УДК 517. 91 / 93

А. М. Самойленко, акад. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Ю. В. Теплинский, д-р физ.-мат. наук (Каменец-Подол. пед. ин-т)

О ПРИВОДИМОСТИ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

The problem of reducing a countable linear system of standard difference equations with unbounded right-hand side is solved by constructing rapidly converging iterations. For systems of this type with bounded right-hand side, this problem is reduced to the finite-dimensional case.

Методом побудови ітерацій з прискореною збіжністю розв'язано задачу звідності зчисленної лінійної системи різницевих рівнянь стандартного вигляду з необмеженою правою частиною. Для таких систем з обмеженою правою частиною задачу звідності редуковано на скінченновимірний випадок.

Для приложений особый интерес представляет задача о приводимости линейной дифференциальной или разностной системы уравнений с периодическими, квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами. Решению этой задачи в конечномерном пространстве и близким к ней вопросам посвящено много работ, из которых отметим [1–7]. В последние годы опубликован ряд результатов [8–14], связанных с исследованием приводимости периодических, квазипериодических и почти периодических дифференциальных и разностных систем на бесконечных торах и в их окрестностях. В этой работе некоторые из них распространены на случай счетных линейных систем разностных уравнений стандартного вида. При этом использованы основные обозначения и терминология из [2].

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = Ax_n + P(\varphi_n)x_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \quad n \in Z, \tag{1}$$

где

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in R^m,$$

$$x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in \mathfrak{M}, \quad A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots\}$$

— диагональная действительная бесконечная матрица, $P(\varphi) = \left[p_{ij}(\varphi)\right]_{i,j=1}^{\infty}$ — 2π-периодическая по φ^i, $i = \overline{1, m}$, бесконечная матрица, $\mathfrak{M}$ — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_i \{|x^i|, i = 1, 2, \ldots\}$, Z — множество целых чисел $\Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$.

Решим уравнения $\Delta\varphi_n = \omega, n \in Z$, обозначим через $\varphi_n = \varphi(n, \varphi_0)$ где $\varphi(n, \varphi_0)$ — дискретная функция такая, что $\varphi(0, \varphi_0) = \varphi_0 \in R^m$.

Под решением системы уравнений (1) на отрезке $[a, b] \subset R^1$ (конечном или бесконечном) с начальными значениями $n = l \in [a, b] \cap Z = [a, b]_Z$, $\varphi_0 \in R^m$, $x_l \in \mathfrak{M}$ будем понимать такую дискретную функцию $x_n = x(n, \varphi_0, x_l)$, которая обращает уравнение

$$x_{n+1} = Ax_n + P(\varphi(n, \varphi_0))x_n, \quad n \in Z,$$

в тождество на $[a, b]_Z$, принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ на этом множестве и удовлетворяет условию $x_l = x(l, \varphi_0, x_l)$.

Введем следующие обозначения: $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ — целочисленный вектор, E — единичная матрица,

$$|k| = \sum_{i=1}^{m} |k_i|, \quad (k, \omega) = \sum_{i=1}^{m} k_i \omega_i, \quad \|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)|,$$

$$\|P(\varphi)\|_0 = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} |p_{ij}(\varphi)|, \quad |\operatorname{Im} \varphi| = \sup_i \{|\operatorname{Im} \varphi^i|\}.$$

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы* A *отличны от нуля,* $\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| = r_0 > 0$, *матрица* $P(\varphi)$ *аналитична в области* $|\operatorname{Im} \varphi| \leq \rho_0 > 0$ *и действительна при действительных* φ. *Предположим, что существуют положительные постоянные* ε *и* d, *при которых для всех целочисленных векторов* k *выполняется неравенство*

$$\left| \sin \frac{(k, \omega)}{2} \right| \geq \varepsilon |k|^{-d}, \quad |k| \neq 0.$$

Тогда существует такая положительная постоянная M_0, *что при* $\|P(\varphi)\|_0 \leq M_0$ *система уравнений* (1) *заменой переменных* $x_n = \Phi(\varphi_n) y_n$ *приводится к виду*

$$y_{n+1} = A_0 y_n, \quad \Delta \varphi_n = \omega, \quad n \in Z, \tag{2}$$

где A_0 — *постоянная действительная диагональная матрица,* $\Phi(\varphi)$ — 2π-*периодическая по* $\varphi^i, i = \overline{1, m}$, *обратимая и аналитическая в области* $|\operatorname{Im} \varphi| \leq \rho_0 / 2$ *матрица, действительная при действительных* φ.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы о приводимости 5.1 из [2]. Пусть $x_n = x(n)$ — решение системы уравнений (1) на отрезке $[a, b]$. Заменой переменных

$$x_n = (E + U_1(\varphi_n)) y_n^{(1)} = \Phi_1(\varphi_n) y_n^{(1)} \tag{3}$$

система уравнений (1) приводится к виду

$$y_{n+1}^{(1)} = A_1 y_n^{(1)} + P_1(\varphi_n) y_n^{(1)}, \quad \Delta \varphi_n = \omega, \tag{4}$$

где

$$P_1(\varphi_n) = (E + U_1(\varphi_n + \omega))^{-1} (P(\varphi_n) U_1(\varphi_n) - U_1(\varphi_n + \omega) \overline{D}_1),$$

$$A_1 = A + \overline{D}_1, \quad \overline{D}_1 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} D_1(\varphi) \, d\varphi^1, \dots, d\varphi^m,$$

$$D_1(\varphi) = \operatorname{diag} \{p_{11}(\varphi), p_{22}(\varphi), p_{33}(\varphi), \dots \},$$

а $U_1(\varphi)$ — 2π-периодическое по $\varphi^i, i = \overline{1, m}$, в области $|\operatorname{Im} \varphi| \leq \rho_0 - 2\delta_0 = \rho_1 > 0$ решение матричного уравнения

$$U_1(\varphi + \omega) A = A U_1(\varphi_n) + P(\varphi) - \overline{D}_1.$$

Оценка $\|U_1(\varphi)\|_0 \leq M_0^{\gamma - 1} / 8$ [2] обеспечивает при $M_0 < 0$, $1 < \gamma = \text{const} < 2$ обратимость бесконечной матрицы $E + U_1(\varphi_n + \omega)$:

$$(E + U_1(\varphi_n + \omega))^{-1} = E + \sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\alpha} (U_1(\varphi_n + \omega))^{\alpha}.$$

Легко видеть, что вектор $y_n^{(1)}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ на отрезке $[a, b]_Z$.

При достаточно малом M_0 система уравнений (4) допускает те же преобразования, что и система (1).

По аналогии с [2] нетрудно показать, что при соответствующем выборе постоянных M_0, δ_0 процесс преобразования системы (1) заменами вида (3) можно продолжать бесконечно.

После p последовательных замен преобразованием

$$x_n = (E+U_1(\varphi_n)) \ldots (E+U_p(\varphi_n))\, y_n^{(p)} = \Phi_p(\varphi_n) y_n^{(p)}$$

система уравнений (1) приводится к виду

$$y_{n+1}^{(p)} = A_p y_n^{(p)} + P_p(\varphi_n) y_n^{(p)}, \ \Delta\varphi_n = \omega,$$

где $A_p = A + \overline{D}_1 + \overline{D}_2 + \ldots + \overline{D}_p$ — диагональная бесконечная матрица,

$$P_p(\varphi_n) = (E+U_p(\varphi_n+\omega))^{-1}(P_{p-1}(\varphi_n)U_p(\varphi_n) - U_p(\varphi_n+\omega)\overline{D}_p),$$

$U_p(\varphi)$ — 2π-периодическое в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \le \rho_{p-1} - 2\,\delta_0^{p-1} = \rho_p > 0$$

решение матричного уравнения

$$U_p(\varphi+\omega)A_{p-1} = A_{p-1}U_p(\varphi) + P_{p-1}(\varphi) - \overline{D}_p,$$

$$\overline{D}_p = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} D_p(\varphi)\,d\varphi^1, \ldots, d\varphi^m, \qquad P_{p-1}(\varphi) = \left[p_{ij}^{(p-1)}(\varphi)\right]_{i,j=1}^{\infty},$$

$$D_p(\varphi) = \operatorname{diag}\left\{p_{11}^{(p-1)}(\varphi), p_{22}^{(p-1)}(\varphi), p_{33}^{(p-1)}(\varphi), \ldots\right\}.$$

Нетрудно проверить, что при $n \in [a, b]_Z$ последовательность $\left(y_n^{(p)}\right)$ сходится по норме $\|\cdot\|$ к функции y_n, которая определяет решение $y_n = y(n)$ системы уравнений (2), где $A_0 = \lim_{p\to\infty}(A + \overline{D}_1 + \ldots + \overline{D}_p)$.

Неравенство

$$\|\Phi_{s+k_0}(\varphi) - \Phi_s(\varphi)\|_0 \le \frac{1}{8}\prod_{\alpha=1}^{\infty}\left(1+\frac{M_{\alpha-1}^{\gamma-1}}{8}\right)\left\{\sum_{\alpha=s}^{s+k_0-1} M_\alpha^{\gamma-1}\right\} < c\sum_{\alpha=s}^{\infty} M_\alpha^{\gamma-1},$$

где $M_\alpha = M_{\alpha-1}^{\gamma}$, $c = \text{const} > 0$, гарантирует равномерную по φ сходимость последовательности $\{\Phi_p(\varphi)\}$ к матрице $\Phi(\varphi)$ по норме $\|\cdot\|_0$. Обратимость матрицы $\Phi(\varphi)$ следует из неравенства $\|\Phi_p(\varphi) - E\| \le l_0 < 1$, $p = 1, 2, 3, \ldots$.

***Следствие* 1.** *Если в условиях теоремы* 1 *функция* $y_n = y(n)$ *является решением системы уравнений* (2) *на отрезке* $[a, b]$, *то* $x_n = \Phi(\varphi_n)y_n$ — *решение системы уравнений* (1) *на том же отрезке.*

Для доказательства достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\Phi(\varphi_n+\omega)A_0 - A\Phi(\varphi_n) - P(\varphi_n)\Phi(\varphi_n) = 0 \tag{5}$$

при всех $n \in Z$.

Рассмотрим оператор

$$L_p(\varphi_n) = \Phi_p(\varphi_n+\omega)A_p + \Phi_p(\varphi_n+\omega)P_p(\varphi_n) - A\Phi_p(\varphi_n) - P(\varphi_n)\Phi_p(\varphi_n) \tag{6}$$

и методом полной математической индукции докажем, что $L_p(\varphi_n)=0$ тождественно по φ_n при всех натуральных p и $n \in Z$.

Положим $p=1$. Тогда

$$L_1(\varphi_n) = (E+U_1(\varphi_n+\omega))(A+\overline{D}_1) +$$
$$+(E+U_1(\varphi_n+\omega))(E+U_1(\varphi_n+\omega))^{-1}\times$$
$$\times(P(\varphi_n)U_1(\varphi_n)-U_1(\varphi_n+\omega)\overline{D}_1)-$$
$$-A(E+U_1(\varphi_n))-P(\varphi_n)(E+U_1(\varphi_n)) =$$
$$= U_1(\varphi_n+\omega)A-AU_1(\varphi_n)-P(\varphi_n)+\overline{D}_1 = 0.$$

Пусть теперь $p \le k$ $L_p(\varphi_n)=0$. Покажем, что $L_{k+1}(\varphi_n)=0$. Последнее следует из равенства

$$L_{k+1}(\varphi_n) = \Phi_k(\varphi_n+\omega)A_k+\Phi_k(\varphi_n+\omega)P_k(\varphi_n)-A\Phi_k(\varphi_n)-$$
$$-P(\varphi_n)\Phi_k(\varphi_n)+(\Phi_k(\varphi_n+\omega)A_k+\Phi_k(\varphi_n+\omega)P_k(\varphi_n)-$$
$$-A\Phi_k(\varphi_n)-P(\varphi_n)\Phi_k(\varphi_n))U_{k+1}(\varphi_n)+$$
$$+\Phi_k(\varphi_n+\omega)(-P_k(\varphi_n)-A_kU_{k+1}(\varphi_n)+\overline{D}_{k+1}+U_{k+1}(\varphi_n+\omega)A_k) =$$
$$= L_k(\varphi_n)+L_k(\varphi_n)U_{k+1}(\varphi_n)+\Phi_k(\varphi_n+\omega)0 = 0.$$

Переходя в (6) к пределу при $p\to\infty$, получаем (5), что завершает доказательство следствия 1.

Отметим, что при достаточно малом M_0 элементы λ_i, $i=1, 2, \ldots,$ диагональной матрицы A_0 разделены. Отсюда следует, что на отрезке $[-1, 1]\subset R^1$ может лежать лишь конечное число этих элементов. Это приводит к тому, что для любых векторов $y_l \in \mathfrak{M}$ существует решение $y_n = y(n, \varphi_0, y_l)$, $y_l = y(l, \varphi_0, y_l)$ системы уравнений (2) на отрезке $(-\infty, s]$. Продолжимость решения вправо зависит от начального значения y_l. Существуют решения системы (2), определенные на отрезке $(-\infty, \infty)$. Примером такого решения является решение с начальным значением

$$y_l = \left\{\frac{1}{|\lambda_1|};\ \frac{1}{|\lambda_2|^2};\ \frac{1}{|\lambda_3|^3};\ldots\right\} \in \mathfrak{M}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда матрица A ограничена по норме. При этом ее элементы не могут быть разделены, а значит, для решения задачи приводимости системы (1) к виду (2) изложенный выше метод не применим.

Наряду с (1) рассмотрим систему уравнений

$$\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{A}\overset{(s)}{x}_n + \overset{(s)}{P}(\varphi_n)\overset{(s)}{x}_n,\ \Delta\varphi_n = \omega,\quad n\in Z, \tag{7}$$

где

$$\overset{(s)}{x} = \left(\overset{(s)}{x}{}^1, \overset{(s)}{x}{}^2, \ldots, \overset{(s)}{x}{}^s\right),\quad \overset{(s)}{A} = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_3\},\quad \overset{(s)}{P}(\varphi) = \left[p_{ij}(\varphi)\right]_{i,j=1}^s,$$

которая является конечномерной и получается из (1) урезанием по x до s-го порядка.

Предположим, что для матрицы $A + P(\varphi)$ существует ограниченная обратная и для системы (1) выполняются условия теоремы 1, за исключением разделенности элементов матрицы A, ограниченной по норме. Тогда для любого $s = 1, 2, \ldots$ существуют такая постоянная $M_0(s) > 0$ и такая обратимая матрица $\overset{(s)}{\Phi}(\varphi)$, что замена переменных

$$\overset{(s)}{x}_n = \overset{(s)}{\Phi}(\varphi_n)\overset{(s)}{y}_n \tag{8}$$

приводит систему уравнений (7) к виду

$$\overset{(s)}{y}_{n+1} = \overset{(s)}{A}_0 \overset{(s)}{y}_n, \ \Delta\varphi_n = \omega, \quad n \in Z, \tag{9}$$

на отрезке $(-\infty, \infty)$.

Последовательность матриц $\overset{(n)}{C} = \left[c_{ij}^{(n)} \right]_{i,j=1}^{\infty}$ называют правильной, если она равномерно ограничена и сходится к некоторой матрице по координатам, причем ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \left| c_{ij}^{(n)} \right|$, $i = 1, 2, \ldots$, сходятся равномерно по n. Если при этом последнее условие выполняется равномерно по $i = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\left\{ \overset{(s)}{C} \right\}$ называют усиленно правильной [13].

Обозначив через $\overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi)$ матрицу, обратную $\overset{(s)}{\Phi}(\varphi)$, $s = 1, 2, \ldots$, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть матрица $P(\varphi)$ такова, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \sup_{\varphi} |p_{ij}(\varphi)| \le K(n), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

где $K(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Предположим, что последовательность матриц* $\left\{ \overset{(s)}{\Phi}(\varphi) \right\}$, *приводящих* (7) *к виду* (9), *усиленно правильная, а последовательность* $\left\{ \overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi) \right\}$ *правильная при всех* $\varphi \in R^m$. *Тогда при*

$$K(0) \le \inf_{s=1,2,\ldots} M_0(s)$$

система уравнений (1) *приводится к виду* (2) *на любом отрезке* $[a, +\infty)$ *с помощью матрицы* $\Phi(\varphi)$, *представимой в виде покоординатного предела* $\Phi = \lim_{s \to \infty} \overset{(s)}{\Phi}(\varphi)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, положим $a = 0$ и покажем, что покоординатно

$$\lim_{s \to \infty} \overset{(s)}{x}\left(n, \varphi_0, \overset{(s)}{x}_0\right) = x(n, \varphi_0, x_0), \tag{11}$$

где $\overset{(s)}{x}_n = \overset{(s)}{x}\left(n, \varphi_0, \overset{(s)}{x}_0\right)$ и $x_n = x(n, \varphi_0, x_0)$ — решения систем уравнений (7) и (1) соответственно

$$n \in [0, +\infty)_Z, \quad x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots\right) \in \mathfrak{M}, \quad \overset{(s)}{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots x_0^s\right) \in R^s.$$

Для простоты докажем соотношение (11) для первых координат векторов $\overset{(s)}{x}_n$ и x_n. При $n = 1$ имеем

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_1^1 = \lim_{s\to\infty} a_1 x_0^1 + \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{s} p_{1j}(\varphi) x_0^j = x_1^1,$$

причем $\left\| \overset{(s)}{x}{}_1 \right\| \le (\|A\| + K(0)) \|x_0\|$ равномерно по $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Аналогично получаем равенство

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_2^1 = a_1 x_1^1 + \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\varphi_1) \overset{(s)}{x}{}_1^j, \tag{12}$$

где при $j > s$ положено $\overset{(s)}{x}{}_1^j = 0$. Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\varphi_1) \overset{(s)}{x}{}_1^j \le (\|A\| + K(0)) \|x_0\| \sum_{j=1}^{\infty} |p_{1j}(\varphi_1)|,$$

то по условию (10) ряд из левой части последнего неравенства сходится равномерно по s. Тогда из (12) получаем представление

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_2^1 \le a_1 x_1^1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\varphi_1) x_1^j = x_2^1,$$

причем

$$\left\| \overset{(s)}{x}{}_2 \right\| \le (\|A\| + K(0)) \|x_1\|$$

равномерно по $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Методом полной математической индукции убеждаемся в справедливости равенства (11) при всех $n \in [0, +\infty)_Z$.

Обозначим через $\overset{(s)}{\Psi}(\varphi) = \left[\psi_{ij}^{(s)}(\varphi) \right]_{i,j=1}^{s}$ матрицу $\overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$. Из (8) получаем $\overset{(s)}{y}{}_n = \overset{(s)}{\Psi}(\varphi_n) \overset{(s)}{x}{}_n$ при всех натуральных s. Тогда

$$\overset{(s)}{y}{}_n^p = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_{pi}^{(s)}(\varphi_n) \overset{(s)}{x}{}_n^i, \quad s = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \psi_{pi}^{(s)}(\varphi_n) \overset{(s)}{x}{}_n^i = 0 \text{ при } i > s, p > s.$$

Но ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно по $s = 1$, 2, 3, ... , ибо он мажорируется числовым рядом

$$(\|A\| + K(0))^n \|x_0\| \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_{pi}^{(s)}(\varphi_n)|,$$

а последовательность матриц $\overset{(s)}{\Psi}(\varphi)$ правильная.

Это ведет к тому, что при $s \to \infty$ последовательность $\left\{ \overset{(s)}{y}{}_n \right\}$ покоординатно сходится к вектору $y_n = \Psi(\varphi_n) x_n$, где матрица

$$\Psi(\varphi) = \lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{\Psi}(\varphi)$$

является обратной для матрицы

$$\Phi(\varphi) = \lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{\Phi}(\varphi), \quad n \in [0, +\infty)_Z.$$

Остается показать, что последовательность матриц $\left\{ \overset{(s)}{A}_0 \right\}$ покоординатно сходится к некоторой диагональной матрице A_0.

Действительно, при $n \in [0, +\infty)_Z$ матрицы

$$\overset{(s)}{A}_0 = \overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi_n + \omega)\overset{(s)}{A}\overset{(s)}{\Phi}(\varphi_n) + \overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi_n + \omega)\overset{(s)}{P}(\varphi_n)\overset{(s)}{\Phi}(\varphi_n)$$

являются диагональными для всех $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Очевидно, что матричные последовательности $\left\{ \overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi_n + \omega)\overset{(s)}{A} \right\}$ и $\left\{ \overset{(s)}{P}(\varphi_n) \right\}$ правильная и усиленно правильная соответственно. Поскольку сумма правильных последовательностей и произведение правильной последовательности и усиленно правильной сами являются правильными последовательностями [13], то последовательность матриц $\left\{ \overset{(s)}{A}_0 \right\}$ правильная. Последнее означает, что она покоординатно сходится.

Замечание. 1. Действие теоремы 2 можно распространить на весь отрезок $(-\infty, \infty)$. Для этого дополнительно достаточно потребовать, чтобы последовательность матриц $\left\{ \left(\overset{(s)}{A} + \overset{(s)}{P}(\varphi) \right)^{-1} \right\}$ была правильной и покоординатно сходилась к матрице $(A + P(\varphi))^{-1}$.

Рассмотрим теперь систему уравнений вида (1):

$$x_{n+1} = Ax_n + P(\varphi_n)x_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \quad n \in Z, \tag{13}$$

где

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in R^p, \quad \varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \ldots) \in \mathfrak{M},$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in \mathfrak{M}, \quad A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_p), \quad P(\varphi) = \left[p_{ij}(\varphi) \right]_{i,j=1}^p.$$

Положим

$$\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m, 0, 0, \ldots), \quad \overset{(m)}{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, 0, 0, \ldots)$$

и наряду с (13) запишем систему уравнений

$$\overset{(m)}{x}_{n+1} = A\overset{(m)}{x}_n + P\left(\overset{(m)}{\varphi}_n\right)\overset{(m)}{x}_n, \quad \Delta\overset{(m)}{\varphi}_n = \overset{(m)}{\omega}, \quad n \in Z, \tag{14}$$

где $\overset{(m)}{x}_n = \left(\overset{(m)}{x}{}_n^1, \overset{(m)}{x}{}_n^2, \ldots, \overset{(m)}{x}{}_n^p \right)$.

Будем предполагать, что для всякого натурального m существуют такие положительные числа $\delta(m)$ и $d(m)$, что

$$\left| \sin\frac{\left(\overset{(m)}{k}, \overset{(m)}{\omega}\right)}{2} \right| \geq \delta(m)\left|\overset{(m)}{k}\right|^{-d(m)} \tag{15}$$

для всех ненулевых целочисленных векторов $\overset{(m)}{k} = \left(\overset{(m)}{k}_1, \ldots, \overset{(m)}{k}_m, 0, 0, \ldots \right)$.

Тогда при условиях теоремы 1 для всякого натурального m существуют постоянная $M_0(m)$ и матрица $\Phi_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)$ такие, что при $\left\|P\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\|_0 \le M_0(m)$ замена переменных

$$\overset{(m)}{x}_n = \Phi_m\left(\overset{(m)}{\varphi}_n\right)\overset{(m)}{y}_n$$

приводит систему уравнений (14) к виду

$$\overset{(m)}{y}_{n+1} = A_m \overset{(m)}{y}_n, \quad \Delta \overset{(m)}{\varphi}_n = \overset{(m)}{\omega}, \quad n \in Z,$$

на отрезке $(-\infty, \infty)$.

Говорят, что матрица $P(\varphi)$ удовлетворяет усиленным условиям Коши–Липшица по φ $\left(P(\varphi) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\varphi)\right)$, если для любых точек $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m, \varphi^{m+1}, \varphi^{m+2}, \ldots)$ и $\overline{\varphi} = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m, \overline{\varphi}^{m+1}, \overline{\varphi}^{m+2}, \ldots)$ из множества $\mathfrak{M}$, первые m координат которых совпадают, справедливо неравенство $\|P(\varphi) - P(\overline{\varphi})\| \le \alpha(m)\|\varphi - \overline{\varphi}\|$, где $\alpha(m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Следующее утверждение мы приводим без доказательства (оно аналогично доказательству теоремы 2).

Теорема 3. *Пусть* $P(\varphi) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ *и при любом натуральном* m *матрицы* $P\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)$ *аналитичны в области* $\left|\mathrm{Im}\,\overset{(m)}{\varphi}\right| \le \rho_0$ $(\rho_0 > 0)$, *причем выполняется условие* (15). *Тогда если* $\|P(\varphi)\| \le \inf_m M_0(m)$ *и матричные последовательности* $\left\{\Phi_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\}$, $\left\{\Phi_m^{-1}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\}$ *сходятся по норме* $\|\cdot\|$ *при* $m \to \infty$, *то система уравнений* (13) *приводима к виду* (2) *на любом отрезке* $[a, +\infty)$ *с помощью матрицы* $\Phi(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \Phi_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)$.

Замечания. 2. Если последовательность $\left\{\left(A + P\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right)^{-1}\right\}$ сходится по норме $\|\cdot\|$ к матрице $(A + P(\varphi))^{-1}$, то при условиях теоремы 3 система уравнений (13) приводима по всей оси $(-\infty, \infty)$.

3. Утверждения теорем 2 и 3 остаются в силе, если s и m, фигурирующие в ее условиях, принимают значения $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$, где $m_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$.

Если в системе уравнений (1) переменные x и φ принадлежат пространству $\mathfrak{M}$, то возможны различные варианты их укорочения. Приведем один из возможных результатов как следствие из теорем 2, 3.

Предположим, что в этом случае система (1) удовлетворяет условиям теоремы 3 и соотношению (10). Тогда для любых натуральных чисел s и m существуют такие постоянные $M_0(s, m) > 0$, что при $\left\|\overset{(s)}{P}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\| \le M_0(s, m)$ укороченные по переменной x до s-го и по переменной φ до m-го порядков системы уравнений, соответствующее системе (1), приводимы по всей оси с помощью приводящих матриц, которые мы обозначим через $\overset{(s)}{\Phi}_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)$.

Теорема 4. Пусть в принятых предположениях для всякого натурального s

$$\left\{\overset{(s)}{\Phi}_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\} \to \overset{(s)}{\Phi}(\varphi), \qquad \left\{\overset{(s)}{\Phi}{}_m^{-1}\left(\overset{(m)}{\varphi}\right)\right\} \to \overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi)$$

при $m \to \infty$ по норме $\|\cdot\|$, а последовательности матриц $\left\{\overset{(s)}{\Phi}(\varphi)\right\}$ и $\left\{\overset{(s)}{\Phi}{}^{-1}(\varphi)\right\}$ усиленно правильная и правильная соответственно. Тогда при

$$\| P(\varphi)\|_0 \leq \inf_{s,m=1,2,\ldots} M_0(s,m)$$

система уравнений (1) приводима на любом отрезке $[a, +\infty)$, причем приводящая матрица $\Phi(\varphi)$ представима в виде повторного предела

$$\Phi(\varphi) = \lim_{s \to \infty} \lim_{m \to \infty} \overset{(s)}{\Phi}_m\left(\overset{(m)}{\varphi}\right),$$

где внешний предел понимается покоординатно, а внутренний — в сильном смысле.

В заключение отметим, что теоремы 1–4 органично дополняют результаты, полученные в [2, 6, 9].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 245 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 214 с.
3. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости линейных систем разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вычисл. и прикл. математика. – 1974. – Вып. 23. – С. 116–127.
4. *Блинов И. Н.* Применение метода сколь угодно быстрой сходимости к решению проблемы приводимости линейных систем с нечетными почти-периодическими коэффициентами // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 6. – С. 729–740.
5. *Былов Б. Ф.* О структуре решений систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Мат. сб. – 1965. – **66**, № 2. – С. 215–229.
6. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость нелинейных почти-периодических систем разностных уравнений, заданных на торе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 404–410.
7. *Urabe M.* Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems // Funkcial. Ekvac. – 1972. – **15**. – P. 75–100.
8. *Филиппов М. Г.* О приводимости систем дифференциальных уравнений с почти периодическим возмущением, заданных на бесконечномерном торе // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 30–33.
9. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость нелинейных почти-периодических систем разностных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1216–1223.
10. *Palmer K.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differentil equations // J. Different. Equat. – 1980. – **36**. – P. 374–390.
11. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей. – Киев, 1989. – 45 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.44).
12. *Теплинский Ю. В., Лучик В. Е.* О приводимости дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1376–1382.
13. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 194–201.
14. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – 308 с.

Получено 08.02.95