УДК 517. 928. 5

І. І. Старун, канд. фіз.-мат. наук (Ніжин. пед. ін-т),
М. І. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук (Укр. пед. ун-т, Київ)

ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

A method for finding the solution of a linear homogeneous system with degenerate matrix and a small parameter at the derivative is given.

Викладено метод знаходження розв'язку лінійної однорідної системи з виродженою матрицею та малим параметром при похідній.

1. В роботі розглядається система

$$\varepsilon^h B(t)\dot{x} = A(t,\varepsilon)x, \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0} \varepsilon^s A_s(t)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, $t\in[t_0,T]$, $0<\varepsilon\leq \leq \varepsilon_0 < 1$, $\det B(t)\equiv 0$, а в'язка матриць $A_0(t)-\lambda B(t)$ регулярна. Зауважимо, що коли $\det B(t)\neq 0$ при $t\in[t_0,T]$, тоді система (1) має загальний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\Lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c, \tag{2}$$

де $R(t,\varepsilon), \Lambda(t,\varepsilon)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, c — сталий n-вимірний вектор; при цьому, якщо характеристичне рівняння

$$\det\left(A_0(t)-\lambda B(t)\right) = 0 \tag{3}$$

має прості корені, то

$$R(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s R_s(t),$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{h-1}\varepsilon^s\Lambda_s(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_n(t,\varepsilon)\}. \tag{4}$$

Якщо ж рівняння (3) має кратні корені, яким відповідають кратні елементарні дільники, то розклади (4) ведуться за дробовими степенями параметра ε.

Вперше система (1) при $\det B(t)\equiv 0$ розглядалася в [1], де показано, що коли рівняння (3) має $1\leq r_1<n$ простих коренів $\lambda_i(t), i=\overline{1,r_1}$, тоді система (1) має r_1 частинних розв'язків вигляду

$$x_k(t,\varepsilon) = \varphi_k(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{t_0}^{t}\omega_k(\tau,\varepsilon)d\tau\right),\quad k=\overline{1,r_1}, \tag{5}$$

де

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\varphi_k^{(s)}(t),\quad \omega_k(t,\varepsilon) = \lambda_k(t) + \sum_{s=1}^{h-1}\varepsilon^s\omega_k^{(s)}(t).$$

Якщо ж рівняння (3) має r_1-кратний корінь $\lambda_0(t)$, якому відповідають кратні елементарні дільники, то система (1) теж має r_1 частинних розв'язків вигляду (5), де розклади ведуться за дробовими степенями параметра ε. Питання про те, чи має система (1) інші розв'язки, залишалося довгий час відкритим. Лише в [2] воно знайшло своє повне розв'язання. В цій роботі показано, що при виконанні певних умов окрім розв'язків вигляду (5) (де бралось

$$\omega_k(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \omega_k^{(s)}(t);$$

ці розв'язки названі розв'язками першого типу) існують розв'язки й другого типу, а саме; розв'язки вигляду

$$x(t, \varepsilon) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \mu^s v^{(s)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} \eta^{-1}(\tau, \mu) d\tau \right), \tag{6}$$

де

$$\eta(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \eta^{(s)}(t), \quad \mu^m = \varepsilon,$$

а m — певне ціле число. Як показано в [2], розв'язки того чи іншого вигляду визначаються елементарними дільниками в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$, а саме: „скінченним" елементарним дільникам відповідають розв'язки вигляду (5), а „нескінченним" елементарним дільникам — вигляду (6).

В [3] показано, що коли корені рівняння (3) та всі елементарні дільники в'язки $A_0(t) - \lambda B(t)$ зберігають на $[t_0, T]$ сталу кратність, тоді існує пара неособливих матриць $P(t)$ і $Q(t)$, яка приводить в'язку до такого канонічного вигляду:

$$P(t)\big(A_0(t) - \lambda B(t)\big) Q(t) = \Omega(t) - \lambda H, \tag{7}$$

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} W(t) & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$W(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_{r_1}(t)\}$ у випадку простих коренів рівняння (3), або ж жорданова $(r_1 \times r_1)$-вимірна матриця, E_1, E_2 — одиничні матриці розмірів r_1 і $r_2 = n - r_1$ відповідно, I — нільпотентна жорданова матриця, яка визначається „нескінченними" елементарними дільниками в'язки $A_0(t) - \lambda B(t)$.

Виходячи з (8), можна зауважити, що розв'язки (5) визначаються парою $(W(t), E_1)$, а розв'язки (6) — парою (E_2, I).

В [2] показано, крім того, що коли $\operatorname{rang} B(t) = r_1$, тобто виконується умова "ранг–степінь" [4], тоді система (1) має лише розв'язки вигляду (5), а тому загальний розв'язок можна подати у вигляді (2), де $R(t, \varepsilon)$ — $(n \times r_1)$-, $\Lambda(t, \varepsilon)$ — $(r_1 \times r_1)$-вимірні матриці, c — r_1-вимірний вектор. Якщо ж $\operatorname{rang} B(t) = r > r_1$, то з'являються розв'язки вигляду (6). Якщо ж рівняння (3) не має коренів, тобто

$$\det\big(A_0(t) - \lambda B(t)\big) \equiv \det A_0(t) \neq 0, \tag{9}$$

то існують лише розв'язки вигляду (6). Але, як це буде показано нижче, в цьому випадку систему (1) можна звести до рівносильної системи, розв'язки якої мають вигляд (5).

2. Нехай виконується умова (9). Тоді, як це показано в [5], матриці (8) мають вигляд

$$\Omega(t) = E, \quad H \equiv I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_p \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де

$$I_k = (\gamma_{ij})_1^{r_k}, \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, r_k},$$

а r_k має кратність „нескінченних" елементарних дільників. Заміною $x = Q(t)y$ та множенням зліва на матрицю $P(t)$ система (1) зводиться до системи

$$\varepsilon^h I \dot{y} = (E + \varepsilon C_1(t) + \varepsilon^2 \tilde{C}(t, \varepsilon))y, \tag{11}$$

в якій

$$C_i(t) = P(t)A_i(t)Q(t), \quad i \neq h, \quad C_h(t) = P(t)A_h(t)Q(t) - P(t)B(t)\dot{Q}(t),$$

$$\tilde{C}(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 2} \varepsilon^{s-2} C_s(t).$$

Нехай $p = 1$ (тобто $\operatorname{rang} B(t) = n - 1$). Тоді, застосовуючи до (11) підстановку

$$y = L(\varepsilon)z = \operatorname{diag}\{1, \varepsilon^{\rho}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)\rho}\}z, \tag{12}$$

одержуємо систему

$$\varepsilon^{h+\rho} I \dot{z} = \Big(E + \varepsilon^{1+(1-n)\rho} C_1^{(1)}(t) + \varepsilon^{1+(2-n)\rho} C_2^{(1)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^{1+(n-1)\rho} C_{2n-1}^{(1)}(t) \sum_{s \geq 2} \varepsilon^s \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon^{(i-n)\rho} C_i^{(s)}(t) \Big) z, \tag{13}$$

в якій

$$C_1^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{n1}^{(1)}(t) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{n-11}^{(1)}(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{n2}^{(1)}(t) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$C_{2n-1}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & c_{1n}^{(1)}(t) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо тепер $C_1^{(1)}(t) \neq 0$, то ρ визначимо з рівності $1 + (1-n)\rho = 0$ і введемо параметр $\mu = \varepsilon^{1/n-1}$. В результаті одержимо систему

$$\mu^{h_1} I \dot{z} = (E + C_1^{(1)}(t) + \mu \tilde{C}_1(t, \mu))z \tag{14}$$

($h_1 = (n-1)h + 1$), характеристичне рівняння якої має вигляд

$$0 = \det(E + C_1^{(1)}(t) - \lambda I) \equiv 1 + \mu^{n-1} c_{n1}^{(1)}(t)$$

і має $n - 1$ різних коренів

$$\lambda_k(t) = \sqrt[n-1]{|\gamma_1(t)|}\exp\left(i\frac{\arg\gamma_1(t)+2k\pi}{n-1}\right), \quad k=\overline{1,n-1},$$

де $\gamma_1(t)=-1/c_{n1}^{(1)}(t)$. Оскільки в цьому випадку $\operatorname{rang} I = n-1$, то система (14) задовольняє умову „ранг–степінь", а тому всі її розв'язки мають вигляд (5). Якщо ж $c_{n1}^{(1)}(t)\equiv 0$, $c_{n-11}^{(1)}(t)+c_{n2}^{(1)}(t)\neq 0$, то ρ визначимо з рівності $1+(2-n)\rho=0$, а ввівши параметр $\mu=\varepsilon^{1/n-2}$, одержимо систему

$$\mu^{h_2}I\dot z = (E+C_2^{(1)}(t)+\mu\tilde C_2(t,\mu))z \tag{15}$$

$(h_2=(n-2)h+1)$ з характеристичним рівнянням

$$0=\det(E+C_2^{(1)}(t)-\lambda I)\equiv 1+\lambda^{n-2}\left(c_{n-11}^{(1)}(t)+c_{n2}^{(1)}(t)\right),$$

яке має $n-2$ різних коренів, а тому можна побудувати $n-2$ частинних розв'язків вигляду (5) і т. д.

3. Якщо ж рівняння (3) має принаймні один корінь і не виконується умова „ранг–степінь", то для побудови розв'язків можна використати методику з [2]. Покажемо, що систему (1) можна розщепити на дві підсистеми, одна з яких відповідає парі матриць $(W(t),E_1)$, а друга — парі (E_2,I).

Теорема. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови:*

1) $B(t), A_s(t)\in C^{\infty}_{[t_0,T]}$;

2) *в'язка матриць* $A_0(t)-\lambda B(t)$ *регулярна;*

3) $\operatorname{rang} B(t)=r>1$ *для всіх* $t\in[t_0,T]$;

4) *рівняння* (3) *має степінь* r_1 $(1\le r_1<r)$.

Тоді існують такі неособливі при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $t\in[t_0,T]$ *матриці* $U(t,\varepsilon)$, $V(t,\varepsilon)$, *що заміною*

$$x = V(t,\varepsilon)y = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s V^{(s)}(t)\right)y \tag{16}$$

та множенням зліва на

$$U(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s U^{(s)}(t)$$

система (1) *зводиться до системи*

$$\varepsilon^h H\dot y = C(t,\varepsilon)y, \tag{17}$$

де H *— матриця з* (8), *а*

$$C(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s C^{(s)}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & C_2(t,\varepsilon)\end{pmatrix} \tag{18}$$

— блочно-діагональна матриця, в якій $C_1(t,\varepsilon)-(r_1\times r_1)$, $C_2(t,\varepsilon)-(r_2\times r_2)$ $(r_2=n-r_1)$.

Доведення. Для спрощення викладок обмежимося випадком $h=1$. Підставивши (16) в (1) та помноживши зліва на $U(t,\varepsilon)$, одержимо систему

$$\varepsilon U(t,\varepsilon)B(t)V(t,\varepsilon)\dot y = U(t,\varepsilon)\left(A(t,\varepsilon)V(t,\varepsilon)-\varepsilon B(t)\dot V(t,\varepsilon)\right)y. \tag{19}$$

Матриці $U(t,\varepsilon)$ та $V(t,\varepsilon)$ будемо будувати так, щоб виконувалися рівності

$$U(t,\varepsilon)B(t)V(t,\varepsilon) = H, \tag{20}$$

$$U(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)V(t,\varepsilon)-\varepsilon U(t,\varepsilon)B(t)\dot V(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon), \tag{21}$$

де $C(t, \varepsilon)$ — шукана блочно-діагональна матриця з (16). Прирівнявши в (20) коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо такі рівності:

$$U^{(0)}BV^{(0)} = H, \tag{22}$$

$$U^{(1)}BV^{(0)} + U^{(0)}BV^{(1)} = 0, \tag{23}$$

$$U^{(s)}BV^{(0)} + U^{(0)}BV^{(s)} = -\sum_{k=1}^{s-1} U^{(s-k)}BV^{(k)}, \quad s = 2, 3, \dots, \tag{24}$$

а з (21) маємо

$$U^{(0)}A_0V^{(0)} = \Omega, \tag{25}$$

$$U^{(1)}A_0V^{(0)} + U^{(0)}A_0V^{(1)} = C^{(1)} - U^{(0)}A_0V^{(0)} + U^{(0)}B\dot{V}^{(0)}, \tag{26}$$

$$U^{(s)}A_0V^{(0)} + U^{(0)}A_0V^{(s)} = C^{(s)} - F^{(s)}, \quad s = 2, 3, \dots, \tag{27}$$

де

$$F^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} U^{(s-k)}(B\dot{V}^{(k)} - A_0V^{(k)}) - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i} U^{(s-j)}A_iV^{(j)}. \tag{28}$$

Покажемо, що система (22)–(27) сумісна і знайдемо її розв'язок. Виходячи з (8), (17) покладемо

$$U^{(0)}(t) = P(t), \quad V^{(0)}(t) = Q(t).$$

Тоді, оскільки

$$B(t) = P^{-1}(t)HQ^{-1}(t), \quad A_0(t) = P^{-1}(t)\Omega(t)Q^{-1}(t), \tag{29}$$

то, ввівши в розгляд матриці

$$G^{(s)}(t) = U^{(s)}(t)P^{-1}(t), \quad L^{(s)}(t) = Q^{-1}(t)V^{(s)}(t), \tag{30}$$

від систем (22)–(24) та (25)–(27) перейдемо до систем

$$G^{(1)}H + HL^{(1)} = 0, \tag{31}$$

$$G^{(s)}H + HL^{(s)} = -\sum_{k=1}^{s-1} G^{(s-k)}HL^{(k)}, \quad s = 2, 3, \dots, \tag{32}$$

та

$$G^{(1)}\Omega + \Omega L^{(1)} = C^{(1)} - F^{(1)}, \tag{33}$$

$$G^{(s)}\Omega + \Omega L^{(s)} = C^{(s)} - F^{(s)}, \quad s = 2, 3, \dots . \tag{34}$$

Матриці $G^{(s)}, L^{(s)}, F^{(s)}$ розіб'ємо на блоки у відповідності до структури матриць $\Omega(t)$ та H:

$$G^{(s)} = \begin{pmatrix} G_1^{(s)} & G_2^{(s)} \\ G_3^{(s)} & G_4^{(s)} \end{pmatrix}, \quad L^{(s)} = \begin{pmatrix} L_1^{(s)} & L_2^{(s)} \\ L_3^{(s)} & L_4^{(s)} \end{pmatrix}, \quad F^{(s)} = \begin{pmatrix} F_1^{(s)} & F_2^{(s)} \\ F_3^{(s)} & F_4^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння (31) і (33) в сукупності мають вигляд

$$\begin{pmatrix} G_1^{(1)} + L_1^{(1)} & G_2^{(1)}I + L_2^{(1)} \\ G_3^{(1)} + IL_3^{(1)} & G_4^{(1)}I + IL_4^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} G_1^{(1)}W + WL_1^{(1)} & G_2^{(1)} + WL_2^{(1)} \\ G_3^{(1)}W + L_3^{(1)} & G_4^{(1)} + L_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & 0 \\ 0 & C_2^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} & F_4^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

де $F^{(1)}(t) = P(t)A_1(t)Q(t) + P(t)B(t)\dot{Q}(t)$ — відома матриця.

Покладемо в (35) $G_1^{(1)} = L_1^{(1)} = G_4^{(1)} = L_4^{(1)} = O$. Враховуючи, що $G_3^{(1)} = -IL_3^{(1)}$, $L_2^{(1)} = G_2^{(1)}I$, рівняння (36) записуємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} 0 & G_2^{(1)} - WG_2^{(1)}I \\ L_3^{(1)} - IL_3^{(1)}W & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & 0 \\ 0 & C_2^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} & F_4^{(1)} \end{pmatrix},$$

звідки однозначно визначаємо матриці $C_1^{(1)} = F_1^{(1)}$, $C_2^{(1)} = F_4^{(1)}$ та одержуємо матричні рівняння

$$G_2^{(1)} - WG_2^{(1)}I = -F_2^{(1)}, \quad (37)$$

$$L_3^{(1)} - IL_3^{(1)}W = -F_3^{(1)}. \quad (38)$$

З (37) однозначно знаходимо стовпці матриці $G_2^{(1)}$:

$$g_1^{(1)} = -f_1^{(1)}, \quad g_2^{(1)} = Wg_1^{(1)} - f_2^{(1)}, \ldots, g_{r_2}^{(1)} = Wg_{r_2-1}^{(1)} - f_{r_2}^{(1)},$$

а з (38) також однозначно визначаємо рядки матриці $L_3^{(1)}$ згідно з формулами

$$l_{r_2}^{(1)} = f_{r_2}^{(1)}, \quad l_{r_2-1}^{(1)} = l_{r_2}^{(1)}W - f_{r_2-1}^{(1)}, \ldots, l_1^{(1)} = l_2^{(1)}W - f_1^{(1)}.$$

Покажемо тепер, що системи (32), (34) теж сумісні. Для цього досить розглянути ці системи при $s = 2$, тобто системи

$$\begin{pmatrix} G_1^{(2)} + L_1^{(2)} & G_2^{(2)}I + L_2^{(2)} \\ G_3^{(2)} + IL_3^{(2)} & G_4^{(2)}I + IL_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2^{(1)}G_3^{(1)} & 0 \\ 0 & -IL_3^{(1)}G_2^{(1)}I \end{pmatrix}; \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} G_1^{(2)}W + WL_1^{(2)} & G_2^{(2)} + WL_2^{(2)} \\ G_3^{(2)}W + L_3^{(2)} & G_4^{(2)} + L_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{(2)} & 0 \\ 0 & C_2^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1^{(2)} & F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} & F_4^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

З (39) знаходимо

$$G_1^{(2)} = -L_1^{(2)} + G_2^{(1)}G_3^{(1)}, \quad L_2^{(2)} = -G_2^{(2)}I, \quad G_3^{(2)} = -IL_3^{(2)}, \quad (41)$$

а з (40) —

$$G_4^{(2)} = G_2^{(2)} - F_4^{(2)} - L_4^{(2)}. \quad (42)$$

Підставивши (41) в (40), а (42) в (39), одержимо, рівняння для визначення невідомих матриць $L_1^{(2)}$ та $C_1^{(2)}$:

$$WL_1^{(2)} - L_1^{(2)}W = C_1^{(2)} - F_1^{(2)} - G_2^{(1)}G_3^{(1)}W.$$

Це рівняння згідно з [6] сумісне, якщо права частина ортогональна розв'язкам однорідної системи, а це матиме місце, якщо покласти $C_1^{(2)} = F_1^{(2)} + G_2^{(1)}G_3^{(1)}W$. Тоді можна взяти $L_1^{(2)} = 0$. Для визначення $G_2^{(2)}$ маємо рівняння

$$G_2^{(2)} - WG_2^{(2)}I = -F_2^{(2)},$$

звідки знаходимо стовпці матриці $G_2^{(2)}$ за формулами

$$g_1^{(2)} = -f_1^{(2)}, \quad g_2^{(2)} = Wg_1^{(2)} - f_2^{(2)}, \ldots, g_{r_2}^{(2)} = Wg_{r_2-1}^{(2)} - f_{r_2}^{(2)}. \tag{43}$$

Для визначення матриці $L_3^{(2)}$ маємо рівняння $L_3^{(2)} - IL_3^{(2)}W = -F_3^{(2)}$, з якого знаходимо рядки цієї матриці:

$$l_{r_2}^{(2)} = -\tilde{f}_{r_2}^{(2)}, \quad l_{r_2-1}^{(2)} = l_{r_2}^{(2)}W - \tilde{f}_{r_2-1}^{(2)}, \ldots, l_1^{(2)} = l_2^{(2)}W - \tilde{f}_1^{(2)} \tag{44}$$

$\left(\text{в (43) } f_i^{(2)} = \operatorname{colon}\left(f_{1i}^{(2)}, f_{2i}^{(2)}, \ldots, \tilde{f}_{r_1 i}^{(2)}\right), \text{ а в (44) } \tilde{f}_i^{(2)} = \operatorname{red}\left(f_{i1}^{(2)}, f_{i2}^{(2)}, \ldots, f_{ir_2}^{(2)}\right)\right)$. Залишається визначити матрицю $L_4^{(2)}$ з рівняння

$$IL_4^{(2)} - L_4^{(2)}I = \left(F_4^{(2)} - IL_3^{(1)}G_2^{(1)} - G_2^{(2)}\right)I. \tag{45}$$

Це рівняння має вигляд

$$IX - XI = (P - Y)I, \tag{46}$$

де X, Y — шукані матриці, P — відома $(r_2 \times r_2)$-вимірна матриця. Покажемо, що рівняння (46) має розв'язок. Для цього запишемо його у векторній формі

$$Ix_k - x_{k-1} = p_{k-1} - y_{k-1}, \quad k = \overline{1, r_2} \tag{47}$$

$(x_0 = y_0 = p_0 \equiv 0)$. Тоді при $k = 1$ з (47) маємо

$$Ix_1 = 0.$$

Покладемо $x_1 = 0$. При $k = 2$ рівняння має вигляд

$$Ix_2 = p_1 - y_1. \tag{48}$$

Оскільки вектор зліва має нульові елементи, наприклад останній, то елементи вектора y_1 вибираємо так: $(y_1)_i = (p_1)_i$, якщо $(Ix_2)_i = 0$, $(y_1)_i = 0$, якщо $(Ix_2)_i \neq 0$. Тоді $(Ix_2)_i = (p_1)_{i-1}$. Першу компоненту $(x_2)_1$ покладемо рівною нулю. Так само знаходяться решта векторів $x_j, j = \overline{3, r_2}$. Таким чином, матриці $G^{(2)}, L^{(2)}, C^{(2)}$ знайдені. Теорему доведено.

На закінчення зауважимо, що система (17) розпадається на дві підсистеми

$$\varepsilon^h \dot{u} = C_1(t, \varepsilon)u,$$

$$\varepsilon^h I\dot{v} = C_2(t, \varepsilon)v$$

$\left(y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$, перша з яких є системою без виродженої матриці при похідній, а друга — системою вигляду (11).

1. *Старун И. И.* Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 10. – С. 1822–1823.
2. *Яковець В. П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ: 1993. – 32 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища шк., 1989. – 287 с.
4. *Чистяков В. Ф.* О линеаризации вырожденных систем квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Приближенные методы решения операторных уравнений и их приложения. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982. – С. 146–157.
5. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Вища шк., 1991. – 207 с.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Одержано 17.05.94