УДК 519.65

Н. П. Корнейчук, чл.-корр. НАН Украины
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ*

The notions of adaptive informative widths of a set in a metric space are introduced. The problem of comparing them to nonadaptive widths is considered. Exact results are obtained for one class of continuous functions which is not centrally symmetric.

Введені поняття адаптивних інформаційних поперечників множини в метричному просторі та розглядається задача про порівняння їх з неадаптивними поперечниками. Для одного класу неперервних функцій, який не є центрально-симетричним, одержані точні результати.

1. Понятие N-поперечника множества в линейном нормированном пространстве введено А. Н. Колмогоровым [1] в 1936 г. в связи с задачей о наилучшем методе приближения. В дальнейшем, в процессе исследований экстремальных задач теории приближения, была введена целая серия поперечников (линейные, проекционные и т. п.) аналогичного смысла (см., например, [2–4]). Наряду с аппроксимационными поперечниками важное значение имеют экстремальные характеристики, связанные с задачами оптимального использования дискретной информации, которые можно назвать информационными поперечниками. Их можно ввести в самой общей ситуации — лишь при наличии метрики.

Пусть $X = X_\rho$ — метрическое пространство с расстоянием $\rho(x, y)$; через X' будем обозначать множество заданных на X непрерывных функционалов. Заданием набора

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \tag{1}$$

нетривиальных функционалов из X' зададим отображение

$$X \ni x \to \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\} =: M_N(x), \tag{2}$$

которое можно рассматривать как кодирование элемента x точкой из $\mathbb{R}^N$. Чтобы задача последующего восстановления элемента x по информации $M_N(x)$ была корректной, будем считать, что располагаем априорной информацией о принадлежности элемента x некоторому ограниченному множеству $\mathfrak{M}$ (его можно рассматривать как исходную область неопределенности для x). В качестве численной характеристики этой неопределенности можно взять диаметр множества $\mathfrak{M}$, т. е. величину

$$D(\mathfrak{M}, \rho) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M}\}, \tag{3}$$

или его чебышевский радиус

$$r(\mathfrak{M}, \rho) = \inf_{y \in X} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, y), \tag{4}$$

т. е. радиус наименьшего шара, содержащего множество $\mathfrak{M}$. Центр этого шара называют чебышевским центром множества $\mathfrak{M}$.

В реальных ситуациях, говоря об отображении (2), следует предположить, что имеется возможность вычислить значение $\mu(x)$ для любого функционала $\mu \in X'$. Практически это возможно, по крайней мере, в следующих двух ситуациях. 1) Элемент x известен (например, функция $x(t)$ задана аналитически), но нам нужно закодировать его отображением (2), например, для хранения или

* Работа частично финансирована Международным научным фондом; грант UB1000.

передачи дискретной информации $M_N(x)$ по каналам связи и последующего восстановления. Тогда можно говорить о задаче оптимального кодирования. 2) Элемент x не известен, но он задан неявно, в частности, как решение некоторого операторного уравнения, и мы можем (например, экспериментальным путем) найти значение $\mu(x)$ для любого функционала $\mu \in X'$. Это, вместе с априорной информацией $x \in \mathfrak{M}$, дает возможность найти для x область неопределенности

$$Q(x, M_N) = \{ y : y \in \mathfrak{M},\ M_N(y) = M_N(x) \}$$

уже с учетом информации $M_N(x)$. Здесь можно говорить как о задаче оптимального кодирования элемента x для последующей передачи дискретной информации, так и о задаче оптимального восстановления неявно заданного элемента x — если мы сразу хотим иметь приближенное его значение. В обоих случаях речь идет, по существу, о методах оптимального уменьшения неопределенности. Эта проблематика в последнее время исследуется весьма интенсивно, обзор результатов можно найти, например, в монографиях [5–8]. В этой работе мы рассматриваем задачу оптимального уменьшения неопределенности с точки зрения теории поперечников, причем основное внимание уделено адаптивному подходу.

При определении информационных поперечников можно использовать любую из величин (3) или (4). Далее будем определять поперечники через диаметр (3), хотя к совершенно аналогичным понятиям можно прийти, используя чебышевский радиус (4). Задача оптимального выбора кодирующего набора функционалов (1) для восстановления с минимально возможной погрешностью фиксированного элемента x сводится к вычислению точной нижней грани

$$\beta^N(x, X_\rho) = \inf_{M_N \subset X'} D(Q(x, M_N), \rho) \tag{5}$$

и указанию набора $\tilde{M}_N$, реализующего инфимум. Чебышевский центр множества $Q(x, \tilde{M}_N)$ будет оптимальным восстановлением элемента $x \in \mathfrak{M}$ по информации вида $M_N(x)$ с погрешностью, не превышающей $r(Q(x, M_N), \rho)$.

К понятию информационного поперечника множества $\mathfrak{M}$ приводит более общая постановка задачи, когда, ориентируясь на худший случай, будем искать оптимальный набор M_N кодирующих функционалов для всего множества $\mathfrak{M}$. Ясно, что для любого $x \in \mathfrak{M}$

$$D(Q(x, M_N), \rho) \le D(\mathfrak{M}, M_N, \rho) :=$$

$$= \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y) \}.$$

Величину [2]

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \inf_{M_N \subset X'} D(\mathfrak{M}, M_N, \rho) \tag{6}$$

можно назвать информационным поперечником множества $\mathfrak{M}$ в метрическом пространстве X_ρ. Очевидно,

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \beta^N(x, X_\rho).$$

В линейном нормированном пространстве X информационный поперечник обозначают [2, 3]

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset X^*} \sup \{ \|x-y\| : x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y) \}. \qquad (7)$$

Так как не всякое расстояние $\rho(x, y)$ позволяет ввести норму в линейном пространстве X_ρ, есть смысл рассматривать поперечники в линейном метрическом пространстве $X = X_\rho$, полагая, что X' — множество всех заданных на X линейных непрерывных функционалов. Информационный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в линейном метрическом пространстве определяется так же, как и (6); будем, в отличие от поперечника (7) в нормированном пространстве, обозначать его через $\lambda^N(\mathfrak{M}, X_\rho)$.

Введем в линейном метрическом пространстве X_ρ соответствующий аппроксимационный поперечник. Пусть $X_N = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ — система линейно независимых элементов в X_ρ, $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — набор нетривиальных функционалов из X'. Каждому элементу $x \in X_\rho$ поставим в соответствие элемент

$$q(x; M_N, X_N) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x) x_k.$$

Для ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset X_\rho$ линейный аппроксимационный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в линейном метрическом пространстве X_ρ есть величина

$$\lambda_N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \inf_{M_N, X_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, q(x; M_N, X_N)).$$

Предложение 1. *Справедливо неравенство* $\lambda^N(\mathfrak{M}, X_\rho) \le 2\lambda_N(\mathfrak{M}, X_\rho)$.

Действительно, если $M_N(x) = M_N(y)$, то $q(x; M_N, X_N) = q(y; M_N, X_N)$, поэтому

$$\rho(x, y) \le \rho(x, q(x; M_N, X_N)) + \rho(y, q(y; M_N, X_N)).$$

Но тогда

$$D(\mathfrak{M}, M_N, \rho) := \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y) \} \le$$

$$\le 2 \sup \{ \rho(x, q(x; M_N, X_N)) : x \in \mathfrak{M} \},$$

причем это верно для любой системы X_N. Переходя слева к инфимуму по $M_N \subset X'$, а справа к инфимуму по M_N и X_N, получаем утверждение предложения 1.

Если $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричный выпуклый компакт в банаховом пространстве X, то [2, с. 219] $\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = 2d^N(\mathfrak{M}, X)$, где $d^N(\mathfrak{M}, X)$ — поперечник Гельфанда [2, с. 217], который в этом случае несет ту же смысловую нагрузку, что и информационный поперечник. Если при определении последнего использовать не диаметр множества $\mathfrak{M}$, а его чебышевский радиус, то поперечники λ^N и d^N при указанных выше ограничениях X и $\mathfrak{M}$ совпадут.

2. Теперь заметим, что при отображении (2), на котором базируется определение величин (5), (6) и (7), функционалы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ предъявлялись одновременно всем набором M_N, сопоставляя элементу $x \in \mathfrak{M}$ сразу вектор $M_N(x) \in \mathbb{R}^N$. Однако в ряде случаев может оказаться предпочтительнее метод получения дискретной информации об элементе x, при котором функционалы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ выбираются последовательно, и при выборе функционала μ_k, $k = 2, \ldots, N$, учитываются уже известные значения $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k-1}(x)$. Это дает возможность приспосабливать выбор кодирующих функционалов к индивидуальным свойствам элемента x, поэтому этот метод кодирования можно назвать адаптивным в отличие от неадаптивного метода, рассмотренного в п. 1. При адаптивном методе отображение (2) расчленяется на N шагов, на каждом из которых, используя уже накопленную информацию, выбирается новый функционал:

$$\begin{gathered}\{x \in \mathfrak{M}\} \to \mu_1,\\ \{x \in \mathfrak{M}, \mu_1(x)\} \to \mu_2,\\ \{x \in \mathfrak{M}, \mu_1(x), \mu_2(x)\} \to \mu_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \{x \in \mathfrak{M}, \mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{N-1}(x)\} \to \mu_N.\end{gathered} \tag{8}$$

Правило выбора функционала на каждом шаге задает некоторый адаптивный алгоритм кодирования, который выдает набор (цепочку) $M_N^a = \{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$ функционалов и вектор информации $M_N^a(x) = \{\mu_1(x), \ldots, \mu_N(x)\}$.

На каждом шаге информация в левых частях (8) задает область неопределенности для x, и если ставить целью построение оптимального по точности восстановления метода кодирования, то естественно подчинить правило выбора функционала требованию максимально уменьшить диаметр (или чебышевский радиус) области неопределенности. В [9] введено понятие информативности $\mathrm{In}(\mu, \mathfrak{M}, \rho)$ функционала $\mu \in X'$ относительно множества $\mathfrak{M} \subset X_\rho$ и метрики ρ: если

$$D(\mathfrak{M}, \mu, \rho) = \sup\{\rho(x, y): x, y \in \mathfrak{M},\ \mu(x) = \mu(y)\}, \tag{9}$$

то по определению

$$\mathrm{In}(\mathfrak{M}, \mu, \rho) = D(\mathfrak{M}, \rho) - D(\mathfrak{M}, \mu, \rho). \tag{10}$$

Аналогичным образом определяется информативность функционала μ относительно конкретного элемента $x \in \mathfrak{M}$ и метрики ρ:

$$\mathrm{In}(\mu, x, \rho) = D(\mathfrak{M}, \rho) - D(x, \mu, \rho), \tag{11}$$

где

$$D(x, \mu, \rho) = \sup\{\rho(y, z):\ y, z \in \mathfrak{M},\ \mu(y) = \mu(z) = \mu(x)\}. \tag{12}$$

Информативность функционала можно определять и через чебышевский радиус: если $Q(x, \mu) = \{y:\ y \in \mathfrak{M},\ \mu(y) = \mu(x)\}$, то полагаем

$$\mathrm{In}(\mu, x, \rho) = r(\mathfrak{M}, \rho) - r(Q(x, \mu), \rho). \tag{13}$$

Далее считаем метрику $\rho(x, y)$ фиксированной и не всегда будем отмечать ее в обозначениях (9) – (13).

Рассмотрим задачу оптимального кодирования адаптивным методом фиксированного элемента $x \in \mathfrak{M}$, который предполагается известным. На первом шаге функционал μ_1 выбираем из условия максимальной информативности относительно x, т. е.

$$\operatorname{In}(\mu_1, x) = \sup_{\mu \subset X'} \operatorname{In}(\mu, x),$$

что равносильно соотношению

$$D(x, \mu_1) = \sup_{\mu \subset X'} D(x, \mu). \tag{14}$$

Информация $\{x \in \mathfrak{M}, \mu_1(x)\}$ определяет уточненную область неопределенности

$$Q(x, \mu_1) = \{y \colon y \in \mathfrak{M},\ \mu_1(y) = \mu_1(x)\} \tag{15}$$

для x с диаметром $D(x, \mu_1) = D(x, \mu_1, \rho)$ (см. (12)). Далее, для любого $\mu \in \in X'$ пусть $D(x, \mu_1, \mu)$ — диаметр множества $Q(x, \mu_1, \mu) = Q(x, \mu_1) \cap \cap Q(x, \mu)$. На втором шаге выбираем функционал μ_2 из условия

$$D(x, \mu_1, \mu_2) = \inf_{\mu \subset X'} D(x, \mu_1, \mu). \tag{16}$$

Затем рассматриваем множество $Q(x, \mu_1, \mu_2, \mu) = Q(x, \mu_1, \mu_2) \cap Q(x, \mu)$ и функционал μ_3 выбираем из условия минимума по всем $\mu \in X'$ диаметра $D(x, \mu_1, \mu_2, \mu)$ этого множества:

$$D(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \inf_{\mu \subset X'} D(x, \mu_1, \mu_2, \mu) \tag{17}$$

и т. д. Если заранее задана погрешность восстановления ε, то процесс останавливается, как только после очередного k-шага чебышевский радиус области неопределенности $Q(x, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ станет $\leq \varepsilon$. Впрочем, погрешность может быть задана и через диаметр области. С другой стороны, мы могли строить адаптивный алгоритм выбора функционалов, отправляясь от определения (13), т. е. минимизируя по $\mu \in X'$ не диаметр, а чебышевский радиус области неопределенности.

При заранее заданном числе N кодирующих функционалов после N шагов получим зависящую от x цепочку M_N^a функционалов $\mu_1 \to \mu_2 \to \ldots \to \mu_N$, определяющую адаптивный алгоритм кодирования элемента x. Если положить $M_N^a(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}$, то величина

$$D(x, M_N^a) = \sup\{\rho(y, z) : M_N^a(y) = M_N^a(z) = M_N^a(x)\},$$

т. е. диаметр области неопределенности после N-го шага, характеризует погрешность этого алгоритма. Теперь следует заметить, что задача на инфимум по $\mu \in X'$ на каждом шаге (см. (14), (16), (17)) может иметь не единственное решение; следовательно, единый принцип оптимального выбора на каждом шаге может породить зависящее от x семейство G_N^a алгоритмов, определяемых различными цепочками M_N^a, которые, вообще говоря, могут привести к различным значениям $D(x, M_N^a)$. Поэтому естественно ввести в рассмотрение величину

$$D(x, G_N^a) = \inf_{M_N^a \in G_N^a} D(x, M_N^a), \tag{18}$$

характеризующую погрешность наилучшего для элемента x адаптивного алгоритма из множества G_N^a. Величину

$$\kappa_a^N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} D(x, G_N^a) \tag{19}$$

можно рассматривать как один из вариантов адаптивного информационного поперечника множества $\mathfrak{M}$ в метрическом пространстве X_ρ.

К несколько иному варианту адаптивного поперечника приходим, если речь идет о кодировании конкретного элемента $x \in \mathfrak{M}$, который хотя и неизвестен, но задан неявно. В этом случае на каждом шаге мы должны ориентироваться на худший случай и выбирать функционал по наилучшей информативности относительно всей области неопределенности. На первом шаге выбираем μ_1 из условия

$$D(\mathfrak{M}, \mu_1) = \inf_{\mu \subset X'} D(\mathfrak{M}, \mu), \tag{20}$$

где $D(\mathfrak{M}, \mu) = D(\mathfrak{M}, \mu, \rho)$ определено в (9), и вычисляем $\mu_1(x)$. Эта информация задает для x область неопределенности

$$\mathfrak{M}_1(x) = Q(x, \mu_1) = \{y \colon y \in \mathfrak{M}, \ \mu_1(y) = \mu_1(x)\}.$$

Снова ориентируясь на худший случай, выбираем на втором шаге функционал μ_2:

$$D(\mathfrak{M}_1(x), \mu_2) = \inf_{\mu \subset X'} D(\mathfrak{M}_1(x), \mu).$$

Вычисляя $\mu_2(x)$, определяем множество $Q(x, \mu_2)$ и полагаем $\mathfrak{M}_2(x) \doteq Q(x, \mu_1) \cap Q(x, \mu_2)$. Функционал μ_3 выбираем из условия минимума диаметра

$$D(\mathfrak{M}_2(x), \mu) = \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \in \mathfrak{M}_2(x), \ \mu(x) = \mu(y)\},$$

и т. д. После N шагов получаем зависящую от x цепочку функционалов $\tilde{M}_N^a = \{\mu_1 \to \mu_2 \to \ldots \to \mu_N\}$ и область неопределенности для x

$$\mathfrak{M}_N(x) = \bigcap_{k=1}^{N} Q(x, \mu_k), \tag{21}$$

диаметр которой $D(\mathfrak{M}_N(x), \tilde{M}_N^a)$ (или чебышевский радиус) характеризует погрешность алгоритма. И здесь, в силу неоднозначности при выборе на каждом шаге наилучшего функционала, может появиться семейство $\tilde{G}_N^a$ адаптивных алгоритмов, каждый из которых построен по правилу оптимальности на каждом шаге. По аналогии с (18) и (19) положим

$$D(\mathfrak{M}_N(x), \tilde{G}_N^a) = \inf_{\tilde{M}_N^a \in \tilde{G}_N^a} D(\mathfrak{M}_N(x), \tilde{M}_N^a) \tag{22}$$

и

$$\tilde{\kappa}_a^N(\mathfrak{M}, X_\rho) \doteq \sup_{x \in \mathfrak{M}} D(\mathfrak{M}_N(x), \tilde{G}_N^a).$$

Ясно, что $\kappa_a^N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \tilde{\kappa}_a^N(\mathfrak{M}, X_\rho)$.

Рассмотрим теперь случай, когда в исходном положении за исключением априорной информации $x \in \mathfrak{M}$ об элементе x ничего не известно. На первом шаге, как и при кодировании неявно заданного элемента, выбор функционала определяется условием (20), т. е. выбираем функционал μ_1 с наибольшей информативностью относительно всего множества $\mathfrak{M}$. Однако после этого ситуация существенно меняется. Теперь, ориентируясь на худший случай, необходимо вычислять значение функционала μ_1 на элементе $x_1 \in \mathfrak{M}$, для которого диаметр $D(x, \mu_1)$ области неопределенности $Q(x, \mu_1)$ является наибольшим, т. е.

$$D(x_1, \mu_1) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} D(x, \mu_1) =: D(\mathfrak{M}, \mu_1).$$

Чтобы говорить о существовании такого элемента, надо считать, что к множеству $\mathfrak{M}$ присоединены все его предельные точки, — это не скажется на численных характеристиках.

Далее рассматриваем множество $\mathfrak{M}_1 = \{y : y \in \mathfrak{M},\ \mu_1(y) = \mu_1(x)\}$ и выбираем функционал μ_2 с наибольшей информативностью относительно множества $\mathfrak{M}_1$, т. е. такой, что

$$D(\mathfrak{M}_1, \mu_2) = \inf_{\mu \subset X'} D(\mathfrak{M}_1, \mu).$$

Затем находим элемент $x_2 \in \mathfrak{M}$ такой, что $D(x_2, \mu_2) = \sup\{D(x, \mu_2) : x \in \in \mathfrak{M}_1\}$, вычисляем $\mu_2(x_2)$ и т. д. На последнем шаге, после выбора μ_N и x_N, получаем множество

$$\mathfrak{M}_N = \{y : y \in \mathfrak{M},\ \mu_k(y) = \mu_k(x_k),\ k = 1, 2, \ldots, N\},$$

определяемое адаптивным алгоритмом

$$M_N^A = \{\mu_1 \to x_1 \to \mu_2 \to x_2 \to \ldots \to \mu_N \to x_N\}. \tag{23}$$

Диаметр $D(\mathfrak{M}_N, M_N^A)$ этого множества характеризует погрешность алгоритма (23). В случае неоднозначности выбора экстремальных функционалов μ_k и (или) экстремальных элементов x_k необходимо и здесь рассматривать все семейство G_N^A таких алгоритмов и выбирать тот, который приводит к наименьшему диаметру $D(\mathfrak{M}_N, M_N^A)$. Величину

$$\gamma_A^N(\mathfrak{M}, X_\rho) = \inf_{M_N^A \in G_N^A} D(\mathfrak{M}_N, M_N^A) \tag{24}$$

назовем адаптивным информационным поперечником множества $\mathfrak{M}$ в метрическом пространстве X_ρ. В линейном нормированном пространстве X эту величину по аналогии с неадаптивным информационным поперечником (7) обозначим через $\lambda_A^N(\mathfrak{M}, X)$, а в линейном метрическом — $\lambda_A^N(\mathfrak{M}, X_\rho)$.

Отметим, что различные числовые характеристики оптимальных в том или ином смысле адаптивных алгоритмов кодирования и восстановления рассматриваются в [5–8].

Алгоритм оптимального восстановления, построенный по правилу оптимальности на один шаг на каждом шаге и приводящий к поперечнику (24), удобно описывать как антагонистическую игру: на каждом шаге первый игрок выбирает функционал μ, имеющий наибольшую информативность относительно области неопределенности, а второй выбирает в этой области самый худший для функционала μ элемент x, т. е. элемент, относительно которого μ имеет наименьшую информативность. Если с этой точки зрения рассматривать и описанные выше оптимальные алгоритмы кодирования и восстановления фиксированного элемента $x \in \mathfrak{M}$, то можно говорить об „игре с природой": „природа" с самого начала задает элемент x, и информация на каждом шаге снимается именно с этого элемента.

Решая в конкретных ситуациях задачу о наилучшем адаптивном методе кодирования и восстановления, вместо поперечника (24), характеризующего минимальную на множестве $\mathfrak{M}$ погрешность при фиксированном N, иногда удобнее рассматривать в некотором смысле обратную величину — наименьшее число шагов, при котором на множестве $\mathfrak{M}$ гарантируется заданная погрешность. При фиксированном $\varepsilon > 0$ будем полагать

$$\gamma_A^{\varepsilon}(\mathfrak{M}, X_\rho) = \inf\{N: \gamma_A^N(\mathfrak{M}, X_\rho) \le \varepsilon\}$$

и аналогично $\lambda_A^{\varepsilon}(\mathfrak{M}, X)$, $\lambda_A^{\varepsilon}(\mathfrak{M}, X_\rho)$.

3. Особый интерес представляют вопросы, касающиеся сравнения адаптивных и неадаптивных методов кодирования и восстановления. Очевидным преимуществом адаптивного алгоритма является возможность приспосабливать цепочку кодирующих функционалов к конкретному элементу, информация о котором последовательно накапливается. Благодаря адаптации, можно надеяться обеспечить нужную погрешность восстановления за меньшее число шагов, т. е. с использованием меньшего числа функционалов, чем потребуется при неадаптивном методе, гарантирующем оценку на всем множестве $\mathfrak{M}$. Поскольку в множестве $\mathfrak{M}$ самых „худших" элементов, на которые ориентирован неадаптивный метод, обычно „немного", то можно сформулировать следующие задачи:

1) Какова вероятность того, что, используя адаптивный алгоритм, мы за N шагов сможем восстановить элемент $x \in \mathfrak{M}$ с погрешностью ε?

2) За какое минимальное число шагов адаптивного алгоритма можно обеспечить заданную вероятность p восстановления элемента $x \in \mathfrak{M}$ с погрешностью ε?

Ясно, что при решении этих задач необходимо учитывать как структуру множества $\mathfrak{M}$, так и свойства метрики ρ, поэтому имеет смысл рассматривать эти задачи в конкретных ситуациях, например, в пространстве C или L_p для классов функций, задаваемых ограничениями на их дифференциально-разностные характеристики.

В каких случаях адаптивные алгоритмы не дают выигрыша по сравнению с неадаптивными? Этот вопрос исследовался во многих работах, значительное число результатов отражено в монографиях [5, 6]. Укажем лишь на некоторые факты общего характера. Следующее утверждение можно считать известным [2, 5, 6, 10].

Предложение 2. *Пусть* $X = X_\rho$ *— линейное метрическое пространство с транзитивной метрикой (т. е.* $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$*),* $\mathfrak{M}$ *— выпуклое центрально-симметричное множество в* X*. Тогда для любого заданного на* X *линейного непрерывного функционала* μ *выполняется равенство*

$$D(\mathfrak{M}, \mu) = D(\theta, \mu), \tag{25}$$

где θ *— нулевой элемент пространства* X*.*

Действительно, пусть $x, y \in \mathfrak{M}$ и $\mu(x) = \mu(y)$. Так как $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество, то элементы $z = (x-y)/2$ и $-z$ также принадлежат $\mathfrak{M}$, причем $\mu(z) = \mu(-z) = 0$. Используя транзитивность метрики, можно записать

$$\rho(x, y) = \rho(x-y, \theta) = \rho(2z, \theta) = \rho(z, -z) \le D(\theta, \mu).$$

Так как это справедливо для любой пары $x, y \in \mathfrak{M}$ такой, что $\mu(x)=\mu(y)$, то с учетом определения (9) находим, что $D(\mathfrak{M}, \mu) \le D(\theta, \mu)$, и (25) доказано, ибо противоположное неравенство вытекает из определений.

Считая, что условия предложения 1 выполнены, обозначим через X' множество заданных на линейном метрическом пространстве $X = X_\rho$ линейных непрерывных функционалов и рассмотрим для этого случая процесс построения цепочки функционалов при определении адаптивного поперечника (24). В силу предложения 1 на каждом шаге в качестве экстремального элемента можно выбрать $x_k = \theta, k = 1, 2, \ldots, N$. Это значит, что каждым адаптивным алгоритмом (23), где $\mu_k \in X'$, задается неадаптивный набор задействованных в (23) линейных функционалов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$, для которого диаметр $D(\mathfrak{M}, M_N)$ множества $\{x: x \in \mathfrak{M}, \mu_k(x) = 0, k = 1, 2, \ldots, N\}$ совпадает с диаметром $D(\mathfrak{M}_N, M_N^A)$ множества $\{y: y \in \mathfrak{M}, \mu_k(y) = \mu_k(x_k), k = 1, 2, \ldots, N\}$. Следовательно,

$$\inf_{M_N \in X'} D(\mathfrak{M}, M_N) \le \inf_{M_N^A \in X'} D(\mathfrak{M}_N, M_N^A),$$

так что в условиях предложения 1 адаптивный метод не дает выигрыша, если вначале за исключением $x \in \mathfrak{M}$ никакой другой информацией об элементе x мы не располагаем. В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в линейном нормированном пространстве X, то*

$$\lambda_A^N(\mathfrak{M}, X) \ge \lambda^N(\mathfrak{M}, X). \tag{26}$$

То, что в (26) может быть знак строгого неравенства, мы подтвердим ниже, при рассмотрении конкретных ситуаций. Здесь же заметим, что этот факт объясняется тем, что при построении адаптивного алгоритма функционалы, выбранные на предыдущих шагах, считаются уже фиксированными и их выбор пересмотру не подлежит. В то же время в определении неадаптивных поперечников (6) и (7) мы можем варьировать наборами M_N из всех N функционалов. Таким образом, преимущество адаптивного метода здесь превращается в его недостаток.

4. Перейдем к рассмотрению конкретных ситуаций. Пусть $C = C[0, 1]$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $x(t)$. Метрику $\rho(x, y)$ в C будем вводить различным образом, причем в случае равномерной метрики ρ_C сохраним обозначение C, а в случае L_p — метрики ρ_{L_p}, $0 < p < \infty$, условимся писать C_{L_p}; C^* будем обозначать, как обычно, пространство, сопряженное с C, т. е. множество всех заданных на C линейных непрерывных функционалов. Выделим в C^* множество C_δ^* функционалов μ, определяемых равенством $\mu(x) = x(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$ (их иногда называют δ-функционалами, так как они выражаются через δ-функцию). Эти функционалы играют особую роль в задачах кодирования и восстановления функций, и мы введем, наряду с поперечниками $\gamma^N(\mathfrak{M}, C_\rho)$ и $\gamma_A^N(\mathfrak{M}, C_\rho)$, также поперечники $\delta^N(\mathfrak{M}, C_\rho)$ и $\delta_A^N(\mathfrak{M}, C_\rho)$, при определении которых (см. (6) и (24)) инфимум вычисляется не по всему множеству C^*, а по его подмножеству C_δ^*. Эти поперечники можно назвать интерполяционными.

Обозначим через H^ω множество функций $x(t) \in C$, удовлетворяющих условию

$$|x(t')-x(t'')| \le \omega(|t'-t''|), \quad t', t'' \in [0,1],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, а через H_h^ω, $0 \le h < 1$ — множество функций $x(t) \in H^\omega$ таких, что $x(1)-x(0)=h$. В случае $\omega(t)=t^\alpha$, $0 \le \le t \le 1$, $0<\alpha\le 1$, будем писать соответственно H^α и H_h^α. С точки зрения задач теории аппроксимации классы H^ω и, в частности, H^α исследовались очень тщательно (см., например, [3]). Для выпуклых модулей непрерывности поперечники $\lambda^N(H^\omega, C_{L_p})$ при $0<p\le 3$ вычислены в [10, 11]. Адаптивные методы кодирования функций классов H_h^{1} функционалами из C_δ^* исследованы в [7].

Из предложений 2 и 3 следует, что в линейном метрическом пространстве адаптивный метод кодирования может привести к выигрышу по сравнению с неадаптивными лишь в случае, когда множество $\mathfrak{M}$ не является центрально-симметричным. Классы функций H_h^ω и H_h^α при $h>0$ не являются центрально-симметричными множествами, и представляет интерес сравнить адаптивные и неадаптивные поперечники для этих классов. Без ограничения общности можно считать, что функции $x(t)$ из этих классов в нуле обращаются в нуль, т. е. $x(0)=0$, $x(1)=h$.

При фиксированных $\omega(t)$ и $0<h<1$ положим $l(t)=ht$ и каждому отрезку $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ сопоставим функции

$$\Psi(\alpha,\beta;t) = \min\left\{ l(\alpha)+\frac{1}{2}\,\omega(2(t-\alpha)),\right.$$

$$\left. l(\beta)+\frac{1}{2}\,\omega(2(\beta-t)) \right\}, \quad \alpha\le t\le\beta,$$

$$\psi(\alpha,\beta;t) = \max\left\{ l(\alpha)-\frac{1}{2}\,\omega(2(t-\alpha)),\right.$$

$$\left. l(\beta)-\frac{1}{2}\,\omega(2(\beta-t)) \right\}, \quad \alpha\le t\le\beta.$$

Пусть

$$P_N = \{t_j\}_1^N, \quad 0 = t_0\le t_1\le t_2\le \ldots \le t_N\le t_{N+1} = 1,$$

— произвольный набор N точек отрезка $[0,1]$, и на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $t_k>t_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,N+1$,

$$\Psi(P_N,t) = \Psi(t_{k-1},t_k;t), \quad \psi(P_N,t) = \psi(t_{k-1},t_k;t).$$

Введем в рассмотрение семейство Φ_N функций $x(t)$, совпадающих при некотором P_N на каждом отрезке $[t_{k-1},t_k]$ с $\Psi(P_N,t)$ или с $\psi(P_N,t)$. При выпуклом $\omega(t)$ $\Phi_N\in H_h^\omega$.

Лемма. *Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, а ρ — метрика ρ_C или ρ_{L_p}, $0<p<\infty$, то*

$$\lambda^N(H_h^\omega, C_{L_p}) \ge \inf\{\rho(x,y)\colon x,y\in\Phi_N\}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть S^N — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}_{N+1}$

векторов $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+1}\}$ с нормой $\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + \dots + |\xi_{N+1}|$. Вектору $\xi \in S^N$ сопоставим набор $P_N(\xi)$ точек $t_k = t_k(\xi)$:

$$t_0 = 0, \quad t_k = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|, \; k = 1, 2, \dots, N+1, \quad t_{N+1} = 1,$$

и функцию

$$f(\xi, t) = [\Psi(t_{k-1}, t_k; t) - \psi(t_{k-1}, t_k; t)] \operatorname{sgn} \xi_k,$$
$$t_{k-1} \le t \le t_k, \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

Ясно, что $f(\xi, t) = x(\xi, t) - y(\xi, t)$, где при $t_{k-1} \le t \le t_k$ $x(\xi, t) = \Psi(P_N(\xi), t)$, если $\xi_k > 0$, $x(\xi, t) = \psi(P_N(\xi), t)$, если $\xi_k < 0$, а $y(\xi, t) = \psi(P_N(\xi), t)$, если $\xi_k > 0$, и $y(\xi, t) = \Psi(P_N(\xi), t)$, если $\xi_k < 0$. При любом $\xi \in S^N$ $x(\xi, t)$, $y(\xi, t) \in \Phi_N$.

Зафиксируем произвольный набор $M_N \subset C^*$ функционалов μ_i, $i = 1, 2, \dots, N$. Положив $\tau_i(\xi) = \mu_i(f(\xi))$, получим непрерывное и нечетное векторное поле на S^N, и в силу теоремы Борсука [3, с. 94] существует вектор $\xi_0 \in S^N$ такой, что $\tau_i(\xi_0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Это значит, что $\mu_i(x(\xi_0)) = \mu_i(y(\xi_0))$, $i = 1, 2, \dots, N$, следовательно,

$$D(H_h^\omega, M_N, \rho) :=$$
$$:= \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \in H_h^\omega,\ M_N(x) = M_N(y)\} \ge \rho(x(\xi_0), y(\xi_0))$$

и

$$\lambda^N(H_h^\omega, C_\rho) := \inf\{D(H_h^\omega, M_N, \rho) \colon M_N \subset C^*\} \ge$$
$$\ge \inf\{\rho(x, y) \colon x, y \in \Phi_N\}.$$

Лемма доказана. Нижняя грань в правой части (27) достигается при каждой из метрик ρ_C и ρ_{L_p}, если функции $x(t)$ и $y(t)$ построены по набору $\tilde{P}_N$ из равномерно расположенных точек $t_k = k/(N+1)$, $k = 1, 2, \dots, N$. В случае $\omega(t) = t$ для C- и L_1-метрик эту нижнюю грань легко подсчитать.

Следствие. *Справедливы оценки*

$$\lambda^N(H_h^1, C) \ge \frac{1-h}{N+1},$$
$$\lambda^N(H_h^1, C_{L_1}) \ge \frac{1-h^2}{2(N+1)}. \tag{28}$$

Оценка (28) является точной, ибо для набора функционалов $M_N \subset C_\delta^*$, определяемого равенствами $\mu_i(x) = x(i/N)$, $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\sup\{\rho_{L_1}(x, y) \colon x, y \in H_h^1,\ x(i/N) = y(i/N),\ i = 1, 2, \dots, N\} =$$
$$= \rho_{L_1}(\Psi(\tilde{P}_N), \psi(\tilde{P}_N)) = \frac{1-h^2}{2(N+1)}.$$

Этим доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливы точные равенства*

$$\lambda^N(H_h^1, C_{L_1}) = \delta^N(H_h^1, C_{L_1}) = \frac{1-h^2}{2(N+1)}.$$

Так как $L_1^* \subset C^*$, то неравенство (28) останется верным, если C_{L_1} заменить на L_1. Используя функцию Стеклова, можно от функционала $\mu \in C_\delta^*$ перейти к достаточно „близкому" функционалу $\mu \in L_1^*$ и доказать справедливость равенства

$$\lambda^N(H_h^1, L_1) = \frac{1-h^2}{2(N+1)}.$$

Вычислим адаптивные поперечники класса H_h^1 в C_{L_1}. Воспользуемся алгоритмом бисекции, выбирая кодирующие функционалы из C_δ^*. Первый игрок на первом шаге выбирает точку $t_1 = 1/2$ и затем на каждом шаге выбирает в качестве t_k середину наибольшего промежутка между соседними уже выбранными точками. Нетрудно понять, что для минимизирующего игрока это оптимальная стратегия. Второй, максимизирующий, игрок выбирает значение $x(t_k)$ так, чтобы диаметр в метрике L_1 области неопределенности был наибольшим. Несложные выкладки позволяют убедиться, что это будет так, если положить $x(t_k) = ht_k$. После N шагов получим набор $M_N^B = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ функционалов из C_δ^* и придем к области

$$\{x(t):\ x \in H_h^1,\ \mu_i(x) = x(t_i) = ht_i,\ i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Подсчитывая диаметр этой области, имеем равенства

$$\delta_A^N\left(H_h^1, C_{L_1}\right) := \inf_{M_N^A \subset C_\delta^*} D\left(H_h^1, M_N^A, L_1\right) = D(H_h^1, M_N^B, L_1) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-h^2}{2(N+1)}, & N+1 = 2^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \\ \dfrac{1-h^2}{2^{n+1}}\left(1 - \dfrac{k}{2^{n+1}}\right), & N+1 = 2^n + k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1. \end{cases} \tag{29}$$

Докажем, что, выбирая при любом адаптивном алгоритме функционалы из C^* (а не только из C_δ^*), мы не сможем уменьшить величину (29). Информативность функционала $\mu \in C^*$ на каждом шаге будем оценивать только относительно семейства $\Phi_N \subset H_h^1$, введенного при доказательстве леммы. Из теоремы 3 в [9] следует, что для любого функционала $\mu \in C^*$ существует функционал $\mu_\tau \in C_\delta^*$ такой, что

$$\sup\{\rho_{L_1}(x, y):\ x, y \in \Phi_N,\ \mu(x) = \mu(y)\} \geq$$

$$\geq \sup\{\rho_{L_1}(x, y):\ x, y \in \Phi_N,\ \mu_\tau(x) = \mu_\tau(y)\}.$$

Это значит, что на каждом шаге функционал, обеспечивающий минимальный диаметр в L_1 области неопределенности в Φ_N, мы можем выбирать только среди функционалов $\mu \in C_\delta^*$, т. е. алгоритм бисекции M_N^B является оптимальным не только среди C^*_δ, но и среди C^*. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Адаптивный поперечник* $\lambda^N_A(H^1_h, C_{L_1})$ *и интерполяционный поперечник* $\delta^N_A(H^1_h, C_{L_1})$ *совпадают, причем их общее значение определяется правой частью* (29).

Сравнение теорем 1 и 2 показывает, что и на классе H^1_h, не являющемся центрально-симметричным, адаптивные методы не дают преимущества, а при $N \neq 2^n - 1$ $\lambda^N_A(H^1_h, C_{L_1}) > \lambda^N(H^1_h, C_{L_1})$. Возможно, что так будет на классе H^α_h при всех $0 < \alpha \leq 1$. Однако, если потребовать, чтобы функции $x(t) \in H^\alpha_h$ были монотонными, то ситуация изменится. Из результатов работ [12–14] следует, что если $H^\alpha_{m,h}$ — класс монотонных функций из H^α_h, то при $0 < \alpha < 1$ и $0 < \varepsilon < h/8$

$$\delta^\varepsilon_A(H^\alpha_{m,h}, C) = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{|\log_2 \varepsilon|}{\varepsilon} + \frac{c(\alpha, h)}{\varepsilon},$$

и в то же время неадаптивный поперечник $\lambda^N(H^\alpha_{m,h}, C)$ имеет порядок $O(N^{-\alpha})$.

1. *Kolmogoroff A.* Uber die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107–110.
2. *Тихомиров В. Н.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Pinkus A.* n-widths in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 360 p.
5. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
6. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 184 с.
7. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
8. *Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H.* Information-based Complexity. – London: Acad. Press, 1988. – 524 p.
9. *Корнейчук Н. П.* Информативность функционалов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1156–1163.
10. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании элементов метрического пространства // Там же. – 1987. – **39**, № 2. – С. 168–173.
11. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 266–290.
12. *Корнейчук Н. П.* О пассивных и активных алгоритмах восстановления функций // Укр. мат. журн. – 1992. – **45**, № 2. – С. 258–264.
13. *Korneichuk N. P.* Optimization of active algorithms for recovery of monotonic functions from Hölder class // J. Complexity. – 1994. – **10**. – P. 265–269.
14. *Корнейчук Н. П.* Оптимизация адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^ω // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1627–1634.

Получено 20.04.95