\varepsilon,\chi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s+\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(r)}(\Omega).$$

Наконец, если $s \in E_r$, то в силу (2.4) имеем

$$H^{s\mp\varepsilon,\chi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s\mp\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad H^{s,\chi,(r)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(r)}(\Omega),$$

причем наследуется как непрерывность, так и компактность [31] (п. 1.16.4) вложений.

Теорема 4.3 доказана.

5. Эллиптическая краевая задача в модифицированной уточненной шкале. Напомним, что краевая задача (1.1) регулярная эллиптическая, а N и N^+ — конечномерные бесконечно гладкие ядра операторов задач (1.1) и (1.2) соответственно.

Теорема 5.1. *Для произвольных параметров $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$ линейное отображение*

$$(A, B)\colon\ u \to (Au, B_1 u, \ldots, B_q u), \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{5.1}$$

продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$(A, B)\colon\ H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \to H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma). \tag{5.2}$$

Этот оператор фредгольмов. Его ядро совпадает с N, а область значений равна множеству

$$\Bigl\{(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)\colon\ (f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \ \text{ для всех } \ v \in N^+\Bigr\}. \tag{5.3}$$

Индекс оператора (5.2) *равен* $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от* s, φ.

Доказательство. В соболевском случае $\varphi \equiv 1$ эта теорема установлена Я. А. Ройтбергом [5] (теоремы 4.1.1 и 5.3.1). Отсюда мы выведем общий случай $\varphi \in \mathcal{M}$ с помощью интерполяции.

Сначала предположим, что $s \notin E_{2q}$. Пусть положительное число $\varepsilon = \delta$ такое, как в теореме 4.2 б). Отображение (5.1) продолжается по непрерывности до ограниченных фредгольмовых операторов

$$(A, B)\colon\ H^{s\mp\varepsilon,1,(2q)}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s\mp\varepsilon,1}(\Omega, \Gamma). \tag{5.4}$$

Они имеют общие ядро N, дефектное подпространство

$$\bigl\{(v, C_1^+ v, \ldots, C_q^+ v)\colon\ v \in N^+\bigr\} \tag{5.5}$$

и индекс $\dim N - \dim N^+$. Применим к (5.4) интерполяцию с функциональным параметром ψ из теоремы 4.1. В силу предложения 3.4 получим ограниченный фредгольмов оператор

$$(A, B)\colon\ \bigl[H^{s-\varepsilon,1,(2q)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,1,(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi \to \bigl[\mathcal{H}_{s-\varepsilon,1}(\Omega, \Gamma), \mathcal{H}_{s+\varepsilon,1}(\Omega, \Gamma)\bigr]_\psi.$$

Он означает существование оператора (5.2), удовлетворяющего условию настоящей теоремы. Это вытекает из теорем 4.1 б), 4.2 б) и предложений 3.2, 4.2 а).

Предположим теперь, что $s \in E_{2q}$. Выберем произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$. Поскольку $s \mp \varepsilon \notin E_{2q}$, существуют, как было доказано, ограниченные фредгольмовы операторы

$$(A, B)\colon\ H^{s\mp\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s\mp\varepsilon,\varphi}(\Omega, \Gamma),$$

имеющие общие ядро N, дефектное подпространство (5.5) и индекс $\dim N - \dim N^+$. Применив к этим операторам интерполяцию со степенным параметром $t^{1/2}$, получим в силу предложения 3.4 и формулы (2.4) ограниченный фредгольмов оператор

$$(A,B)\colon\ H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)\to[\mathcal{H}_{s-\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma)]_{1/2}\,. \tag{5.6}$$

Он имеет те же ядро, дефектное подпространство и индекс.

Покажем, что

$$\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma)\big]_{1/2}=\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)\quad \text{с эквивалентностью норм.} \tag{5.7}$$

Пусть число $\delta>0$ такое, что $s-\varepsilon-\delta>-1/2$ (это возможно, поскольку $s\geq 1/2$). На основании теоремы 4.1 и предложений 3.2, 4.2 a) запишем

$$\mathcal{H}_{s\mp\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma)=[\mathcal{H}_{s-\varepsilon-\delta,1}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon+\delta,1}(\Omega,\Gamma)]_{\psi_\mp}\quad \text{с эквивалентностью норм.}$$

Здесь интерполяционные параметры $\psi_\mp$ определяются по формулам

$$\psi_-(t):=t^{\delta/(2\varepsilon+2\delta)}\varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)}),$$

$$\psi_+(t):=t^{(2\varepsilon+\delta)/(2\varepsilon+2\delta)}\varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)})\quad \text{при}\quad t\geq 1$$

и $\psi_\mp(t):=1$ при $0<t<1$. Отсюда в силу теоремы 3.3 о повторной интерполяции получаем следующие равенства пространств с эквивалентностью норм в них:

$$\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma)\big]_{1/2}=$$

$$=\Big[\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon-\delta,1}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon+\delta,1}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi_-},\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon-\delta,1}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon+\delta,1}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi_+}\Big]_{1/2}=$$

$$=\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon-\delta,1}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon+\delta,1}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}. \tag{5.8}$$

Здесь интерполяционный параметр ψ определяется по формулам

$$\psi(t):=\psi_-(t)\,(\psi_+(t)/\psi_-(t))^{1/2}=t^{(\varepsilon+\delta)/(2\varepsilon+2\delta)}\varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)})\quad \text{при}\quad t\geq 1$$

и $\psi(t)=1$ при $0<t<1$. Поэтому на основании тех же теоремы 4.1 и предложений 3.2, 4.2 a) имеем

$$\big[\mathcal{H}_{s-\varepsilon-\delta,1}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}_{s+\varepsilon+\delta,1}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}=\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)\quad \text{с эквивалентностью норм.} \tag{5.9}$$

Теперь равенства (5.8), (5.9) влекут формулу (5.7).

В силу (5.7) ограниченный фредгольмов оператор (5.6) означает существование оператора (5.2), удовлетворяющего условию настоящей теоремы.

Теорема 5.1 доказана.

Как отмечалось выше, теорема 5.1 уточняет применительно к шкале пространств $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ известный результат Я. А. Ройтберга о свойствах эллиптической краевой задачи в модифицированной шкале соболевских пространств [3, 5] (см. также [28, с. 169; 4, с. 248]). В этой теореме s — *произвольное* вещественное число. Поэтому фредгольмовость оператора задачи установлена в *двусторонней* (иначе говоря, *полной*) модифицированной уточненной шкале пространств. Заметим, что этот оператор оставляет инвариантным параметр $\varphi\in\mathcal{M}$, характеризующий уточненную гладкость.

В силу теоремы 4.2 a) равенство $(A,B)u=f$, где $u\in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$, $f\in\in\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, равносильно тому, что вектор $(u_0,u_1,\ldots,u_{2q}):=T_{2q}u$ является обобщенным решением по Ройтбергу задачи (1.1). Указанный элемент u часто отождествляется с вектором $(u_0, u_1, \ldots, u_{2q})$ и также называется обобщенным решением задачи (1.1).

Из теоремы 4.3 в) вытекает, что оператор (5.2) совпадает с оператором

$$(A, B)\colon\ H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) \quad \text{при} \quad s > 2q - 1/2.$$

Его фредгольмовость установлена в [12] (теорема 4.1).

В частном случае $N = N^+ = \{0\}$ оператор (5.2) является топологическим изоморфизмом в силу теоремы 5.1 и теоремы Банаха об обратном операторе. Следовательно, теорема 5.1 содержит теорему 1.1. В общем случае изоморфизм удобно задавать с помощью следующих проекторов (ср. [5], леммы 4.1.2 и 5.3.2).

Лемма 5.1. *Для произвольных $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$ существуют следующие разложения пространств $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$ в прямые суммы замкнутых подпространств*:

$$H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) = N \dotplus \Big\{u \in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)\colon\ (u_0, w)_\Omega = 0 \quad \forall w \in N\Big\}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) = \big\{\,(v, 0, \ldots, 0)\colon\ v \in N^+\big\} \dotplus (A, B)\big(H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)\big). \tag{5.11}$$

Здесь u_0 — начальная компонента вектора $(u_0, u_1, \ldots, u_{2q}) := T_{2q}u$. Обозначим через P косой проектор пространства $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ на второе слагаемое суммы (5.10), *а через Q^+ косой проектор пространства $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$ на второе слагаемое суммы* (5.11) (*паралельно первому слагаемому*). *Эти проекторы не зависят от s, φ.*

Доказательство. Докажем (5.10). Из определения пространства $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ вытекает, что отображение $u \mapsto u_0$ является ограниченным оператором T_0 : $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \to H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$. Поэтому второе слагаемое суммы (5.10) — замкнутое подпространство. Оно имеет тривиальное пересечение с N. В силу предложения 4.1 б) и конечномерности подпространства N справедливо разложение

$$H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = N \dotplus \Big\{u_0 \in H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)\colon\ (u_0, w)_\Omega = 0 \ \text{ для любого } \ w \in N\Big\}.$$

Обозначим через Π косой проектор на первое слагаемое этой суммы параллельно второму слагаемому. Для произвольного $u \in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ запишем $u = u' + u''$, где $u' := \Pi u_0 \in N$, а $u'' := u - \Pi u_0 \in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ удовлетворяет условию $(u_0'', w)_\Omega = (u_0 - \Pi u_0, w)_\Omega = 0$ при любом $w \in N$. Равенство (5.10) доказано.

Равенство (5.11) вытекает из того, что в силу теоремы 5.1 подпространства, записанные в сумме (5.11), замкнутые, имеют тривиальное пересечение и конечная размерность первого пространства совпадает с коразмерностью второго. Независимость проекторов P и Q^+ от параметров s, φ вытекает из включений $N, N^+ \subset C^\infty(\overline{\Omega})$.

Лемма 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Для произвольных параметров $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ сужение оператора* (5.2) *на подпространство $P(H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega))$ является топологическим изоморфизмом*

$$(A, B)\colon\ P\big(H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)\big) \leftrightarrow Q^+\big(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)\big). \tag{5.12}$$

Доказательство. Согласно теореме 5.1, N — ядро, а $Q^+(\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ — область значений оператора (5.2). Следовательно, оператор (5.12) — биекция. Кроме того, он ограничен. Значит, оператор (5.12) является топологическим изоморфизмом в силу теоремы Банаха об обратном операторе.

***Замечание* 5.1.** Теорема 5.2 остается верной, если заменить проектор Q^+ на оператор проектирования Q_1^+ пространства $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ на подпространство $(A,B)(H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega))$ параллельно дефектному подпространству (5.5).

Из теоремы 5.2 вытекает следующая априорная оценка решения эллиптической краевой задачи (1.1).

Теорема 5.3. *Для произвольных фиксированных параметров* $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{M}$ *и* $\sigma<s$ *существует число* $c>0$ *такое, что для каждого* $u\in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)}\leq c\,\Big(\big\|(A,B)u\big\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|u\|_{H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)}\Big). \tag{5.13}$$

Доказательство. Пусть $u\in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Поскольку N — конечномерное подпространство в пространствах $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ и $H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)$, нормы в этих пространствах эквивалентны на N. В частности, для функции $u-Pu\in N$ имеет место неравенство

$$\|u-Pu\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)}\leq c_1\,\|u-Pu\|_{H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)}$$

с постоянной $c_1>0$, не зависящей от u. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)}\leq\ & c_1\,\|u-Pu\|_{H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)}+\|Pu\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)}\leq\\ &\leq c_1\,c_2\,\|u\|_{H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)}+\|Pu\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)},\end{aligned} \tag{5.14}$$

где c_2 — норма проектора $1-P$, действующего в пространстве $H^{\sigma,1,(2q)}(\Omega)$. Далее, поскольку $(A,B)Pu=(A,B)u$, то $Pu\in H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ — прообраз распределения $(A,B)u\in\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ при топологическом изоморфизме (5.12). Следовательно,

$$\|Pu\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)}\leq\ c_3\,\|(A,B)u\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)},$$

где c_3 — норма оператора, обратного к (5.12). Отсюда и из неравенства (5.14) вытекает оценка (5.13).

Теорема 5.3 доказана.

6. Локальная гладкость решения. Предположим, что правые части эллиптической краевой задачи (1.1) имеют на некотором открытом в $\overline{\Omega}$ множестве дополнительную гладкость в уточненной шкале пространств. Покажем, что обобщенное решение u унаследует такую же дополнительную гладкость на этом множестве. Предварительно рассмотрим случай дополнительной гладкости во всей области $\overline{\Omega}$.

Теорема 6.1. *Пусть* $s\in\mathbb{R}$. *Предположим, что элемент* $u\in H^{s,1,(2q)}(\Omega)$ *является обобщенным решением задачи* (1.1), *где*

$$f\in H^{s+\varepsilon-2q,\varphi,(0)}(\Omega)\quad\textit{и}\quad g_j\in H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)\quad\textit{при}\quad j=1,\ldots,q$$

для некоторых $\varepsilon\geq 0$ *и* $\varphi\in\mathcal{M}$. *Тогда* $u\in H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)$.

Доказательство. По условию и теореме 5.1 имеем

$$F := (f, g_1, \ldots, g_q) = (A, B)u \in (A, B)\bigl(H^{s,1,(2q)}(\Omega)\bigr) \cap \mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega, \Gamma) =$$
$$= (A, B)\bigl(H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)\bigr).$$

Следовательно, существует такое $v \in H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)$, что $(A, B)v = F$. Отсюда получаем $(A, B)(u - v) = 0$, что в силу теоремы 5.1 влечет $w := u - v \in N \subset$ $\subset C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Таким образом, поскольку $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,) \subset H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)$, справедливо $u = v + w \in H^{s+\varepsilon,\,\varphi,(2q)}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай локальной гладкости. Пусть U — открытое непустое подмножество замкнутой области $\overline{\Omega}$. Положим $\Omega_0 := U \cap \Omega$ и $\Gamma_0 := U \cap \Gamma$ (возможен случай $\Gamma_0 = \varnothing$). Введем следующие локальные аналоги пространств $H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega)$ и $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и целое $r \geq 0$. Положим

$$H^{\sigma,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) := \Biggl\{ u \in \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^{s,1,(r)}(\Omega) \colon$$
$$\chi u \in H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega) \;\; \text{для всех} \;\; \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}),\, \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0 \Biggr\},$$

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) := \bigl\{ h \in \mathcal{D}'(\Gamma) \colon \; \chi\, h \in H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) \;\; \text{для всех} \;\; \chi \in C^\infty(\Gamma), \;\; \operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0 \bigr\}.$$

В связи с определением пространства $H^{\sigma,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ отметим, что для произвольной функции $\chi \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ отображение $u \mapsto \chi u$, $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора в каждом пространстве $H^{s,1,(r)}(\Omega)$ [5] (п. 2.3). Тем самым для $u \in H^{s,1,(r)}(\Omega)$ корректно определено произведение $\chi u \in H^{s,1,(r)}(\Omega)$.

Теорема 6.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Предположим, что элемент $u \in H^{s,1,(2q)}(\Omega)$ является обобщенным решением задачи* (1.1), *где*

$$f \in H^{s+\varepsilon-2q,\varphi,(0)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \quad \text{и} \quad g_j \in H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q \tag{6.1}$$

для некоторых $\varepsilon \geq 0$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда $u \in H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Доказательство. Покажем сначала, что из условия (6.1) вытекает следующее свойство повышения локальной гладкости решения u: для каждого числа $r \geq 1$ справедлива импликация

$$u \in H^{s+\varepsilon-r,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \;\Rightarrow\; u \in H^{s+\varepsilon-r+1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0). \tag{6.2}$$

Выберем произвольно функции χ, η такие, что

$$\chi,\; \eta \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,); \quad \operatorname{supp}\chi,\; \operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0 \quad \text{и} \quad \eta = 1 \quad \text{в окрестности } \operatorname{supp}\chi. \tag{6.3}$$

Переставив оператор умножения на функцию χ с дифференциальными операторами A и B_j, $j = 1, \ldots, q$, для произвольного $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно записать следующие равенства:

$$(A,B)(\chi v)=(A,B)(\chi\eta v)=\chi(A,B)(\eta v)+(A',B')(\eta v)=\chi(A,B)v+(A',B')(\eta v). \tag{6.4}$$

Здесь A' — некоторое линейное дифференциальное выражение в $\overline{\Omega}$, а $B'=(B'_1,\ldots$ $\ldots,\ B'_q)$ — набор граничных линейных дифференциальных выражений на Γ. Коэффициенты этих выражений бесконечно гладкие, а порядки удовлетворяют условиям $\operatorname{ord}A'\leq 2k-1$ и $\operatorname{ord}B'_j\leq m_j-1$. Отсюда следует, что отображение $v\mapsto(A',B')v$, где $v\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$(A',B')\colon\ H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)\to\mathcal{H}_{\sigma+1,\varphi}(\Omega,\Gamma)\quad\text{для произвольного}\quad\sigma\in\mathbb{R}. \tag{6.5}$$

В случае $\varphi\equiv 1$ это доказано в [5] (п. 2.3). Отсюда общий случай $\varphi\in\mathcal{M}$ выводится с помощью интерполяции так же, как и в доказательстве теоремы 5.1. Аналогично доказывается, что оператор умножения на функцию класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ ограничен в пространствах $H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_{\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ для каждого $\sigma\in\mathbb{R}$. Следовательно, равенство (6.4) продолжается по непрерывности на класс функций $v\in H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega)$. Возьмем в этом равенстве $v:=u$, где u — указанное в условии решение задачи (1.1). Запишем

$$(A,B)(\chi u)=\chi F+(A',B')(\eta u). \tag{6.6}$$

Здесь вектор $F:=(f,g_1,\ldots,g_q)$ удовлетворяет в силу (6.1) и (6.3) условию

$$\chi F\in\mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{6.7}$$

Предположим, что $u\in H^{s+\varepsilon-r,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ для некоторого числа $r\geq 1$. Тогда $\eta u\in H^{s+\varepsilon-r,\varphi,(2q)}(\Omega)$, что вместе с формулами (6.5) – (6.7) влечет включение

$$(A,B)(\chi u)\in\mathcal{H}_{s+\varepsilon-r+1,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Отсюда в силу теоремы 6.1 следует свойство $\chi u\in H^{s+\varepsilon-r+1,\varphi,(2q)}(\Omega)$, которое вследствие произвольности выбора функции χ, удовлетворяющей условию (6.3), означает включение $u\in H^{s+\varepsilon-r+1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$. Импликация (6.2) доказана.

Теперь легко вывести теорему из (6.2). В силу теоремы 4.3 г) имеем

$$u\in H^{s,1,(2q)}(\Omega)\subset H^{s+\varepsilon-k,\varphi,(2q)}(\Omega)\subseteq H^{s+\varepsilon-k,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$$

для целого $k>\varepsilon$. Применив импликацию (6.2) последовательно для значений $r=k,\ldots,1$, получим

$$u\in H^{s+\varepsilon-k,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\Rightarrow u\in H^{s+\varepsilon-k+1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\Rightarrow\ldots$$

$$\ldots\Rightarrow u\in H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0),$$

что и требовалось доказать.

В соболевском случае $\varphi\equiv 1$ теоремы 6.1, 6.2 доказаны Я. А. Ройтбергом [3, 5] (гл. 7) (см. также [4], гл. III, § 6).

В качестве приложения теорем 6.1 и 6.2 приведем одно достаточное условие того, что обобщенное по Ройтбергу решение u эллиптической краевой задачи (1.1) является классическим, т. е. удовлетворяет условию

$$u \in H^{\sigma+2q,1}(\Omega) \cap C^{2q}(\Omega) \cap C^{m}\big(\,\overline{\Omega}\,\big), \tag{6.8}$$

где $\sigma > -1/2$, $m := \max\{m_1, \ldots, m_q\}$. Это условие возникает следующим образом. В силу теоремы 4.3 в) и предложения 4.2 д) из включения

$$u \in H^{\sigma+2q,1,(2q)}(\Omega) = H^{\sigma+2q,1}(\Omega)$$

следует, что элемент u является решением задачи (1.1) в смысле теории распределений, заданных в области Ω. Теперь корректно рассматривать включение $u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^{m}(\,\overline{\Omega}\,)$. Оно означает, что в (1.1) функции Au и $B_j u$ вычисляются с помощью классических производных, т. е. решение u является классическим.

Теорема 6.3. *Пусть $s \in \mathbb{R}$. Предположим, что элемент $u \in H^{s,1,(2q)}(\Omega)$ является обобщенным решением задачи* (1.1), *где*

$$f \in H^{n/2,\varphi,(0)}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m-2q+n/2,\varphi,(0)}(\Omega) \cap H^{\sigma,1,(0)}(\Omega), \tag{6.9}$$

$$g_j \in H^{\,m-m_j+(n-1)/2,\,\varphi}(\Gamma) \cap H^{\sigma+2q-m_j-1/2,\,1}(\Gamma) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, q \tag{6.10}$$

для некоторых числа $\sigma > -1/2$ и функционального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего неравенству (4.2). *Тогда решение u является классическим.*

Доказательство. В силу теорем 6.1, 6.2 из условий (6.9), (6.10) вытекает включение

$$u \in H^{2q+n/2,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m+n/2,\varphi,(2q)}(\Omega) \cap H^{\sigma+2q,1,(2q)}(\Omega).$$

Отсюда на основании предложения 4.1 д) и теоремы 4.3 в) имеем

$$u \in H^{m+n/2,\varphi,(2q)}(\Omega) \cap H^{\sigma+2q,1,(2q)}(\Omega) =$$

$$= H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \cap H^{\sigma+2q,1}(\Omega) \subset C^{m}(\,\overline{\Omega}\,) \cap H^{\sigma+2q,1}(\Omega).$$

(Последнее равенство становится понятным, если рассмотреть отдельно случаи $m + n/2 \geq \sigma + 2q$ и $m + n/2 < \sigma + 2q$ и воспользоваться пунктом г) теоремы 4.3.) Кроме того,

$$\chi u \in H^{2q+n/2,\varphi,(2q)}(\Omega) = H^{2q+n/2,\varphi}(\Omega) \subset C^{2q}(\,\overline{\Omega}\,)$$

для любой функции $\chi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, что влечет включение $u \in C^{2q}(\Omega)$. Таким образом, выполняется условие (6.8), т. е. u — классическое решение.

Теорема 6.3 доказана.

7. Корректность определения некоторых пространств. Покажем, что пространство (2.4) не зависит от использованного в его определении параметра ε.

Теорема 7.1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $s \in E_r$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Пространство*

$$H^{s,\varphi,(r)}(\Omega, \varepsilon) := \big[H^{s-\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,\varphi,(r)}(\Omega)\big]_{1/2}$$

не зависит с точностью до эквивалентности норм от параметра $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $r = 2q$ — четное число. Рассмотрим какую-нибудь регулярную эллиптическую краевую задачу (1.1), для которой пространства N и N^{+} тривиальны. (Например, задачу Дирихле для $A := (1-\Delta)^q$, где Δ — оператор Лапласа.) Согласно теореме 5.1 существует топологический изоморфизм

$$(A, B)\colon\ H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega, \varepsilon) \leftrightarrow \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Отсюда непосредственно следует теорема для четного $r = 2q$.

Предположим далее, что число r нечетное. В силу теоремы 4.2 для любого числа $\sigma \in (-\infty, r + 1/2) \setminus E_r$ существуют изометрические изоморфизмы

$$T_r\colon\ H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega) \leftrightarrow K_{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega, \Gamma),$$

$$T_{r+1}\colon\ H^{\sigma,\varphi,(r+1)}(\Omega) \leftrightarrow K_{\sigma,\varphi,(r+1)}(\Omega, \Gamma) = K_{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega, \Gamma) \times H^{\sigma-r-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Поэтому композиция отображений

$$u \mapsto T_{r+1}\, u =: (u_0, u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}) \mapsto (T_r^{-1}(u_0, u_1, \ldots, u_r), u_{r+1}),$$
$$u \in H^{\sigma,\varphi,(r+1)}(\Omega),$$

определяет изометрический изоморфизм

$$T\colon\ H^{\sigma,\varphi,(r+1)}(\Omega) \leftrightarrow H^{\sigma,\varphi,(r)}(\Omega) \times H^{\sigma-r-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Возьмем здесь $\sigma = s \mp \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, и применим интерполяцию со степенным параметром $t^{1/2}$. Получим топологический изоморфизм

$$T\colon\ H^{s,\varphi,(r+1)}(\Omega, \varepsilon) \leftrightarrow H^{s,\varphi,(r)}(\Omega, \varepsilon) \times H^{s-r-1/2,\varphi}(\Gamma) := X(\varepsilon). \tag{7.1}$$

При этом используется предложение 3.2 и интерполяционное равенство

$$\Big[H^{s-\varepsilon-r-1/2,\varphi}(\Gamma),\ H^{s+\varepsilon-r-1/2,\varphi}(\Gamma)\Big]_{1/2} = H^{s-r-1/2,\varphi}(\Gamma)$$

с эквивалентностью норм, которое доказывается аналогично равенству (5.7). Теперь в силу (7.1) имеем

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(r)}(\Omega,\varepsilon)} = \|(u, 0)\|_{X(\varepsilon)} \asymp \|T^{-1}(u, 0)\|_{H^{s,\varphi,(r+1)}(\Omega,\varepsilon)}.$$

Отсюда, поскольку параметр $r + 1$ четный, следует, по доказанному, что нормы в пространствах $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, эквивалентны. Значит, эти пространства равны, поскольку множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в каждом из них согласно теореме 4.3 б).

Теорема 7.1 доказана.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745 – 748.
3. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Там же. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798 – 801.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.

5. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.
6. *Kozhevnikov A.* Complete scale of isomorphisms for elliptic pseudodifferential boundary-value problems // J. London Math. Soc. (2-nd series). – 2001. – **64**, № 2. – P. 409 – 422.
7. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
8. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
9. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
10. *Paneyakh B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin etc.: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244 – 262.
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ibid. – № 3. – P. 398 – 417.
13. *Alimov Sh. A., Il'in V. A., Nikishin E. M.* Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decompositions. I // Rus. Math. Surv. – 1976. – **31**, № 6. – P. 29 – 86.
14. *Mikhailets V. A.* Asymtotics of the spectrum of elliptic operators and boundary conditions // Sov. Math. Dokl. – 1982. – **266**, № 5. – P. 464 – 468.
15. *Mikhailets V. A.* A precise estimate of the remainder in the spectral asymptotics of general elliptic boundary problems // Funct. Anal. and Appl. – 1989. – **23**, № 2. – P. 137 – 139.
16. *Kalyabin G. A, Lizorkin P. I.* Spaces of functions of generalized smoothness // Math. Nachr. – 1987. – **133**, № 1. – P. 7 – 32.
17. *Haroske D. D., Moura S. D.* Continuity envelopes of spaces of generalised smoothness, entropy and approximation numbers // J. Approxim. Theory. – 2004. – **128**. – P. 151 – 174.
18. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
19. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. – 1974. – **29**, № 4. – С. 48 – 58.
20. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679 – 701.
21. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous equation in a two-sided improved scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1748 – 1767.
22. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operator with homogeneous regular boundary conditions in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. Bull. – 2006. – **3**, № 4. – P. 529 – 560.
23. *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 798 – 814.
24. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold // arXiv:0711.2164v1 [math.AP]. – 6 p.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // arXiv:0712.1135v1 [math.AP]. – 23 p.
26. *Мурач А. А.* Эллиптические краевые задачи в полных шкалах пространств типа Лизоркина – Трибеля // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 12. – С. 36 – 39.
27. *Murach A. A.* Elliptic boundary value problems in comlete scales of Nikolskii-type spaces // Ukr. Math. J. – 1994. – **46**, № 12. – P. 1827 – 1835.
28. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
29. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., 79. Pt. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
30. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
31. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
32. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяция с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 13 – 18.
33. *Geymonat G.* Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. – 1965. – **69**. – P. 207 – 284.

Получено 12.12.07