УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We propose an algorithm of the construction of asymptotic two-phase soliton-type solutions of the Korteweg – de Vries equation with a small parameter at the higher derivative.

Предложен алгоритм построения асимптотических двухфазных солитоноподобных решений уравнения Кортевега – де Фриза с малым параметром при старшей производной.

1. Вступ. Рівняння Кортевега – де Фріза [1] є фундаментальним рівнянням сучасної фізики. Значна увага до його вивчення приділяється завдяки існуванню так званих солітонних [2, 3] розв'язків цього рівняння. Як відомо [4], для рівняння Кортевега – де Фріза спочатку було побудовано в явному вигляді односолітонні розв'язки, а потім, за допомогою методу оберненої задачі теорії розсіювання, — дво- та багатосолітонні розв'язки.

Як правило, солітонні розв'язки не можна побудувати у випадку наявності змінних коефіцієнтів у рівнянні Кортевега – де Фріза, а тому для побудови подібних розв'язків у багатьох працях використовувалися асимптотичні методи. Зокрема, в [5 – 12] розглянуто питання про побудову асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами для різних типів сингулярностей. Такі розв'язки при певних значеннях коефіцієнтів є солітонними, а тому вони отримали [5, 6] назву солітоноподібних розв'язків.

У статті [5] показано, що односолітонний розв'язок рівняння Кортевега – де Фріза з малою дисперсією вигляду

$$u_t + 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

при прямуванні малого параметра ε до нуля своєю границею має розривну функцію змінних $(x, t) \in \mathbf{R}^2$. Тому при побудові асимптотичних однофазових солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами [5 – 12] крім розробки алгоритму побудови асимптотичного розв'язку та доведення оцінки його точності доводиться додатково знаходити деяку функцію, що визначає так звану лінію розриву. Аналогічна ситуація має місце і у випадку задачі про знаходження асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза.

Це легко помітити з аналізу формули [4] для (точного) двосолітонного розв'язку рівняння (1):

$$u(x,t,\varepsilon) = 2\,\frac{18 + 24\,\mathrm{ch}\left(2\,\dfrac{x-4t}{\varepsilon}\right) + 6\,\mathrm{ch}\left(4\,\dfrac{x-16t}{\varepsilon}\right)}{\left[\mathrm{ch}\left(2\,\dfrac{x-16t}{\varepsilon} + \dfrac{x-4t}{\varepsilon}\right) + 3\,\mathrm{ch}\left(2\,\dfrac{x-16t}{\varepsilon} - \dfrac{x-4t}{\varepsilon}\right)\right]^2}, \tag{2}$$

який при $|t| > T$ наближено можна подати у вигляді суми двох солітонів

$$u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} 8\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\dfrac{2(x-16t)}{\varepsilon} + C\right) + 2\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\dfrac{(x-4t)}{\varepsilon} + C\right), & t < -T, \\ 8\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\dfrac{2(x-16t)}{\varepsilon} - C\right) + 2\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\dfrac{(x-4t)}{\varepsilon} - C\right), & t > T, \end{cases}$$

де $C = \ln\sqrt{3}$, $T > 0$ — деяка стала.

Очевидно, що при $\varepsilon \to 0$ розв'язок $u(x,t,\varepsilon)$, що визначається формулою (2), поточково прямує до розривної функції вигляду

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} 6\eta(x-16t)+\dfrac{3}{2}\,\eta(x-4t), & t\neq 0,\\[2ex] 6\eta(x), & t=0,\end{cases}$$

де

$$\eta(\xi) \;=\; \begin{cases} 0, & \xi\neq 0,\\[1ex] 1, & \xi=0.\end{cases}$$

У даній статті розглядається питання про побудову двофазових солітоноподібних асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} \;=\; a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \tag{3}$$

де

$$a(x,\varepsilon) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \qquad b(x,\varepsilon) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x),\, b_k(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^1),\ k\geq 0.$

На можливість побудови таких розв'язків у випадку, коли функції $a(x,\varepsilon)$ та $b(x,\varepsilon)$ не залежать від малого параметра, було вказано у [5]. Нижче запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (3) та наведено твердження про порядок точності побудованого асимптотичного розв'язку.

2. Основні припущення і позначення. Будемо припускати, що незбурена $(\varepsilon = 0)$ для (3) задача

$$a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x \;=\; 0$$

має розв'язок $u_0(x,t)$, який є розривним лише на деяких гладких кривих $x = \varphi_s(t)$, $t\in[0;T]$, $s = 1, 2$, для яких виконується умова узгодженості $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Аналогічно до [5] позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються дві такі умови:

1) справджується співвідношення

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau) \;=\; 0, \quad (x,t)\in K,$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\big(f(x,t,\tau)-f^-(x,t)\big) \;=\; 0, \quad (x,t)\in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ — лінійний підпростір простору $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x, t, \tau) = 0.$$

Позначимо через $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, для яких існують функції $f_1^{\pm} = f_1^{\pm}(x, t, \tau_2)$, $f_2^{\pm} = f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \in G_1^0$ такі, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення

$$\lim_{\tau_1 \to \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}} \left(f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^{\pm}(x, t, \tau_2) \right) = 0,$$

$$\lim_{\tau_2 \to \pm\infty} \tau_2^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}} \left(f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \right) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Ці рівності і подібні (аналогічні) далі слід розуміти як окремі співвідношення, у яких змінна, за якою обчислюється границя, прямує лише або до $+\infty$ або ж до $-\infty$.

Нехай $G_2 = G_2(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ — лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, таких, що існують функції $f_1^{\pm} = f_1^{\pm}(x, t, \tau_2)$, $f_2^{\pm} = f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \in G_1$ та нескінченно диференційовні функції $u_1^{\pm}(x, t)$ та $u_2^{\pm}(x, t)$ такі, що довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 виконуються співвідношення

$$\lim_{\tau_k \to \pm\infty} \tau_k^{p_k} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}} \left(f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_k^{\pm}(x, t, \tau_2) - u_k^{\pm}(x, t) \right) = 0,$$

$$(x, t) \in K, \quad k = 1, 2.$$

Означення [5]. *Функція* $u(x, t, \varepsilon)$ *називається асимптотично двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа* $N \geq 0$ *її можна зобразити у вигляді*

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N\left(x, t, \frac{S_1(x, t)}{\varepsilon}, \frac{S_2(x, t)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

де

$$Y_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \right),$$

$$\tau_1 = \frac{S_1(x, t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{S_2(x, t)}{\varepsilon},$$

$S_k = S_k(x, t)$, $k = 1, 2$, — *нескінченно диференційовні функції змінних* $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$, *такі, що* $\left.\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k} \neq 0$, *де* $\Gamma_k = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T],\ S_k(x, t) = 0\}$, $k = 1, 2$; $u_j(x, t)$, $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T]$, $j = \overline{1, N}$, — *нескінченно диференційовні функції*; $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$, $V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2$.

Асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок задачі (3) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \tag{4}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \big(u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2)\big),$$
$$\tau_1 = \frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon},$$

N — довільне (фіксоване) натуральне число.

Функція $U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$ називається регулярною частиною асимптотики (4), а функція

$$V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2),$$

— сингулярною частиною асимптотики (4). При цьому $Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$.

Криві $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, називаються кривими розриву і визначаються у процесі побудови асимптотичного розв'язку.

Відповідно до загальної методології асимптотичних методів для визначення коефіцієнтів асимптотичних розкладів (4), враховуючи вигляд похідних $u_t(x,t,\varepsilon)$, $u_x(x,t,\varepsilon)$, $u_{xxx}(x,t,\varepsilon)$, після їх підстановки в рівняння (3) знаходимо

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{1}{\varepsilon^3}\left[\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_1^3} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_2^3}\right]\right) =$$
$$= a(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1}\varphi_1'(t) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_2}\varphi_2'(t)\right) +$$
$$+ b(x,\varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_2}\right)(U_N + V_N) + g_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon),$$

де $g_N(x,t,\tau,\varepsilon) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$ — деяка нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, що визначається рекурентним (щодо j) чином за функціями $Y_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Спрямовуючи τ_1 до $+\infty$ та τ_2 до $+\infty$, для регулярної частини асимптотики маємо

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0,$$
$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} = F_j(x,t), \quad j = \overline{1, N},$$

де функції $F_j(x,t)$ визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $u_0(x,t)$, $u_1(x,t), \ldots, u_{j-1}(x,t)$, $j = \overline{1, N}$.

3. Визначення сингулярної частини асимптотики. Аналогічно [7, 8] сингулярна частина асимптотики (4) визначається на кожній із кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$. Для знаходження функцій $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$ маємо квазілінійне однорідне рівняння з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1\partial\tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3} =$$
$$= \big[a_0(x)\big(-\varphi_1'(t)\big) + b_0(x)u_0(x,t)\big]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1} +$$

$$+ \left[a_0(x)\left(-\varphi_2'(t)\right) + b_0(x)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + b_0(x)\,V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right], \tag{5}$$

де значення функції $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$ та її похідних обчислюється таким чином: для випадку кривої $x = \varphi_1(t)$ в точці $\left(t, 0, \dfrac{\varphi_1(t)-\varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)$, а для випадку кривої $x = \varphi_2(t)$ в точці $\left(t, \dfrac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{\varepsilon}, 0\right)$, $t \in [0;T]$. При цьому значення функцій $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$ визначаються на відповідних кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$.

Функції $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, визначаються із системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^2\partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_2^3} =$$

$$= \left[a_0(x)\left(-\varphi_1'(t)\right) + b_0(x)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \left[a_0(x)\left(-\varphi_2'(t)\right) + b_0(x)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} +$$

$$+ b_0(x)\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + V_j\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + V_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + V_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right] + \mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2), \quad j = \overline{1,N}, \tag{6}$$

де значення функцій $a_0(x)$, $b_0(x)$, $u_0(x,t)$ визначаються відповідно на кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, а значення функції $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2)$ знаходяться рекурентним чином після визначення значень функцій $V_0(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_1(t,\tau_1,\tau_2), \ldots, V_{j-1}(t,$ $\tau_1, \tau_2)$ на відповідних кривих.

Якщо позначити через $\mathcal{F}_j^s(t,\tau_1,\tau_2)$ значення функції $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2)$ на кривій $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, то, зокрема, будемо мати

$$\mathcal{F}_1^s(t,\tau_1,\tau_2) = b_0(\varphi_s(t))\,V_0^s\,\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x} + a_0(\varphi_s(t))\,\frac{\partial V_0^s}{\partial t} +$$

$$+ \Bigg[\tau_s b_0'(\varphi_s(t))\,V_0^s + b_1(\varphi_s(t))V_0^s + \tau_s b_0'(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t) + b_1(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t) +$$

$$+ \tau_s b_0(\varphi_s(t))\,\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x} + b_0(\varphi_s(t))u_1(\varphi_s(t),t) - a_0'(\varphi_s(t))\tau_s\varphi_1'(t) -$$

$$- a_1(\varphi_s(t))\varphi_1'(t)\Bigg]\frac{\partial V_0^s}{\partial \tau_1} + \Bigg[\tau_s b_0'(\varphi_s(t))\,V_0^s + b_1(\varphi_s(t))V_0^s + \tau_s b_0'(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t) +$$

$$+ b_1(\varphi_s(t))u_0(\varphi_s(t),t) + \tau_s b_0(\varphi_s(t))\,\frac{\partial u_0(\varphi_s(t),t)}{\partial x} + b_0(\varphi_s(t))u_1(\varphi_s(t),t) -$$

$$- a_0'(\varphi_s(t))\tau_s\varphi_2'(t) - a_1(\varphi_s(t))\varphi_2'(t)\Bigg]\frac{\partial V_0^s}{\partial \tau_2},$$

$$V_0^s = V_0\left(\varphi_s(t), t\right), \ s = 1, 2.$$

Побудова асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку є можливою, якщо виконуються умови узгодження вигляду

$$a_0(\varphi_1(t)) = a_0(\varphi_2(t)), \qquad b_0(\varphi_1(t)) = b_0(\varphi_2(t)),$$
$$u_0(\varphi_1(t),t) = u_0(\varphi_2(t),t), \tag{7}$$

$$\mathcal{F}_k^1(t,\tau_1,\tau_2) = \mathcal{F}_k^2(t,\tau_1,\tau_2), \quad k = \overline{1,N}, \tag{8}$$

де $t \in [0; T]$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$.

Зазначимо, що рівність (8) при $k = 1$ є можливою, наприклад, у випадку виконання таких умов:

$$b_0'(\varphi_1(t)) = b_0'(\varphi_2(t)) = 0, \quad b_1(\varphi_1(t)) = b_1(\varphi_2(t)),$$

$$a_0'(\varphi_1(t)) = a_0'(\varphi_2(t)) = 0, \quad a_1(\varphi_1(t)) = a_1(\varphi_2(t)), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_0(\varphi_1(t), t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(\varphi_2(t), t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0; T].$$

При цьому, якщо виконуються умови (7), (8), то $V_j^1(t, \tau_1, \tau_2) = V_j^2(t, \tau_1, \tau_2)$ для всіх $t \in [0; T]$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$.

Слід також зауважити, що для двосолітонного розв'язку (2) рівняння Кортевега – де Фріза умови (7) – (9) виконуються.

Надалі припускаємо, що умови (7), (8) мають місце.

Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (5). Виконаємо в системі диференціальних рівнянь (5), (6) заміну змінних

$$\xi = \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \quad \eta = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \tag{10}$$

де

$$\gamma_j(t) = -a_0(\varphi_1(t))\varphi_j'(t) + b_0(\varphi_1(t))u_0(\varphi_1(t), t), \quad j = 1, 2.$$

В результаті рівняння (5) набере вигляду диференціального рівняння

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi_s)\frac{\partial V_0}{\partial \xi}V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0,$$

яке за допомогою заміни змінних

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{6}b_0(\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}\xi, \quad \eta_1 = \left(\frac{1}{6}b_0(\varphi)\right)^{\frac{3}{2}}\eta$$

зводиться до рівняння Кортевега – де Фріза з постійними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi_1^3} - 6V_0\frac{\partial V_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \eta_1} = 0. \tag{11}$$

Як відомо [6], двосолітонний розв'язок рівняння (11) записується за допомогою формули

$$V_0(\xi_1, \eta_1) = -2\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\ln\det(E + G), \tag{12}$$

де E — одинична (2×2)-матриця, а матриця G має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} c_1^2(\eta_1)\dfrac{\exp(-2\kappa_1\xi_1)}{2\kappa_1} & c_1(\eta_1)c_2(\eta_1)\dfrac{\exp(-(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1+\kappa_2} \\ c_1(\eta_1)c_2(\eta_1)\dfrac{\exp(-(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1+\kappa_2} & c_2^2(\eta_1)\dfrac{\exp(-2\kappa_2\xi_1)}{2\kappa_2} \end{pmatrix},$$

$$\kappa_j(t) = \frac{\sqrt{\gamma_j(t)}}{\left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad c_j(\eta_1) = c_j(0)e^{\kappa_j^3(t)\eta_1},$$

$c_j(0)$, $j = 1, 2$, — довільні сталі.

З (12) знаходимо

$$V_0(\xi_1, \eta_1) = -2\Bigg[2\kappa_1 c_1^2 e^{-2\kappa_1\xi_1} + 2\kappa_2 c_2^2 e^{-2\kappa_2\xi_1} -$$

$$- 2c_1^2c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1} - \frac{c_1^4c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_2}{2\kappa_1^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-4\kappa_1-2\kappa_2)\xi_1} -$$

$$- \frac{c_1^2c_2^4(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_1}{2\kappa_2^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-2\kappa_1-4\kappa_2)\xi_1}\Bigg]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{c_1^2}{2\kappa_1}e^{-2\kappa_1\xi_1} + \frac{c_2^2}{2\kappa_2}e^{-2\kappa_2\xi_1} + \frac{c_1^2c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi_1}\right]^{-2}.$$

Нескладно переконатися в тому, що для функції $V_0(\xi_1, \eta_1)$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to+\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{01}^{+}(t, \tau_2) = -\frac{4\kappa_2c_2^2(0)e^{-2A\tau_2\kappa_2}}{\left[1 + \frac{c_2^2(0)}{2\kappa_2}e^{-2A\tau_2\kappa_2}\right]^2},$$

$$\lim_{\tau_1\to-\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{01}^{-}(t, \tau_2) = \frac{4\kappa_2c_2^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2e^{-2A\tau_2\kappa_2}}{(\kappa_1+\kappa_2)^2\left[1 + \frac{c_2^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2A\tau_2\kappa_2}\right]^2},$$

$$\lim_{\tau_2\to+\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{02}^{+}(t, \tau_2) = -\frac{4\kappa_1c_1^2(0)e^{-2A\tau_1\kappa_1}}{\left[1 + \frac{c_1^2(0)}{2\kappa_1}e^{-2A\tau_1\kappa_1}\right]^2},$$

$$\lim_{\tau_2\to-\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{02}^{-}(t, \tau_2) = \frac{4\kappa_1c_1^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2e^{-2A\tau_1\kappa_1}}{(\kappa_1+\kappa_2)^2\left[1 + \frac{c_1^2(0)(\kappa_1-\kappa_2)^2}{2\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2A\tau_1\kappa_1}\right]^2},$$

$$A = \left(\frac{1}{6}b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тут функції $f_{01}^{\pm}(t, \tau_1)$ та $f_{02}^{\pm}(t, \tau_2)$, очевидно, належать простору G_1^0, а отже, функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$ належить простору G_2^0.

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь (6). Має місце така лема.

Лема. *Необхідною умовою розв'язності системи лінійних диференціальних рівнянь* (6) *у просторі* G_2 *є умови ортогональності вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\Big(\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2)V_0(t, \tau_1, \tau_2)\Big)d\tau_2 = 0, \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau_2 \to \pm\infty} \left(\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2) V_0(t, \tau_1, \tau_2) \right) d\tau_1 = 0. \tag{14}$$

Доведення. Помножимо обидві частини кожного з диференціальних рівнянь системи (6) на $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$ та перейдемо до границі в отриманій рівності при $\tau_1 \to +\infty$. Враховуючи, що розв'язок $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$ належить простору G_2, переконуємось, що виконується умова

$$\lim_{\tau_1 \to +\infty} \frac{\partial^3}{\partial \tau_1^k \, \partial \tau_2^{3-k}} \left(V_j(t, \tau_1, \tau_2) - f_{j1}^+(t, \tau_2) - u_1(x, t) \right) = 0,$$

де $f_{j1}^+(t, \tau_2) \in G_1$, $u_1(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$.

Оскільки функція $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$ належить простору G_2^0 і для неї справджується рівність

$$\lim_{\tau_1 \to +\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{01}^+(t, \tau_2) \in G_1^0,$$

для кожного рівняння системи (6) маємо співвідношення

$$f_{01}^+(t, \tau_2) \lim_{\tau_1 \to +\infty} \mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{d^3 f_{j1}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2^3} f_{01}^+(t, \tau_2) -$$

$$- \left[-a_0(\varphi_1(t)) \varphi_2'(t) + b_0(\varphi_1(t)) u_0(\varphi_1(t), t) \right] f_{01}^+(t, \tau_2) \frac{d f_{j1}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2} -$$

$$- \left[b_0(\varphi_1(t)) \left(f_{01}^+(t, \tau_2) \frac{d f_{j1}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2} + f_{j1}^+(t, \tau_2) \frac{d f_{01}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2} \right) \right] f_{01}^+(t, \tau_2), \quad j = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Зінтегрувавши співвідношення (15) по τ_2 в межах від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f_{01}^+(t, \tau_2) \lim_{\tau_1 \to +\infty} \mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2) \right] d\tau_2 =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{j1}^+(t, \tau_2) \left[\frac{d^3 f_{01}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2^3} + \left[a_0(\varphi_1(t)) \varphi_2'(t) - b_0(\varphi_1(t)) u_0(\varphi_1(t), t) \right] \frac{d f_{01}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2} - \right.$$

$$\left. - b_0(\varphi_1(t)) f_{01}^+(t, \tau_2) \frac{d f_{01}^+(t, \tau_2)}{d\tau_2} \right] d\tau_2 = 0.$$

Таким чином, маємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau_1 \to +\infty} \left(\mathcal{F}_j(t, \tau_1, \tau_2) V_0(t, \tau_1, \tau_2) \right) d\tau_2 = 0,$$

яка, очевидно, є необхідною умовою існування розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (6).

Аналогічно доводяться умова (13) при $\tau_1 \to -\infty$ та умова (14) при $\tau_2 \to \pm\infty$.

Лему доведено.

Умови ортогональності (13), (14) можна використати для знаходження співвідношень для визначення кривих розриву $x = \varphi_s(t)$, $s = 1, 2$. Зокрема, з цих рівностей при $j = 1$ знаходимо шукані співвідношення

$$
\begin{gathered}
b_0'(\varphi_1(t)) = b_0'(\varphi_2(t)) = 0, \\
b_0(\varphi_1(t))\frac{\partial u_0(\varphi_1(t),t)}{\partial x} - a_0'(\varphi_1(t))\varphi_2' = 0, \\
2b_0(\varphi_1(t))\frac{\partial u_0(\varphi_1(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi_1(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right) = 0, \\
b_0(\varphi_1(t))\frac{\partial u_0(\varphi_1(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0'(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi_1(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right) = 0, \\
b_0(\varphi_2(t))\frac{\partial u_0(\varphi_2(t),t)}{\partial x} + a_0'(\varphi_2(t))\varphi_1' = 0, \\
2b_0(\varphi_2(t))\frac{\partial u_0(\varphi_2(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi_2(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right) = 0, \\
b_0(\varphi_2(t))\frac{\partial u_0(\varphi_2(t),t)}{\partial x}\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0'(\varphi_2(t))\varphi_2'(t)\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi_2(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

де $t \in [0; T]$.

Зокрема, якщо виконуються умови (9), то система співвідношень (16) для визначення кривих розриву $\varphi_s(t)$, $s = 1, 2$, еквівалентна системі вигляду

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)}\right) = 0,
$$

яку можна записати у вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$
\begin{gathered}
\left(-a_0(\varphi_1(t))\varphi_1'(t) + b_0(\varphi_1(t))u_0(\varphi_1(t),t)\right)^{\frac{3}{2}} = C_1(b_0(\varphi_1(t)))^2, \\
\left(-a_0(\varphi_2(t))\varphi_2'(t) + b_0(\varphi_2(t))u_0(\varphi_2(t),t)\right)^{\frac{3}{2}} = C_2(b_0(\varphi_2(t)))^2,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

де C_1 та C_2 — довільні сталі.

При знаходженні розв'язку системи (17) apriori припускається, що її розв'язок задовольняє умови узгодженості (7). Зазначимо, що такі розв'язки системи рівнянь (17) існують, що випливає з наявності двосолітонного розв'язку (2) для рівняння Кортевега – де Фріза вигляду (1), яке є частинним випадком рівняння (3), асимптотичні розв'язки якого будуються.

На завершення розглянемо питання про достатні умови існування розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (6). В результаті заміни змінних (10) система (6) набирає вигляду

$$
\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi)\left(\frac{\partial V_0}{\partial \xi}V_j + \frac{\partial V_j}{\partial \xi}V_0\right) + \frac{\partial V_j}{\partial \eta} = \mathcal{F}_j(\xi,\eta), \quad j = \overline{1, N}. \tag{18}
$$

Якщо припустити, що функція $\mathcal{F}_j(\xi,\eta)$ належить простору швидко спадних функцій за змінною ξ при кожному значенні $\eta \geq 0$, то відомо, що система лінійних диференціальних рівнянь (18) має [13] розв'язок $V_j(t,\xi,\eta)$, визначений для всіх $\xi \in \mathbf{R}$ та значень η, що належить деякому скінченному інтервалу.

Як підсумок викладених вище міркувань, можна сформулювати такі твердження.

Теорема 1. *Припустимо, що функції* $a_k(x)$, $b_k(x)$ *є нескінченно диференційовними на* $(\mathbf{R}^1)$ *при* $k \geq 0$, *виконуються умови* (7) *та* (9), *система* (17) *має розв’язок* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *для* $t \in [0; T]$ *такий, що* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Тоді функція

$$Y_0(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + V_0(t, \tau_1, \tau_2), \qquad \tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\varepsilon}, \quad s = 1, 2,$$

є нульовим членом асимптотичного розвинення для двофазового солітоноподібного розв’язку задачі (3) *при* $t \in [0; T]$.

Теорема 2. *Припустимо, що функції* $a_k(x)$, $b_k(x)$ *є нескінченно диференційовними на* $(\mathbf{R}^1)$ *при* $k \geq 0$, *виконуються умова* (7), *умова* (8) *при* $k = \overline{1, N}$ *та умови* (9), *система* (17) *має розв’язок* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *для* $t \in [0; T]$ *такий, що* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, *функція* $V_j\left(t, \dfrac{\gamma_2\tau_1 - \gamma_1\tau_2}{\gamma_2 - \gamma_1}, \dfrac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\right)$, $j = \overline{1, N}$, *що є розв’язком рівняння* (18), *належить простору* G_2.

Тоді функція

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \big(u_j(x, t) + V_j(t, \tau_1, \tau_2)\big),$$

$$\tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\varepsilon}, \quad s = 1, 2, \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T],$$

є асимптотичним двофазовим солітоноподібним розв’язком рівняння (3).

Висновки. В даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв’язку рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром.

1. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of „solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240.
3. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 15. – P. 467 – 490.
4. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Kortewed – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095.
5. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36, № 2. – С. 63 – 124.
6. *Maslov V. P., Omel’yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: Amer. Math. Soc., 2001. – 243 p.
7. *Samoylenko YuI.* Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Kortewed – de Vries equation // Proc. Fifth Int. Conf. „Symmetry in Nonlinear Math. Phys.”. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2004. – Vol. **3**. – P. 1435 – 1441.
8. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв’язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **58**, № 1. – С. 111 – 124.
9. *Samoilenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotical expansion of solution to Cauchy problem to Kortewed – de Vries equation with varying coefficients and a small parameter // Communs CERMCS Int. Conf. Young Sci. – Chisinau, 2006. – P. 186 – 192.
10. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розв’язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 122 – 132.
11. *Samoilenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic solution to Cauchy problem for Kortewed – de Vries equation with varying coefficients and a small dispersion // Comput. Algebra Systems in Teaching and Research (4-th Int. Workshop, CASTR 2007, Siedlce, Poland, January 31 – February 3, 2007): Proc. – 2007. – P. 272 – 280.
12. *Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв’язків задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 336, 337. – С. 170 – 177.
13. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1998. – Вып. 13. – С. 56 – 105.

Одержано 17.09.07