УДК 517.5

О. В. Котова, Р. М. Тригуб (Донец. нац. ун-т)

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНИМ НЕКЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

By using an exact estimate for approximation by known trigonometric polynomials, we strengthen a Jackson-type theorem. Moreover, we determine the exact order of approximation of some periodic functions by these polynomials. For this purpose, we introduce a special modulus of smoothness.

З використанням точної оцінки наближення відомими тригонометричними поліномами одержано підсилення теореми типу Джексона. Більш того, знайдено точний порядок наближення окремих довільних періодичних функцій цими поліномами. Для цього введено спеціальний модуль гладкості.

1. Введение. Порядок приближения непрерывной 2π-периодической функции (будем писать: $f \in C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi;\pi]$) тригонометрическими полиномами порядка n при росте n часто выражают через модуль гладкости $\omega_s\left(f;\dfrac{\pi}{n}\right)$, который определяется следующим образом ($\|\cdot\|$ — норма в $C(\mathbb{T})$):

$$\omega_s(f;h) = \sup_{0<\delta\le h} \|\Delta_\delta^s f(\cdot)\|, \qquad \Delta_\delta^1 f(x) = f(x) - f(x+\delta).$$

Модуль непрерывности $\omega = \omega_1$ использовал еще Лебег, ω_s при $s \ge 2$ ввел С. Н. Бернштейн в 1914 г., а основные свойства изучил A. Marchaud (1927 г.) (см., например, [1], гл. 3 и 4).

Известно, например, что

$$\omega_s(f;h) = O(h^\alpha), \qquad 0 < \alpha \le s, \quad h \to +0,$$

тогда и только тогда, когда:

1) $f^{[\alpha]} \in \mathrm{Lip}(\alpha - [\alpha])$ при $\alpha \notin \mathbb{N}$;
2) $\omega_2(f^{(\alpha-1)};h) = O(h)$ при целых $\alpha < s$ (условие Зигмунда);
3) $f^{(s-1)} \in \mathrm{Lip}\,1$ при $\alpha = s$.

В теории приближений часто используют полиномы вида

$$\tau_{r,n}(f) = \tau_{r,n}(f;x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^r(t)dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}, \qquad \alpha_{r,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^r(t)dt$$

($r \in \mathbb{N}$, порядок $\tau_{r,n}$ равен rn).

При $r = 1$ это частные суммы $S_n(f)$ ряда Фурье f, при $r = 2$ — полиномы Фейера $\sigma_n(f)$, а при $r = 4$ — полиномы Джексона. При четном r это положительные операторы. Известно, что (c — абсолютная константа)

$$\|f - S_n(f)\| \le c\omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right)(1 + \ln n),$$

$$\|f-\sigma_n(f)\| \le c\omega\left(f;\frac{\ln(n+1)}{n}\right),$$

а при $r \ge 4$ в силу четности ядра

$$\|f-\tau_{r,n}(f)\| = \sup_x \left|\frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}}\int\limits_0^\pi \big[f(x-t)-2f(x)+f(x+t)\big]D_n^r(t)dt\right| \le$$

$$\le \sup_x \frac{1}{2\pi|\alpha_{r,n}|}\int\limits_0^\pi \big|f(x-t)-2f(x)+f(x+t)\big|\big|D_n(t)\big|^r dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi|\alpha_{r,n}|}\int\limits_0^\pi \omega_2(f;t)\big|D_n(t)\big|^r dt \le c(r)\omega_2\left(f;\frac{\pi}{n}\right)$$

(подробнее см. в [1] или [2]).

При $r=3$ так можно получить оценку $\omega\left(f;\dfrac{\pi}{n}\right)$ и только $\omega_2\left(f;\dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n}\right)$. На самом деле, как доказано в [3], при $r \ge 3$

$$\|f-\tau_{r,n}(f)\| \asymp \omega_2\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r). Такие двойные (порядковые) неравенства с правой частью вида $\omega\left(f;\dfrac{\pi}{n}\right)$ и $\omega_2\left(f;\dfrac{\pi}{n}\right)$ доказаны в [3] для сверток функций с ядрами довольно общего вида. Оценки приближения сверху называют прямыми теоремами, а такие же оценки снизу, которые появились в работах второго из авторов еще в 60-е годы прошлого века, сейчас часто называют „strong converse theorem" (см., например, [4] и приведенную там библиографию).

Аналогичные двойные неравенства получены и для модулей гладкости ω_s нецелого порядка s (см. [2]).

Впервые С. Б. Стечкин [5] построил полиномы с порядком приближения не хуже $\omega_s\left(f;\dfrac{\pi}{n}\right)$ при любом целом $s \ge 3$. При $s=2$ они имеют вид

$$\widetilde{\tau}_{4,n}(f;x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{4,n}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big[2f(x+t)-f(x+2t)\big]D_n^4(t)dt \tag{1}$$

(см., например, [1, 2]).

Как будет доказано в настоящей статье, приближение такими полиномами лучше, чем полиномами $\tau_{4,n}(f)$ Джексона. Здесь найден точный порядок приближения такими полиномами (двусторонние оценки).

Доказательство проводится методом мультипликаторов, а для этого нужно знать коэффициенты полиномов $\widetilde{\tau}_{4,n}(f)$ (см. ниже перед леммой 3):

$$\widetilde{\tau}_{4,n}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_n\left(\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}_k e_k, \qquad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \qquad e_k = e_k(x) = e^{ikx},$$

$\varphi_n(x) = 0$ при $|x| \geq 4 + \dfrac{1}{n}$, а при $|x| < 4 + \dfrac{1}{n}$ и $\gamma_n = 16 + \dfrac{24}{n} + \dfrac{14}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}$

$$\gamma_n \varphi_n(x) = \begin{cases} -9|x|^3 + 6\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + 16 + \dfrac{24}{n} + \dfrac{14}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}, & |x| \in [0,1), \\ 7|x|^3 - 18\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + 8\left(6 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)|x| + \dfrac{6}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}, & |x| \in [1,2), \\ 3|x|^3 - 6\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + 32 + \dfrac{48}{n} + \dfrac{22}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}, & |x| \in \left[2, 2 + \dfrac{1}{n}\right), \\ \left(4 - |x| + \dfrac{1}{n}\right)\left(4 - |x| + \dfrac{2}{n}\right)\left(4 - |x| + \dfrac{3}{n}\right), & |x| \in \left[2 + \dfrac{1}{n}, 4 + \dfrac{1}{n}\right], \end{cases} \tag{2}$$

$\varphi_n(0) = 1$ и существует единственное число $x_n > 0$ такое, что $\varphi_n(\pm x_n) = 1$.

Ранее доказано (см., например, [2, с. 363]), что

$$c(s)\omega_s(f;h) \leq \left\| \int_0^1 \Delta_{ht}^s f(\cdot) dt \right\| \leq \omega_s(f;h)$$

($c(s) > 0$ и зависит только от s).

Оценка сверху очевидна, а для оценки снизу используется классическая теорема Линдемана о трансцендентности значений показательной функции.

Введем усредненную первую разность, связанную с точкой x_n:

$$\Delta_{h,x_n}^1 f(x) = \int_0^1 \left[\Delta_{ht}^1 f(x) - \lambda_n \Delta_{ht}^2 f(x)\right] dt,$$

где

$$\lambda_n = \frac{2(ix_n + 1 - e^{ix_n})}{2ix_n + 3 - 4e^{ix_n} + e^{2ix_n}}$$

(вещественная часть знаменателя $2(1 - \cos x_n)^2 > 0$).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Для любой функции* $f \in C(\mathbb{T})$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - \widetilde{\tau}_{4,n}(f)\| \asymp \|\Delta^1_{\frac{1}{n}, x_n} \Delta^1_{\frac{1}{n}, -x_n} f(\cdot)\|$$

(*двустороннее неравенство с положительными абсолютными константами*).

Из этой теоремы следует такое же двустороннее неравенство и по норме в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ (см. ниже п. 3. в лемме 1).

Порядок насыщения $\dfrac{1}{n^2}$ и класс насыщения — это класс $W^2(\mathbb{T})$ периодических функций с производной из $\mathrm{Lip}\,1$ (доказывается стандартным способом).

Если еще воспользоваться известным неравенством [1, 2]

$$E_n^T(f) := \min_{\{a_k\}_{-n}^n} \left\| f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^s} E_n^T(f^{(s)}), \quad f \in C^s(\mathbb{T}),$$

то получим такое утверждение.

Следствие. *Для* $f \in C^s(\mathbb{T})$

$$E_n^T(f) \le c\frac{1}{n^s}\left\|\Delta^1_{\frac{1}{n},x_n}\Delta^1_{\frac{1}{n},-x_n}f^{(s)}(\cdot)\right\|.$$

Особенность этих полиномов заключается в следующем. В случае классических полиномов, когда множество неподвижных точек оператора τ_n одномерно (константы), последовательность норм $\|f-\tau_n(f)\|$ с ростом n почти убывает. Например, для сумм Фейера при $m>n$

$$\|f-\sigma_m(f)\| \le 4\|f-\sigma_n(f)\|.$$

Для полиномов $\widetilde{\tau}_{4,n}$ никакой почти монотонности быть не может. Действительно, если при $n\to\infty$ $x_n - \dfrac{p_n}{q_n} \to 0$ (p_n и $q_n \in \mathbb{N}$), то для $f = e_{p_n}$ и $m = 2q_n$, например, было бы

$$\left\|e_{p_n} - \widetilde{\tau}_{4,m}(e_{p_n})\right\| = \left|1-\varphi_{2q_n}\left(\frac{p_n}{2q_n}\right)\right| \le c\left|1-\varphi_{q_n}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|,$$

где правая часть стремится к нулю при $n\to\infty$, а левая — нет.

Заметим еще, что для доказательства теоремы нельзя брать $r=3$.

Через c, возможно с разными индексами, будем обозначать некоторые абсолютные положительные константы.

2. Доказательства. Комплекснозначная числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ является мультипликатором из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$, если для любой функции $f\in C(\mathbb{T})$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \widehat{f}_k e_k \sim \Lambda f$$

является рядом Фурье некоторой функциии $\Lambda f \in C(\mathbb{T})$ и

$$\left\|\{\lambda_k\}\right\|_M = \sup_{\|f\|\le 1}\|\Lambda f\| < \infty.$$

Такие операторы перестановочны со сдвигом и являются свертками функции f с некоторыми мерами на окружности.

Аналогично определяется мультипликатор из $L_p(\mathbb{T})$ в $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$ ($\{\lambda_k\}\in M_p$), и всегда $\left\|\{\lambda_k\}\right\|_{M_p} \le \left\|\{\lambda_k\}\right\|_M$ (см., например, [6], гл. I и VI или [7], гл. 16).

При доказательстве нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 (принцип сравнения, [2, c. 316])**.** 1. *Пусть*

$$\Lambda f \sim \sum_{k\in Z}\lambda_k\widehat{f}_k e_k, \qquad \widetilde{\Lambda} f \sim \sum_{k\in Z}\widetilde{\lambda}_k\widehat{f}_k e_k.$$

Если из $\lambda_k = 0$ *следует, что и* $\widetilde{\lambda}_k = 0$ (*это и необходимо*), *то*

$$\left\|\widetilde{\Lambda}f\right\| \le K\left\|\Lambda f\right\|, \qquad K = \inf_{\frac{0}{0}}\left\|\left\{\frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right\}\right\|_M$$

$\Bigg($*нижняя грань относится к выбору дробей вида* $\dfrac{0}{0}\Bigg)$.

2. *Если, к тому же,* $(I-\Lambda)$ — *компактный оператор в* $C(T)$, *где* I — *единичный оператор, то*

$$\|\widetilde{\Lambda}f\| \leq K\|\Lambda f\| \tag{3}$$

для всех $f \in C(\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\inf_{\frac{0}{0}} \left\| \left\{ \frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M \leq K.$$

3. *Из условий пункта* 2 *и неравенства* (3) *следует такое же неравенство по норме в* $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$.

В случае $\lambda_k = g(\varepsilon k)$, $g \in C(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ важно определить принадлежность g банаховой алгебре (относительно поточечного сложения и умножения)

$$B(R) = \left\{ g\colon g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} d\mu(t), \quad \|g\|_B = \operatorname{var}\mu < \infty \right\},$$

где μ — конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера, а $\operatorname{var}\mu$ — ее полная вариация, так как в этом случае

$$\sup_{\varepsilon>0} \big\|\{g(\varepsilon k)\}\big\|_M = \|g\|_B$$

(см. [6, 7, 2]).

Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е. $d\mu = hdx$, то получим подалгебру $A(\mathbb{R})$ абсолютно сходящихся интегралов Фурье, которая является идеалом в $B(\mathbb{R})$ с нормой $\|g\|_B = \|g\|_A = \|h\|_1$.

Ниже мы воспользуемся достаточным условием принадлежности $A(\mathbb{R})$, указанным Берлингом (1938 г.) (см. обзорную статью и препринт [8]).

Лемма 2. *Если* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *локально абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}$, g *и* $g' \in L_2(\mathbb{R})$, *то*

$$\|g\|_A \leq c\ \left(\|g\|_2 + \|g'\|_2\right).$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Очевидно, что

$$\Delta^1_{h,x_n} e_k(x) = e_k(x) \int\limits_0^1 \Big[1 - e^{ikht} - \lambda_n\big(1 - e^{ikht}\big)^2\Big] dt.$$

Введем функцию

$$\psi_n(x) = \int\limits_0^1 \left[1 - e^{ixt} - \lambda_n\ \left(1 - e^{ixt}\right)^2\right] dt = 1 - \lambda_n + (2\lambda_n - 1)\frac{e^{ix}-1}{ix} - \lambda_n \frac{e^{2ix}-1}{2ix}, \quad \psi_n(0) = 0.$$

Тогда

$$\Delta^1_{h,x_n} f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_n(kh)\widehat{f}_k e_k.$$

В силу леммы 1 нужно проверить для оценки приближения сверху и снизу соответственно, что

$$\sup_n \left\| \left\{ g_n\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \right\|_M < \infty, \qquad \sup_n \left\| \left\{ \frac{1}{g_n\left(\frac{k}{n}\right)} \right\} \right\|_M < \infty,$$

где при $x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{1-\varphi_n(x)}{\psi_n(x)\psi_n(-x)}, \qquad g_n(\infty) = \frac{1}{(1-\lambda_n)^2}.$$

Учитывая, что норма в M постоянной последовательности равна модулю ее члена, а $|g_n(\infty)| = O(1)$ (см. ниже (15) и (12)), будем доказывать (см. лемму 2), что

$$\sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_2 + \sup_n \|g_n'\|_2 < \infty, \qquad \sup_n \left\| \frac{1}{g_n} - \frac{1}{g_n(\infty)} \right\|_2 + \sup_n \left\| \left(\frac{1}{g_n}\right)' \right\|_2 < \infty. \tag{4}$$

Определим сначала функцию φ_n (см. (2)).

Коэффициенты ядра D_n^r вычислены в [3] (лемма 1). В частности, при $r = 4$

$$D_n^4(t) = \frac{1}{\beta_{4n}} \sum_{k=-4n}^{4n} \beta_{|k|+4n} e^{ikt},$$

где $\beta_m = 0$ при $m > 8n$, а при $0 \le m \le 8n$

$$\beta_m = 4 \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m}{2n+1}\right]} (-1)^\nu \frac{(m-\nu(2n+1)+3)!}{\nu!(4-\nu)!(m-\nu(2n+1))!}.$$

Поскольку еще $\alpha_{4,n} = \beta_{4n}$, множители при коэффициентах Фурье $\widehat{f}_k$ у полинома $\widetilde{\tau}_{4,n}$ (см. (1)) равны

$$\varphi_n\left(\frac{|k|}{n}\right) = \frac{1}{2\pi\beta_{4n}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[2e^{ikt} - e^{2ikt}\right] D_n^4(t)dt = \frac{1}{\beta_{4n}}(2\beta_{|k|+4n} - \beta_{2|k|+4n}).$$

После простых преобразований получаем формулу (2).

Лемма 3. *$\varphi_n(0) = 1$, φ_n имеет в нуле строгий минимум, $\varphi_n(x) = 1$ при $x > 0$ один раз в точке x_n. При этом при $n \in \mathbb{N}$*

$$1{,}386 < x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n < x_n \le 2.$$

Кроме того, при $|x| \le 4 + \dfrac{1}{n}$

$$|1-\varphi_n(x)| \le cx^2 \big||x| - x_n\big|, \tag{5}$$

и

$$x^2 \big||x| - x_n\big| \le c|1-\varphi_n(x)|. \tag{6}$$

Доказательство. φ_n — это четный непрерывный сплайн, „склеенный” из восьми алгебраических полиномов третьей степени. Графиком предельной функции

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

является сплайн третьей степени из $C^2(\mathbb{R})$ (минимального дефекта). В нуле — строгий минимум, а производная на $[0;2]$ меняет знак один раз. Обозначим через x_0 единственную точку на $(0;2)$, в которой $\varphi(x_0) = 1$. Тогда $x_0 = 1{,}3868\ldots$.

График $\varphi_n(x)$ имеет такой же вид. $\varphi_n(0) = 1$, на $\left[0; \dfrac{8}{9} + \dfrac{4}{9n}\right]$ φ_n строго возрастает, а далее убывает, $\varphi_n\left(\dfrac{4}{3}\right) > 1$, $\varphi_n(2) < 1$ при $n \geq 2$ и $\varphi_1(2) = 1$. Так что $\varphi_n(x_n) = 1$ при некотором $x_n \in \left(\dfrac{4}{3}; 2\right]$.

Уточним оценку снизу для x_n. Для этого проверим, что $\varphi(x) < \varphi_n(x)$ при $x \in [x_0; 2]$.

На этом отрезке

$$\varphi_n(x) = \frac{7x^3 - 36x^2 + 48x + \dfrac{6}{n}(8x - 3x^2) + \dfrac{2}{n^2}(4x+3) + \dfrac{3}{n^3}}{16 + \dfrac{24}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}},$$

а

$$0 < \varphi(x) = \frac{7x^3 - 36x^2 + 48x}{16} \leq 1.$$

Учитывая, что $8x - 3x^2 \geq 4$ на $[1;2]$, а $\dfrac{a+\varepsilon}{b+\varepsilon} \geq \dfrac{a}{b}$ при $0 < a \leq b$ и $\varepsilon > 0$, получаем

$$\varphi_n(x) > \frac{7x^3 - 36x^2 + 48x + \dfrac{24}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{16 + \dfrac{24}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}} \geq \varphi(x).$$

Так что $\varphi_n(x_0) > \varphi(x_0) = 1 = \varphi_n(x_n)$, откуда $x_0 < x_n$.

А если $\lim x_n = x_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, хотя бы по одной подпоследовательности n, то $\varphi(x_0+\varepsilon) = \lim \varphi_n(x_n) = 1$, что невозможно, так как $1 = \varphi(x_0) > \varphi(x_0 + \varepsilon)$. Неравенство (5) становится очевидным, если заметить, что φ_n на каждом из промежутков определения (см. (2)) является полиномом третьей степени с ограниченными по n коэффицентами, а точки 0 и x_n отделены абсолютной константой 1.

Для доказательства неравенства (6) достаточно проверить, что при $|x| \leq 4 + \dfrac{1}{n}$ и некотором $c > 0$

$$|1 - \varphi_n(x)| \geq c \min\left\{x^2, \big||x| - x_n\big|\right\}.$$

Действительно, если $h(x) \geq \min\{h_1(x), h_2(x)\}$, где $h_1(x) \geq 0$ и $h_2(x) \geq 0$, то при $h_1(x) \leq h_2(x)$, например,

$$h(x) \geq h_1(x)h_2(x)\frac{1}{h_2(x)+1} \geq \frac{1}{1 + \max h_2(x)} h_1(x)h_2(x).$$

Считаем далее, что $n \geq 5$ (при $n \leq 4$ рассуждения упрощаются).

Минимум φ_n' на $(1;2)$ достигается в точке $\dfrac{12}{7}+\dfrac{6}{7n}$. Поэтому

$$|\varphi_n'(x)| \ge \min\{|\varphi_n'(1+0)|, |\varphi_n'(2-0)|\}.$$

Но $|\varphi_n'(1+0)| \ge 0{,}012$, а $|\varphi_n'(2-0)| \ge 0{,}5$. Тогда на $[1;2]$

$$\left|\frac{1-\varphi_n(x)}{x-x_n}\right| = \left|\int\limits_0^1 \varphi_n'(x_n+u(x-x_n))du\right| =$$

$$= \int\limits_0^1 |\varphi_n'(x_n+u(x-x_n))|du \ge \min\{|\varphi_n'(1+0)|, |\varphi_n'(2-0)|\} \ge 0{,}012.$$

А при $x \ge 2$ имеем $1-\varphi_n(x) \ge 0{,}333$, так как $\varphi_n(2) \le 0{,}667$. Так что

$$|1-\varphi_n(x)| \ge c_1\big||x|-x_n\big| \qquad \left(1 \le |x| \le 4+\frac{1}{n}\right).$$

При $x \in [0;1]$ (и $n \ge 5$), когда φ_n'' — линейная функция,

$$\left|\frac{1-\varphi_n(x)}{x^2}\right| = \left|\int\limits_0^1 (1-u)\varphi_n''(ux)du\right| \ge \frac{1}{2}\min\{|\varphi_n''(0)|, |\varphi_n''(1-0)|\} \ge 0{,}5.$$

При $x \in [2;5]$ $1-\varphi_n(x) \ge 0{,}333 \ge 0{,}013x^2$. Так что при $|x| \le 1$ и $2 \le |x| \le 5$

$$|1-\varphi_n(x)| \ge c_2x^2.$$

Поэтому при $|x| \le 4+\dfrac{1}{n}$

$$|1-\varphi_n(x)| \ge \min\left\{c_1\big||x|-x_n\big|, c_2x^2\right\},$$

и лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к функции

$$\psi_n(x) = 1-\lambda_n+(2\lambda_n-1)\frac{e^{ix}-1}{ix}-\lambda_n\frac{e^{2ix}-1}{2ix}, \quad \psi_n(0)=0,$$

где

$$\lambda_n = \frac{2(ix_n+1-e^{ix_n})}{2ix_n+3-4e^{ix_n}+e^{2ix_n}}.$$

Число λ_n выбрано так, что $\psi(x_n)=0$.

Нужно проверить, что кроме 0 и x_n у ψ_n других вещественных нулей нет.

Введем функцию $\mathbb{R}\times(0;\pi] \to \mathbb{C}$

$$\psi(x,t) = 1-\lambda(t)+(2\lambda(t)-1)\frac{e^{ix}-1}{ix}-\lambda(t)\frac{e^{2ix}-1}{2ix}, \tag{7}$$

где

$$\lambda(t) = \frac{2(it+1-e^{it})}{2it+3-4e^{it}+e^{2it}} \qquad (\psi_n(x)=\psi(x,x_n)).$$

Очевидно, что

$$\psi(0,t) \equiv \psi(t,t) \equiv 0, \qquad \lim_{t\to+0}\lambda(t)=\infty.$$

Лемма 4. *Для того чтобы при фиксированном* $t \in (0;\pi]$ *функция* $\psi(x,t)$ *имела на* $\mathbb{R}$ *только два нуля* ($x=0$ *и* $x=t$), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$e^{\frac{1}{2}(a(t)-\overline{a(t)})} \neq \frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}e^{-it}, \tag{8}$$

где

$$a(t)=\frac{2\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)e^{-it}+3\lambda(t)+\overline{\lambda(t)}}{2|\lambda(t)-1|^2}.$$

Доказательство. Сначала найдем все вещественные нули $\mathrm{Re}(1-\overline{\lambda(t)})2ix\psi(x,t)$.

При $z=e^{ix}$ (вместо $\lambda(t)$ будем писать просто λ)

$$e^{2ix}\Big[(1-\overline{\lambda})2ix\psi(x,t)-(1-\lambda)2ix\overline{\psi(x,t)}\Big]=$$

$$=e^{2ix}\Big\{(1-\overline{\lambda})\big[2i(1-\lambda)x+(4\lambda-2)e^{ix}-\lambda e^{2ix}+2-3\lambda\big]+$$

$$+(1-\lambda)\big[-2i(1-\overline{\lambda}x+(4\overline{\lambda}-2)e^{-ix}-\overline{\lambda}e^{-2ix}+2-3\overline{\lambda}\big]\Big\}=$$

$$=\lambda(\overline{\lambda}-1)z^4+(4\lambda-2)(1-\overline{\lambda})z^3+\big[(2-3\lambda)(1-\overline{\lambda})+(2-3\overline{\lambda})(1-\lambda)\big]z^2+$$

$$+(4\overline{\lambda}-2)(1-\lambda)z+\overline{\lambda}(\lambda-1)=$$

$$=(z-1)^2\big[\lambda(\overline{\lambda}-1)z^2-2|\lambda-1|^2z+\overline{\lambda}(\lambda-1)\big]$$

(последнее равенство можно проверить умножением двух полиномов второй степени).

У функции $\psi(x,t)$ оба нуля ($x=0$ и $x=t$) простые (см. также ниже (11)). Поэтому

$$2e^{2ix}\,\mathrm{Re}(1-\overline{\lambda(t)})2ix\psi(x,t)=\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)(z-1)^2(z-e^{it})(z-z_1(t)),$$

где $z_1(t)\neq 1$ и $z_1(t)\neq e^{it}$.

Отметим, что $\lambda(t)\neq 0$, так как $\mathrm{Re}(it+1-e^{it})=1-\cos t>0$ и $\lambda(t)\neq 1$ (см. (15)).

Вид $z_1(t)$ определяем по известному произведению нулей полинома четвертой степени:

$$z_1(t)=\frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}e^{-it}=e^{it_1},\qquad t_1\neq 0,\quad t_1\neq t,\quad t_1\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, если $\psi(x,t)=0$, то $x=0$, t или t_1, где t_1 определяется однозначно (см. (7)).

Используя равенство

$$\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)z_1^2(t)=2(\lambda(t)-1)z_1(t)+\overline{\lambda(t)}(1-\lambda(t)), \tag{9}$$

получаем

$$0=2ix\psi(x,t)=2i(1-\lambda(t))t_1+(4\lambda(t)-2)z_1(t)-\lambda(t)\times$$

$$\times\left[\frac{2(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)}z_1(t)+\frac{\overline{\lambda(t)}(1-\overline{\lambda(t)})}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}\right]+2-3\lambda(t)=$$

$$= 2i(1-\lambda(t))t_1 + 2\lambda(t)z_1(t) + \frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\overline{\lambda(t)}-1} + 2 - 3\lambda(t).$$

Учитывая еще вид $z_1(t)$, это равенство можно переписать в виде

$$it_1 = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t)-1}e^{it_1} + \frac{\lambda(t)}{2(\overline{\lambda(t)}-1)} + \frac{2-3\lambda(t)}{2(\lambda(t)-1)} =$$

$$= \frac{\overline{\lambda(t)}}{\overline{\lambda(t)}-1}e^{-it} + \frac{3\lambda(t)-\overline{\lambda(t)}-2-2|\lambda(t)|^2}{2|\lambda(t)-1|^2} =$$

$$= \frac{2\,\left(|\lambda(t)|^2-\overline{\lambda(t)}\right)e^{-it} + 3\lambda(t)+\overline{\lambda(t)}-2-2|\lambda(t)|^2}{2|\lambda(t)-1|^2}.$$

Справа — число чисто мнимое, так как

$$2\left(|\lambda(t)|^2-\overline{\lambda(t)}\right)e^{-it} + 2\left(|\lambda(t)|^2-\lambda(t)\right)e^{it} + 3\lambda(t) + 3\overline{\lambda(t)} + \lambda(t) + \overline{\lambda(t)} - 4 - 4|\lambda(t)|^2 =$$

$$= 2\left[\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)e^{-it} + \lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)e^{it} + 2(\lambda(t)+\overline{\lambda(t)}) - 2 - 2|\lambda(t)|^2\right],$$

а используя равенство (9), получаем

$$0 = \lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)e^{it} + \overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)e^{-it} - 2(\lambda(t)-1)(\overline{\lambda(t)}-1) =$$

$$= \lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)e^{it} + \overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)e^{-it} + 2(\lambda(t)+\overline{\lambda(t)}) - 2 - 2|\lambda(t)|^2.$$

Поэтому (в обозначениях леммы)

$$e^{\frac{1}{2}(a(t)-\overline{a(t)})} = e^{it_1} = \frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t)-1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)}-1)}e^{-it}.$$

Достаточность доказана.

Для доказательства *необходимости* нужно неравенство (8) заменить равенством, положить

$$it_1 = \frac{a(t)-\overline{a(t)}}{2}$$

и провести те же рассуждения в обратном порядке (появится третий нуль у $\psi(x,t_1)$).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Неравенство* (8) *выполняется для всех* $t \in [t_0;2]$, *где* $t_0 = 1,386$.

Доказательство см. в конце статьи.

Лемма 6. *При* $t \in [t_0;2]$ *и* $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x,t)| \le c|x||x-t| \tag{10}$$

и

$$\min\{1, |x||x-t|\} \le c|\psi(x,t)|. \tag{11}$$

Доказательство. Начнем с $\lambda(t)$. При $t \in (0;\pi]$

$$|\lambda(t)| \le \frac{\left|2i\int_0^t (1-e^{iu})du\right|}{2(1-\cos t)^2} \le \frac{4\sin\dfrac{t}{2}}{8\sin^2\dfrac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}. \qquad (12)$$

Поэтому при $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x,t)| \le |1-\lambda(t)| + |2\lambda(t)-1| + |\lambda(t)| \le 4|\lambda(t)| + 2 \le 2\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{t}{2}}\right).$$

Но $\psi(z,t)$ — целая функция по z экспоненциального типа 2 и по неравенству Бернштейна, например,

$$|\psi'_x(x,t)| \le 4\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{t}{2}}\right), \qquad |\psi''_x(x;t)| \le 8\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{t}{2}}\right).$$

Поэтому при $t \ge t_0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x,t)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi'_x(x,t)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi''_x(x,t)| \le 14\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{t_0}{2}}\right) = c_0 \qquad (13)$$

и, следовательно, при $t \in [t_0;\pi]$

$$\left|\frac{\psi(x,t)}{x-t}\right| = \left|\frac{\psi(x,t)-\psi(t,t)}{x-t}\right| = \left|\int\limits_0^1 \psi'_x(t+u(x-t),t)du\right| \le c_0,$$

$$|\psi(x,t)| = |\psi(x,t)-\psi(0,t)| \le c_0|x|.$$

Неравенство (10) доказано.

Перейдем к доказательству (11).

Имеем (см. (7))

$$\big(2ix\psi(x,t)\big)'_x = \big[2ix(1-\lambda(t)) + 2 - 3\lambda(t) + (4\lambda(t)-2)e^{ix} - \lambda(t)e^{2ix}\big]'_x =$$

$$= 2i\big[1-\lambda(t) + (2\lambda(t)-1)e^{ix} - \lambda(t)e^{2ix}\big] = 2i(e^{ix}-1)(\lambda(t)-1-\lambda(t)e^{ix}).$$

Подставляя $x=t$ и учитывая, что $\psi(t,t)=0$, получаем

$$|2t\psi'_x(t,t)| = 2\big|e^{it}-1\big|\big|\lambda(t)-1-\lambda(t)e^{it}\big| = 4\sin\frac{t}{2}\Big|\lambda(t)(1-e^{it})-1\Big|,$$

а при $t \in [t_0;2]$

$$\big|\lambda(t)(1-e^{it})-1\big| = \left|\frac{(2it+2-2e^{it})(1-e^{it}) - 2it - 3 + 4e^{it} - e^{2it}}{2it-3+4e^{it}-e^{2it}}\right| =$$

$$= \frac{|e^{2it} - 2it + e^{it} - 1|}{|2it - 3 + 4e^{it} - e^{2it}|} = \frac{2|te^{it} - \sin t|}{|2it - (1 - e^{it})(3 - e^{it})|} \geq \frac{t - \sin t}{t + 4} \geq \frac{t_0 - \sin t_0}{6} = c_3.$$

Так что при $t \in [t_0; 2]$

$$|\psi'_x(t,t)| \geq \frac{1}{2t} 4 \sin \frac{t}{2} c_3 \geq c_3 \sin 1.$$

Учитывая еще, что

$$\psi(x,t) = \psi'_x(t,t)(x-t) - \int\limits_t^x \psi''_x(u,t)(u-t)du,$$

и неравенство (13), при $|x - t| \leq \dfrac{c_3}{c_0}$ получаем

$$|\psi(x,t)| \geq c_3 \sin 1 \cdot |x-t| - c_0 \frac{1}{2}|x-t|^2 \geq c_4|x-t|.$$

Аналогичное неравенство выполняется в окрестности нуля $(x = 0)$ фиксированного радиуса.

Поскольку $\psi'_x(0,t) = -\dfrac{i}{2}$, то при $|x| \leq \dfrac{1}{2c_0}$ (см. (13))

$$|\psi(x,t)| \geq \frac{1}{2}|x| - \frac{c_0}{2}x^2 \geq 0{,}25|x|.$$

А в силу лемм 4 и 5 при $t \in [t_0; 2]$ ψ имеет только два нуля на $\mathbb{R}$. Таким образом, при $\delta = \dfrac{1}{c_0} \min\left\{c_3; 0,5\right\}$ и $|x| \leq \delta$, $|x-t| \leq \delta$

$$|\psi(x,t)| \geq c_5|x||x-t|.$$

Докажем теперь методом от противного, что вне указанных δ-окрестностей 0 и t

$$1 \leq c|\psi(x,t)|.$$

Сначала рассмотрим окрестность точки $x = \infty$.

Поскольку

$$\left|\frac{1 - e^{ix}}{ix}\right| = \left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x e^{iu}du\right| \leq \min\left\{1, \frac{2}{|x|}\right\},$$

то при $x \in \mathbb{R}$ (см. еще (12))

$$|1 - \lambda(t) - \psi(x,t)| \leq |2\lambda(t) - 1| \min\left\{1, \frac{2}{|x|}\right\} + |\lambda(t)| \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\} \leq$$

$$\leq \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\}(5|\lambda(t)| + 2) \leq c_6 \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\}. \tag{14}$$

При этом

$$|1 - \lambda(t)| = \frac{2|1 - e^{it}|^2}{|2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}|} \geq \frac{8 \sin^2 \frac{t}{2}}{2t + 8} \geq c_7. \tag{15}$$

Отсюда при $|x| \geq N = \dfrac{2c_6}{c_7}$

$$|\psi(x,t)| \geq |1-\lambda(t)| - c_6 \min\left\{1, \frac{1}{|x|}\right\} \geq c_7 - \frac{c_6}{|x|} \geq \frac{1}{2}c_7.$$

При фиксированном $t \in [t_0; 2]$ на компакте, определяемом неравенствами $|x| \leq N$, $|x| \geq \delta$ и $|x-t| \geq \delta$, существует $y = y(t)$ такой, что

$$\varepsilon(t) = \min_x |\psi(x,t)| = |\psi(y(t),t)|.$$

В силу лемм 4 и 5 $\varepsilon(t) > 0$. Предположим, что $\inf \varepsilon(t) = 0$ при $t \in [t_0; 2]$. Тогда по некоторой последовательности натуральных чисел

$$t_n \to t^*, \qquad y_n \to y^*, \qquad \psi(y_n, t_n) \to \psi(y^*, t^*) = 0.$$

А так как $|y_n| \geq \delta$ и $|y^*| \geq \delta$, а $t^* \in [t_0; 2]$, то в силу лемм 4 и 5 $y^* = t^*$. Но

$$|y_n - t_n| \to |y^* - t^*| \geq \delta > 0.$$

Противоречие доказывает, что $\inf \varepsilon(t) > 0$.

Лемма 6 доказана.

С помощью программы Maple можно указать число $c > 0$ такое, что $\varepsilon(t) > c$.

Доказательство теоремы. Чтобы применить леммы 1 и 2, нужно доказать неравенства (4) при

$$g_n(x) = \frac{1-\varphi_n(x)}{\psi_n(x)\psi_n(-x)} = \frac{1-\varphi_n(x)}{\psi_n(x,x_n)\psi_n(-x,x_n)}, \qquad g_n(\infty) = \frac{1}{(1-\lambda_n)^2}.$$

Очевидно, что при $n \geq 1$

$$\|h_n\|_2^2 = \int\limits_{|x| \leq 4+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx + \int\limits_{|x| \geq 4+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq 10 \sup_{|x| \leq 4+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 + \int\limits_{|x| \geq 4+\frac{1}{n}} |h_n(x)|^2 dx.$$

Применим это неравенство к функциям $h_n = g_n - g_n(\infty)$, h_n' и учтем при этом, что (см. еще (15))

$$\sup_n \|g_n\|_B \leq \sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_A + \sup_n |g_n(\infty)| \leq \sup_n \|g_n - g_n(\infty)\|_A + \frac{1}{c_7^2}.$$

При $|x| \leq 4 + \dfrac{1}{n}$

$$g_n(x) = \frac{1}{|x|+x_n} \frac{1-\varphi_n(x)}{x^2\big||x|-x_n\big|} \frac{x(x-x_n)}{\psi_n(x)} \frac{x(x+x_n)}{\psi_n(-x)}$$

или

$$g_n(x) = \frac{1}{|x|+x_n} g_{1,n}(x) g_{2,n}(x) g_{2,n}(-x).$$

Поскольку $g_{1,n}$ — сплайн, „склеенный" из полиномов не выше третьей степени с ограниченными по n коэффициентами (см. (2)) и гладкими множителями $\left(\text{на } \left[2+\frac{1}{n}, 4+\frac{1}{n}\right]\text{, например, это } \frac{1}{x^2(x-x_n)}\right)$, то при $|x| \le 4+\frac{1}{n}$

$$|g_{1,n}(x)| + |g'_{1,n}(x)| \le c_8.$$

К $g_{2,n}$ применяем лемму 6: при $|x| \le 4+\frac{1}{n}$

$$|g_{2,n}(x)| \le c_9, \qquad \left|\frac{1}{g_{2,n}(x)}\right| \le c_{10}.$$

Но $\frac{1}{g_{2,n}}$ — целая функция экспоненциального типа 2. Поэтому опять же по неравенству Бернштейна

$$\left|\frac{g'_{2,n}(x)}{g^2_{2,n}(x)}\right| = \left|\left(\frac{1}{g_{2,n}(x)}\right)'\right| \le 2c_{10}, \qquad |g'_{2,n}(x)| \le 2c_{10}c_9^2.$$

Следовательно, при $|x| \le 4+\frac{1}{n}$

$$|g_n(x)| + |g'_n(x)| \le c_{11}.$$

При $|x| \ge 4+\frac{1}{n}$

$$g_n(x) = \frac{1}{\psi_n(x)\psi_n(-x)}$$

и

$$g_n(x) - g_n(\infty) = \frac{(1-\lambda_n)(1-\lambda_n-\psi_n(-x)) + \psi_n(-x)(1-\lambda_n-\psi_n(x))}{\psi_n(x)\psi_n(-x)(1-\lambda_n)^2}.$$

Каждый из трех множителей в знаменателе по модулю ограничен сверху и снизу абсолютной положительной константой (см. лемму 6, (12) и (15)), а в силу (14)

$$|1-\lambda_n-\psi_n(x)| \le \frac{c_6}{|x|}.$$

Если еще воспользоваться неравенством (13), то получим

$$\int\limits_{|x|\ge 4+\frac{1}{n}} \left(|g_n(x)-g_n(\infty)|^2 + |g'_n(x)|^2\right) dx \le c_{12}.$$

Оценка в теореме приближения сверху доказана.

В силу (12)

$$\left|\frac{1}{g_n(\infty)}\right| = |1-\lambda_n|^2 \le c_{13},$$

а применяя леммы 3 и 6 при $|x| \le 4+\frac{1}{n}$, получаем

$$\left|\frac{1}{g_n(x)}\right| = (|x| + x_n)\left|\frac{x^2\ (|x| - x_n)}{1 - \varphi_n(x)}\right|\left|\frac{\psi_n(x)}{x(x - x_n)}\right|\left|\frac{\psi_n(-x)}{x(x + x_n)}\right| \le c_{14}.$$

При $|x| \ge 4 + \dfrac{1}{n}$ (см. еще (14))

$$\left|\frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g_n(\infty)}\right| = \left|\psi_n(x)\psi_n(-x) - (1 - \lambda_n)^2\right| =$$

$$= \Big|[\psi_n(x) - (1 - \lambda_n)]\psi_n(-x) + (1 - \lambda_n)[\psi_n(-x) - (1 - \lambda_n)]\Big| \le \frac{c_{15}}{|x|}.$$

И, как и ранее, получаем

$$\sup_{|x| \le 4 + \frac{1}{n}} \left|\left(\frac{1}{g_n}\right)'\right|^2 + \int\limits_{|x| \ge 4 + \frac{1}{n}} \left|\left(\frac{1}{g_n}\right)'\right|^2 dx \le c_{16}.$$

Теорема доказана.

***Доказательство леммы* 5.** Введем функцию

$$H(t) = \operatorname{Im}\left[\frac{\overline{\lambda(t)}(\lambda(t) - 1)}{\lambda(t)(\overline{\lambda(t)} - 1)} e^{-it} - e^{\frac{1}{2}(a(t) - \overline{a(t)})}\right] =$$

$$= \frac{t(2\cos t + t\sin t - 2)}{2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)} - \sin\frac{2\sin t - t(1 + \cos t)}{1 - \cos t}$$

и докажем, что $H(t) > 0$ при $t \in [t_0; 2]$.

Для этого понадобится оценка сверху $|H'(t)|$.

Очевидно, что

$$|H'(t)| \le \left|\left[\frac{t(2\cos t + t\sin t - 2)}{2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)}\right]'\right| + \left|\left[\frac{2\sin t - t(1 + \cos t)}{1 - \cos t}\right]'\right| =$$

$$= \left|\frac{(2\cos t + t^2 - 2)(2t\sin t - t^2\cos t + 2\cos t - 2)}{[2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)]^2}\right| + \left|\frac{\cos^2 t + 2\cos t + 2t\sin t - 3}{(1 - \cos t)^2}\right|.$$

Начнем со второй дроби. На отрезке $[0; 2]$ числитель

$$|\cos^2 t + 2\cos t + 2t\sin t - 3| \le \pi - 3$$

и, значит, на $[t_1, 2]$, $t_1 \in (0; 2)$, второе слагаемое не больше

$$\frac{\pi - 3}{(1 - \cos t_1)^2}.$$

В первой дроби числитель

$$h_1(t) = (2\cos t + t^2 - 2)(2t\sin t - t^2\cos t + 2\cos t - 2)$$

равен произведению двух положительных и возрастающих множителей и знаменатель

$$h_2(t) = 2(\cos t - 1) + t(2\sin t - t)$$

положителен и возрастает. Так что при $t \in [t_1; t_2]$, $0 < t_1 < t_2 \leq 2$,

$$|H'(t)| \leq \frac{h_1(t_2)}{h_2^2(t_1)} + \frac{\pi - 3}{(1 - \cos t_1)^2}.$$

Очевидно, что если $H(t_1) > 0$ и $|H'(t)| \leq M_1$ при $t \in [t_1 - \delta_1; t_1 + \delta_1]$, где $\delta_1 = \dfrac{1}{M_1} H(t_1)$, то и при $t \in (t_1 - \delta_1; t_1 + \delta_1)$

$$H(t) \geq H(t_1) - M_1 |t - t_1| > H(t_1) - H(t_1) = 0. \tag{16}$$

При $t_0 = 1{,}386$ $H(t_0) > 0{,}0637$.

Если $H(t_s) > 0$ при $s \geq 0$, то полагаем $t_{s+1} = t_s + 2\delta_s$, где $H_s = H(t_s + \delta_s) > 0$ и

$$\max_{t_s \leq t \leq t_{s+1}} |H'(t)| \leq M_s.$$

Если при этом $\delta_s \leq \dfrac{H_s}{M_s}$ и $H(t_{s+1}) > 0$, то в силу предыдущего (см. (16)) $H(t) > 0$ при $t \in [t_s; t_{s+1}]$. И так продолжаем до 2. Имеем

$$(t_{s+1}; H_s; M_s; H(t_{s+1}))$$

при $s = 0, 1, 2, 3 : t_0 = 1{,}386;\ t_1 = 1{,}513;\ t_2 = 1{,}7;\ t_3 = 1{,}926;\ t_4 = 2{,}086,$

$$(1{,}513;\ 0{,}0637;\ 1;\ 0{,}0826), \qquad (1{,}7;\ 0{,}0826;\ 0{,}869;\ 0{,}1132),$$

$$(1{,}926;\ 0{,}1132;\ 1{,}032;\ 0{,}1702), \qquad (2{,}086;\ 0{,}1702;\ 1{,}032;\ 0{,}2173).$$

Лемма 5, а с ней и теорема, доказаны.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
2. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
3. *Trigub R. M.* Exact order of approximation of periodic functions by linear positive operators // East J. Approxim. – 2009. – **15**, № 1. – P. 25 – 50.
4. *Draganov B. R.* Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators// J. Approxim. Theory. – 2010. – **162**. – P. 952 – 979.
5. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219 – 242.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974.
7. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Мир, 1985. – Т. 2.
8. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent fourier integrals: an overview // Anal. and Math. Phys. – 2012. – **2**. – P. 1 – 68. (См. также препринт тех же авторов „Know and new results on absolute convergence of Fourier integrals”. – CRM, Preprint № 859. – June 2009.)

Получено 13.02.12