УДК 517.928

А. А. Бойчук, д-р физ.-мат. наук,
Е. В. Чуйко, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
С. М. Чуйко, канд. физ.-мат. наук (Славян. пед. ин-т)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ*

The existence conditions and iterative schemes are obtained for constructing the periodic solutions of weakly nonlinear pulse perturbed autonomous systems in the critical cases.

Одержано конструктивні умови існування та ітераційні схеми побудови періодичних розв'язків слабконелінійних автономних систем з імпульсним збуренням у критичних випадках.

1. Постановка задачи. Исследована задача о нахождении условий существования и построении $T_1(\varepsilon)$-периодических решений

$$z(\cdot,\varepsilon)\in C^1[t],\quad t\in[0,T_1(\varepsilon)],\quad t\neq t_i(\varepsilon),\quad t_i^*=t_i(0),\quad T_1(0)=T,$$

$$z(t,\cdot)\in C[\varepsilon],\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\quad i=1,\ldots,p,$$

слабонелинейной автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt}=Az+f+\varepsilon\dot{Z}(z,\varepsilon),\quad t\neq t_i(\varepsilon), \tag{1}$$

с импульсным воздействием [1, 2]

$$\Delta z(t,\varepsilon)\big|_{t=t_i(\varepsilon)}=S_i z(t_i(\varepsilon)-0,\varepsilon)+a_i, \tag{2}$$

при $\varepsilon=0$ обращающихся в T-периодическое решение порождающей системы

$$\frac{dz_0}{dt}=Az_0+f,\quad t\neq t_i^*, \tag{3}$$

$$\Delta z_0(t)\big|_{t=t_i^*}=S_i z_0(t_i^*-0)+a_i. \tag{4}$$

Исследован критический случай, когда однородная система (3), (4) имеет r-параметрическое семейство нетривиальных T-периодических решений $X_r(t)\,c_r$, $c_r\in\mathbb{R}^r$, где $X_r(t)$ — $(n\times r)$-мерная матрица, представляющая собой полную систему r T-периодических столбцов фундаментальной матрицы $X(t)$ $(X(0)=I_n)$ этой системы.

Здесь A и S_i — постоянные $(n\times n)$-мерные матрицы, $S_{i+p}=S_i$, причем $\det(I_n+S_i)\neq 0$, I_n — единичная матрица, $t_{i+p}(\varepsilon)=t_i(\varepsilon)+T_1(\varepsilon)$; $a_{i+p}=a_i$ и f — постоянные вектор-столбцы из $\mathbb{R}^n$. Вектор-функция $Z(z,\varepsilon)$ непрерывно-дифференцируема по z при $t\neq t_i(\varepsilon)$ и непрерывна по ε в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)\,c_r+\int_0^T G(t,s)f\,ds+\sum_{i=1}^{p}G(t,t_i^*+0)\,a_i, \tag{5}$$

системы (3), (4), для существования которого необходимо и достаточно, чтобы

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по вопросам науки и технологий.

$$P_{Q_r^*}\left\{\int_0^T K(T,s)f\,ds+\sum_{i=1}^{p}K\left(T,t_i^*+0\right)a_i\right\}=0, \tag{6}$$

где $K(t,s)$ — матрица Коши импульсной системы (3), (4), $G(t,s)$ — обобщенная матрица Грина импульсной периодической задачи (3), (4), $Q=X(0)-X(T)$, $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^n\to N(Q^*)$ — $(n\times n)$-мерная матрица-ортопроектор, $P_{Q_r^*}$ — базис строк ортопроектора P_{Q^*} [2, 3].

2. Необходимое условие существования решения. Как известно, задача о нахождении периодических решений автономных систем существенно отличается от аналогичных задач для неавтономных систем, прежде всего тем, что в отличие от последних период искомого решения системы (1), (2) не известен и зависит от малого параметра ε.

Будем искать его в виде [4]

$$T_1(\varepsilon)=T(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\quad \beta=\beta(\cdot)\in C[\varepsilon],\quad \beta(0)=\beta^*.$$

Величина $\beta(\varepsilon)$ подлежит определению в процессе нахождения самого решения. Другой особенностью автономных систем с импульсным воздействием является то, что решения их в общем случае не имеют инвариантности относительно сдвига по t, т. е. из того факта, что функция $z(t,\varepsilon)$ является решением системы (1), (2), не всегда следует, что функция $z(t+h,\varepsilon)$ — также решение этой системы (в отличие от аналогичных систем без импульсного воздействия). Учитывая эти замечания, аналогично [2–7] получаем необходимое условие существования искомого решения.

Теорема 1. *Пусть автономная дифференциальная система* (1) *с импульсным воздействием* (2) *имеет периодическое решение*

$$z(\cdot,\varepsilon)\in C^1[t],\quad t\neq t_i(\varepsilon),\quad z(t,\cdot)\in C[\varepsilon]$$

с периодом $T_1(\varepsilon)=T(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$, *при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* T*-периодическое решение* (5) *с константой* $c_r=c_r^*\in\mathbb{R}^r$. *Тогда вектор* $c^*=\operatorname{col}(c_r^*,\beta^*)\in\mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд*

$$F(c^*)=P_{Q_r^*}\int_0^T K(T,s)f_0(s,c^*)\,ds=0, \tag{7}$$

где

$$f_0(\tau,c^*)=\beta^*[Az_0(\tau,c_r^*)+f]+Z(z_0(\tau,c_r^*),0).$$

Константа $c_r^*\in\mathbb{R}^r$, полученная из уравнения (7), определяет амплитуду порождающего решения. Кроме того, из (7) определяется константа β^*, характеризующая начальную поправку к периоду искомого решения.

3. Достаточное условие существования решения. Совершая в системе (1), (2) традиционные [4–7] замены

$$t=\tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\quad z(\tau,\varepsilon)=z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon)$$

и разлагая нелинейность $Z(z,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_r^*)$:

$$Z(z_0(\tau,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Z(z_0(\tau,c_r^*),0)+A_1(\tau)x+\varphi_1(x,\varepsilon),$$

где

$$A(\tau) = A(\tau, c_r^*) = \frac{\partial}{\partial z} Z(z, 0)\Big|_{z=z_0(\tau, c_r^*)},$$

$$\varphi_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial x} = 0,$$

приводим задачу нахождения $T_1(\varepsilon)$-периодических решений системы (1), (2) к эквивалентной операторной системе

$$x(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c + x^{(1)}(\tau, \varepsilon),$$

$$B_0 c = -P_{Q_r^*} \int_0^T K(T, s)\{[\beta^* A + A_1(s)] x^{(1)}(s, \varepsilon) + R(x, \varepsilon)\}\, ds, \tag{8}$$

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T G(\tau, s)\{f_0(s, c^*) + \overline{A}_1(s)\, c +$$

$$+ [\beta^* A + A_1(s)] x^{(1)}(s, \varepsilon) + R(x, \varepsilon)\}\, ds,$$

где

$$\overline{\beta} = \beta - \beta^* \in \mathbb{R}^1, \quad c = \mathrm{col}\,(c_r, \overline{\beta}) \in \mathbb{R}^{r+1},$$

$$C[\varepsilon], \; B_0 = P_{Q_r^*} \int_0^T K(T, s)\, \overline{A}_1(s)\, ds$$

— постоянная $r \times (r+1)$-мерная матрица,

$$\overline{A}_1(\tau) = \{[\beta^* A + A_1(\tau)] X_r(\tau), A X_r(\tau)\, c_r^*\}$$

— $n \times (r+1)$-мерная матрица, $I_1 = [I_r, 0]$ — $r \times (r+1)$-мерная матрица,

$$R(x, \varepsilon) = \overline{\beta} A x + \varepsilon \beta Z(z_0 + x, \varepsilon) + \varphi_1(x, \varepsilon).$$

Если матрица B_0 полного ранга, то второе уравнение операторной системы (8) разрешимо, так как $P_{B_0^*} = 0$, $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^r \to N(B_0^*)$, и поскольку $\mathrm{rank}\, P_{B_0} = 1$, $P_{B_0} : \mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0)$, имеет однопараметрическое семейство решений

$$c = -B_0^+ P_{Q_r^*} \int_0^T K(T, s)\{[\beta^* A + A_1(s)] x^{(1)}(s, \varepsilon) + R(x, \varepsilon)\}\, ds \; + \; P_1 \rho,$$

где P_1 — любой ненулевой столбец ортопроектора P_{B_0}, $\rho = \rho(\varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\rho(0) = 0$. Система (8) принадлежит классу систем, для которых применим [3, 5] сходящийся на $[0, \varepsilon_*]$ метод простых итераций. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2 (достаточное условие). *Для каждого корня* $c^* = \mathrm{col}\,(c_r^*, \beta^*)$ *уравнения для порождающих амплитуд (7) при условии полноты ранга матрицы* B_0 *краевая задача (1), (2) имеет однопараметрическое* $T_1(\varepsilon)$*-периодическое решение* $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[t]$, $t \neq t_i(\varepsilon)$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее T-периодическое решение* $z_0(\tau, c_r^*)$. *Это решение можно определить с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_*]$ *итерационного процесса*

$$
\begin{gathered}
x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau) I_1 c_{k+1} + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \\
c_{k+1} = -B_0^+ P_{Q_r^*} \int\limits_0^T K(T,s) \times \\
\times \left\{ \left[\beta^* A + A_1(s)\right] x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon) + R\left(x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon\right) \right\} ds + P_1 \rho, \\
x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_0^T G(\tau,s) \left\{ f_0(s,c^*) + \overline{A}_1(s) c_k + \right. \\
\left. + \left[\beta^* A + A_1(s)\right] x_k^{(1)}(s,\varepsilon) + R\left(x_k^{(1)}(s,\varepsilon),\varepsilon\right) \right\} ds, \\
k = 0, 1, \ldots, \quad c_0 = 0, \quad x_0^{(1)}(\tau,\varepsilon) = 0, \quad \rho(0) = 0.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Последняя компонента $\overline{\beta}_k(\varepsilon)$ вектора $c_k(\varepsilon)$ определяет поправку на период $T_1(\varepsilon)$ искомого решения системы (1), (2). Таким образом, на каждом шаге итерационной процедуры находим как приближение к искомому периодическому решению системы (1), (2), так и поправку на период $T_1(\varepsilon)$ искомого решения этой системы.

Матрица B_0, как и в случае систем без импульсов [5–7], может быть найдена дифференцированием уравнения для порождающих амплитуд

$$
B_0 = \frac{\partial}{\partial c} F(c) \Big|_{c=c^*}.
$$

Величина ε_*, определяющая длину отрезка $[0, \varepsilon_*]$, на котором строится решение, может быть найдена с помощью мажорирующих уравнений Ляпунова [3, 5].

4. Замечания. Предположим теперь, что матрицы A и $S_i = S$, $i = 1, \ldots, p$, коммутируют: $AS = SA$. В этом случае искомое $T_1(\varepsilon)$-периодическое решение $z(t,\varepsilon)$ системы (1), (2) имеетсвойство инвариантности, и функция $z(t+h,\varepsilon)$ (для любого $h \in \mathbb{R}$) также будет решением системы (1), (2). Поэтому порождающее решение $z_0(t, c_r)$ выбором константы h может быть приведено к виду [4, 6, 7]

$$
z_0(t, c_{r-1}) = X_{r-1}(t) c_{r-1} + (Gf)(t), \quad c_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}, \tag{10}
$$

где $X_{r-1}(t)$ — матрица, составленная из первых $r-1$ столбцов матрицы $X_r(t)$, относительно которой предполагаем, что последние ее два столбца соответствуют сопряженным комплексным собственным числам матрицы A (существование которых также предполагается, причем в отличие от задачи нахождения гладких решений системы (1) эти числа не обязательно чисто мнимые). С учетом (10) получаем такое следствие.

***Следствие* 1** (необходимое условие). *Пусть автономная дифференциальная система* (1), (2), *матрицы которой* A *и* $S_i = S$ *коммутируют, имеет* $T_1(\varepsilon) = T(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$*-периодическое решение*

$$
z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[t], \quad t \neq t_i(\varepsilon), \quad i = 1, \ldots, p, \; z(t,\cdot) \in C[\varepsilon],
$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* T*-периодическое решение* (10) *с константой* $c_{r-1}^* \in \mathbb{R}^{r-1}$. *Тогда вектор* $c = \mathrm{col}\,(c_{r-1}^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c^*) = P_{Q_r^*} \int_0^T K(T,s) f_0(s, c^*)\, ds = 0,$$

где

$$f_0(\tau, c^*) = \beta^* A z_0(\tau, c^*_{r-1}) + Z(z_0(\tau, c^*_{r-1}), 0).$$

***Следствие* 2** (достаточное условие). *Пусть краевая задача* (1), (2) *удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда для каждого простого* $(\det B_0 \neq 0)$ *корня* $c^* = \mathrm{col}\,(c^*_{r-1}, \beta^*)$ *уравнения для порождающих амплитуд* (7) *краевая задача* (1), (2) *имеет единственное* $T_1(\varepsilon)$*-периодическое решение* $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[t]$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее решение* (10). *Это решение можно определить с помощью сходящейся итерационной процедуры типа* (9), *где*

$$B_0 = P_{Q_r^*} \int_0^T K(T,s) \overline{A}_1(s)\, ds$$

— $(r \times r)$-мерная матрица, $B_0^+ = B_0^{-1}$,

$$\overline{A}_1(\tau) = \{[\beta^* A + A_1(\tau)] X_{r-1}(\tau), A X_{r-1}(\tau) c^*_{r-1}\}$$

— $(n \times r)$-мерная матрица, $c = \mathrm{col}\,(c_{r-1}, \overline{\beta}) \in \mathbb{R}^r$, $C[\varepsilon]$, $I_1 = [I_{r-1}, 0]$ — $((r-1) \times r)$-мерная матрица.

В случае $S_i = 0$, $a_i = 0$, т. е. в случае задачи нахождения гладких периодических решений системы (1), следствия (1) и (2) являются соответствующими результатами из [6, 7]. С другой стороны, если вектор-функция Z и вектор f в дифференциальной системе (1) зависят от времени: $Z = Z(z, t, \varepsilon)$, $f = f(t)$, $\beta(\varepsilon) \equiv 0$, $T_1(\varepsilon) \equiv T$, т. е. когда периодическая задача (1), (2) становится неавтономной, результаты теорем 1, 2 являются соответствующими результатами из [2].

4. Периодическая задача для уравнения Ван-дер-Поля. В качестве иллюстрации предложенного выше алгоритма исследования автономных периодических краевых задач рассмотрим задачу о нахождении периодических решений уравнения Ван-дер-Поля с импульсным воздействием

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varepsilon Z(z), \quad t \in [0, T_1(\varepsilon)], \quad t \neq t_1(\varepsilon),$$

$$\Delta z(t, \varepsilon)|_{t = t_1(\varepsilon)} = S z(t_1(\varepsilon) - 0),$$

при $\varepsilon = 0$ обращающихся в решение порождающей системы

$$\frac{dz_0}{dt} = A z_0, \quad t \in [0, \pi], \quad t \neq \pi/2,$$

$$\Delta z_0(t)|_{t = \pi/2} = S z_0(\pi/2 - 0),$$

где

$$z = z(t, \varepsilon) = \mathrm{col}\,(z_a, z_b) \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z) = \mathrm{col}\,(0, (1 - z_a^2) z_b), \; S = -2 I_2.$$

Согласно принятым выше обозначениям имеем

$$X(\tau) = \begin{cases} X_0(\tau) = \begin{bmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [0, \pi/2[, \\ -X_0(\tau), & \tau \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Составляем уравнение для порождающих амплитуд (7) периодической задачи для уравнения Ван-дер-Поля, учитывая, что матрицы A и S коммутируют:

$$F(c^*) = -c^*_{r-1} \int_0^T X^{-1}(s) \left\{ \beta^* \begin{bmatrix} \sin s \\ \cos s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(1 - c^{*2}_{r-1} \cos^2 s\right) \sin s \end{bmatrix} \right\} ds.$$

После интегрирования получаем алгебраическую систему

$$F(c^*) = -\pi\, c^*_{r-1} \begin{bmatrix} 1/8 \left(c^*_{r-1}\right)^2 - 1/2 \\ \beta^* \end{bmatrix} = 0.$$

Первый корень уравнения $c^*_{r-1} = 2,\ \beta^* = 0$ определяет порождающее решение

$$z_0(t,\, c^*_{r-1}) = \begin{cases} 2\cos(\cos t,\ -\sin t), & t \in [0, \pi/2[, \\ 2\cos(-\cos t,\ \sin t), & t \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

второй корень уравнения $c^*_{r-1} = -2,\ \beta^* = 0$ определяет симметричное ему решение $-z_0(t,\, c^*_{r-1})$, серия корней $c^*_{r-1} = 0,\ \beta^* = \mathbb{R}^1$ соответствует тривиальному порождающему решению $z_0(t,\, c^*_{r-1}) = 0$, период которого зависит от произвольного параметра β^*. Для первого корня строим матрицу

$$B_0 = -\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица B_0 не вырождена, следовательно, согласно следствию 2 уравнение Ван-дер-Поля с импульсным воздействием имеет единственное $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$-периодическое решение, причем $\beta(0) = \beta^* = 0$.

Согласно (9) первое приближение к вектору $x^1(\tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon X(\tau) \int_0^T X^{-1}(s) f_0(s, c^*)\, ds.$$

Интегрируя, имеем

$$x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} 3\sin\tau & -\sin 3\tau \\ +3\cos\tau & -3\cos 3\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [0, \pi/2[, \\ \dfrac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} -3\sin\tau & +\sin 3\tau \\ -3\cos\tau & +3\cos 3\tau. \end{bmatrix}, & \tau \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Вектор $c(\varepsilon)$ на первом шаге итерационной процедуры (9) вычисляем по формуле

$$c_1 = B_0^{-1} \int_0^T X^{-1}(s) \{ Z(z_0(s, c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(s, \varepsilon)) - Z(z_0(s, c_{r-1}^*)) \} ds = \frac{\varepsilon}{16} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, первое приближение к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля с импульсным воздействием имеет вид

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_{r-1}^*) + x_1^{(1)}(\tau, \varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 2\cos\tau \\ -2\sin\tau \end{bmatrix} + \dfrac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} 3\sin\tau & -\sin 3\tau \\ +3\cos\tau & -3\cos 3\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [0, \pi/2[, \\ \begin{bmatrix} -2\cos\tau \\ 2\sin\tau \end{bmatrix} + \dfrac{\varepsilon}{4} \begin{bmatrix} -3\sin\tau & +\sin 3\tau \\ -3\cos\tau & +3\cos 3\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

первое же приближение к периоду искомого решения равно

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon^2/16).$$

Очевидно, на промежутке $[0, \pi/2[$ первое приближение к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля с импульсным воздействием и его периоду совпадает с известным [4, 6] первым приближением к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля без импульсного воздействия.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных периодических систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – № 9. – С. 1516–1521.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
5. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 431 с.
6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1668–1674.
7. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные краевые задачи в критических случаях. I. – Киев, 1991. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т геофизики); II. – Киев, 1992. – 52 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т геофизики).

Получено 21.02.94